C9 – Synthèses des méthodes d'obtention des Lois E/S des chaînes cinématiques

Compétences attendues :

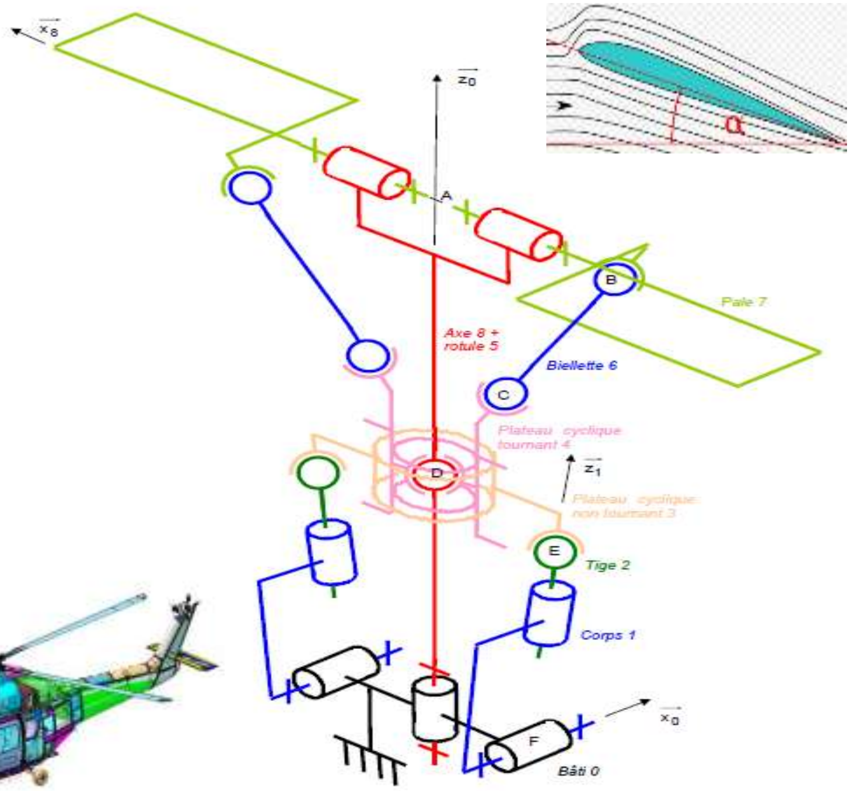
Savoir définir les **modèles géométriques directs et inverses**

Savoir identifier une **chaîne cinématique ouverte ou fermée**

Connaître les **méthodes d'obtention des lois E/S**

1. LOI D'ENTRÉE-SORTIE (LOI E/S)

En **cinématique**, nous étudions des mécanismes, c'est-à-dire des chaînes de solides organisées dans le but de réaliser les fonctions définies dans le cahier des charges. Pour en déterminer le comportement, il est nécessaire d'élaborer la relation entre les **mouvements de sortie (effecteur) et d'entrée (actionneur)** (voir cours et TD précédents dont les TD7).



Par exemple, le mécanisme de tête de rotor d'hélicoptère ci-dessous doit permettre d'incliner les pales (effecteurs), on parle de d'**angle d'incidence** de la pale (matière d'œuvre de **sortie**). Cette incidence sert à diriger l'hélicoptère dans l'espace 3D. **L'entrée** est le **déplacement des tiges** 2 et 2' de deux vérins (actionneurs).

C9 ciné S-61 Sea King Rotor Head An

2. NOTIONS DE MODÈLES GÉOMETRIQUES ET DE CHAINES CINÉMATIQUES

2.1. Notion de modèles géométriques

La loi entrée-sortie concerne la relation entre les **coordonnées articulaires** (c'est-à-dire les paramètres pilotant les **actionneurs**) et les **coordonnées opérationnelles** (c'est-à-dire les coordonnées d'un point de **l'effecteur** en bout de chaîne). Dans le cas de chaîne cinématique ouverte, on appelle la loi entrée-sortie du système **le modèle géométrique**.

Ainsi il est possible de distinguer le **modèle géométrique direct** et le **modèle géométrique inverse** :

- Le **modèle géométrique direct** permet de lier les coordonnées opérationnelles (effecteur) aux coordonnées articulaires (actionneurs).

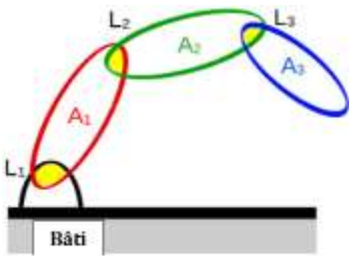
$$sortie = f(entrée)$$

- Le **modèle géométrique inverse** permet de lier les coordonnées articulaires (actionneurs) aux coordonnées opérationnelles.

$$entrée = f^{-1}(sortie)$$

2.2. Chaînes cinématiques ouvertes

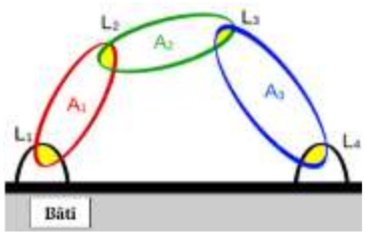
Dans le cas des chaînes cinématiques ouvertes, la loi entrée-sortie concerne la relation entre les coordonnées articulaires et les coordonnées opérationnelles du point en bout de chaîne. Pour cela, on établit un modèle géométrique direct et un modèle géométrique inverse à partir d'une fermeture géométrique principalement (voir TD 7.3 Calcul des Mi en TP) et sa projection sur des axes astucieux et/ou la fermeture angulaire (relation entre les angles d'un triangle, quadrilatère, isocèle, …) à partir des figures planes.



2.3. Chaînes cinématiques fermées

Dans le cas des chaînes cinématiques fermées, on peut rajouter comme technique d'obtention :

- la fermeture cinématique (composition des torseurs cinématiques C7 ; C8 et TD)



2.4. Remarque

On analyse toujours les systèmes mécaniques, même les plus complexes, à partir du découpage en chaînes ouvertes et/ou fermées. Si un même système présente plusieurs chaînes cinématiques, on étudie tour à tour chaque chaîne cinématique élémentaire du système complexe. Dans le TD 7.2 sur le Pont flottant, le graphe de liaisons fait apparaître 3 chaînes cinématiques fermées qui donneront, par fermeture cinématique, $3x6 = 18\, équations\, scalaires$. Dans ce TD, nous n'avons étudié qu'une fermeture cinématique qui nous a donné 6 équations scalaires.

2.5. Expressions trigonométriques classiques (pour la fermeture géométrique principalement)

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{et} \quad \sin\alpha + \sin\beta = 2.\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$a.\cos(\theta_{30}) + b.\sin(\theta_{30}) = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\underbrace{\frac{a}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}}}_{=sin\varphi}.\cos(\theta_{30}) + \underbrace{\frac{b}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}}}_{=cos\varphi}.\sin(\theta_{30})\right)$$

$$\text{d'où } a.cos(\theta_{30}) + b.sin(\theta_{30}) = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}.sin(\theta_{30}+\varphi)\ \ avec\ tan\,\varphi = \frac{a}{b}$$

Pour passer à l'arcsin, il faudra vérifier que $(\theta_{30}+\varphi) \in \left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$ (voir **TD 7.1**)

3. 4 MÉTHODES CLASSIQUES

3.1. Calcul d'une loi d'entrée-sortie par fermeture cinématique

Le calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture cinématique consiste à déterminer les relations entre les dérivées des paramètres et les paramètres eux-mêmes de manière à observer leur évolution au cours du temps. On écrit pour cela une fermeture cinématique par composition des mouvements.

Cette technique a été abondamment utilisée dans les TD 7 et 8.

- *1 équation sur les torseurs*

Partant d'un solide ***i*** d'une chaîne fermé, on écrit une équation torsorielle,

$$\{\mathcal{V}(i/j)\} + \{\mathcal{V}(j/k)\} + \cdots + \{\mathcal{V}(r/i)\} = \{\mathcal{V}(i/i)\} = \{0\}$$

$$où\ i\ ;\ j\ ;\ k\ ;\ldots;r\ ;i\ \ sont\ les\ solides\ qui\ se\ succèdent\ dans\ la\ chaîne\ fermée\ étudiée$$

Pour ces torseurs, on regarde dans le graphe de liaisons, s'il y a *un nombre limité de bases qui permettent de les écrire tous* (dans l'idéal, une seule base : voir C8 Sewgay)

- 2 équations sur les vecteurs

Cette relation donne deux fermetures vectorielles :

- Fermeture des vecteurs rotations

$$\vec{\Omega}_{i/j} + \vec{\Omega}_{j/k} + \cdots + \vec{\Omega}_{r/i} = \vec{\Omega}_{i/i} = \vec{0}$$

- Fermeture des vecteurs vitesses (écrite en un point P qui limitera les calculs à réaliser)

$$\overrightarrow{V(P\in \imath/\jmath)} + \overrightarrow{V(P\in \jmath/k)} + \cdots + \overrightarrow{V(P\in r/\imath)} = \overrightarrow{V(P\in \imath/\imath)} = \vec{0}$$

- 6 équations scalaires (par fermeture cinématique)

Chaque relation vectorielle nous donne, par projection dans une base bien choisie, 3 équations scalaires (donc 3x2 = 6 équations scalaires au total) que l'on sait à priori résoudre (facile à écrire si déjà dans la même base).

Il peut être nécessaire d'écrire un autre ensemble de 6 équations scalaires en utilisant une autre chaîne fermée (voir C8 Segway).

Remarque 1 : On ne résoudra que les équations qui conduisent aux résultats attendus.

Remarque 2 : Il est souvent habile de commencer par les vecteurs rotations.

3.2. Calcul d'une loi d'entrée-sortie par fermeture géométrique

Il faut écrire une relation de Chasles entre les vecteurs issus de la géométrie en passant par les vecteurs qui, par projection, donneront des équations scalaires contenant les paramètres pertinents de mouvements (voir le TD 7.1. ; TD 7.3 et TD 9). On peut aussi utiliser la méthode de la norme.

3.3. Calcul d'une loi d'E/S par une relation spécifique au mécanisme (produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante)

Exemple de la barrière Sinusmatic :

La barrière Sinusmatic est un système de transformation de mouvement qui s'adapte sur un motoréducteur. Il permet de transformer le mouvement d'entrée du moteur (rotation continue) en un mouvement de rotation alternative d'amplitude $\pi/2$ sur la lice.

Le système est constitué :

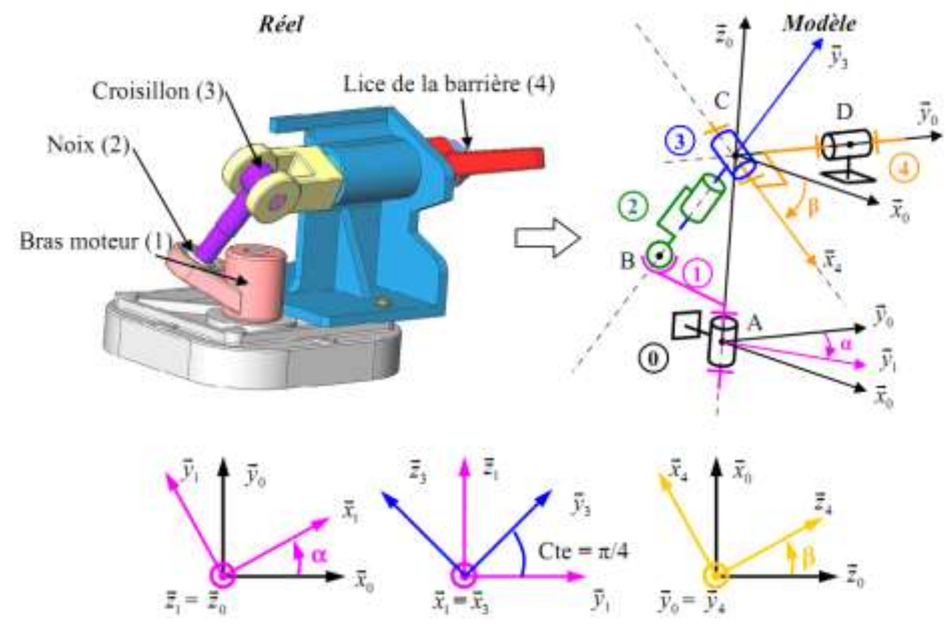
- d'un bras moteur 1 en liaison pivot avec le bâti 0 suivant l'axe $(A, \overrightarrow{z_0})$;
- d'une noix en liaison rotule en B avec le bras moteur 1 ;
- d'un croisillon en liaison pivot glissant suivant l'axe $(B, \overrightarrow{y_3})$;
- d'un arbre de lice 4 en liaison pivot suivant l'axe $(C, \overrightarrow{x_4})$avec le croisillon 3 et en liaison pivot suivant l'axe $(D, \overrightarrow{y_0})$avec le bâti 0.

Le paramètre d'entrée est le paramètre α tel que $\alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) + (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1})$ et le paramètre de sortie est le paramètre β tel que $\beta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_4}) + (\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_4})$.

La particularité angulaire de ce système est que le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est toujours orthogonal avec la direction $\overrightarrow{x_4}$. Par conséquent le produit scalaire des 2 vecteurs d'orientation $\overrightarrow{y_3}.\overrightarrow{x_4} = 0$

$$\overrightarrow{y_3} = \frac{\sqrt{2}}{2}.(\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{z_1})$$

et $\overrightarrow{x_4} = -\sin\beta.\overrightarrow{z_0} + \cos\beta.\overrightarrow{x_0}$



$$\overrightarrow{y_3}.\overrightarrow{x_4} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}.(\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{z_1}).(-\sin\beta.\overrightarrow{z_0} + \cos\beta.\overrightarrow{x_0}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\sin\beta\,\overrightarrow{z_0}.\overrightarrow{y_1} - \sin\beta\,\overrightarrow{z_0}.\overrightarrow{z_1} + \cos\beta\,\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{y_1} + \cos\beta\,\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{z_1} = 0 \Leftrightarrow -\sin\beta - \cos\beta.\sin\alpha = 0$$

Soit la loi entrée-sortie : $\boxed{\sin\alpha = -\tan\beta}$

3.4. Calcul d'une loi entrée-sortie à partir d'une condition de non glissement (voir C8 et TD8)

La loi entrée sortie dans le cas de chaînes fermées peut parfois se faire en tenant compte de la condition de non glissement au point de contact entre deux solides du mécanisme.

Par exemple : la mise en équation à partir de la condition de non glissement ($\overrightarrow{V(I \in 2/1)} = \vec{0}$ si roulement sans glissement (C8 et TD8).