C8 – Cinématique du contact - roulement sans glissement Liaisons équivalentes

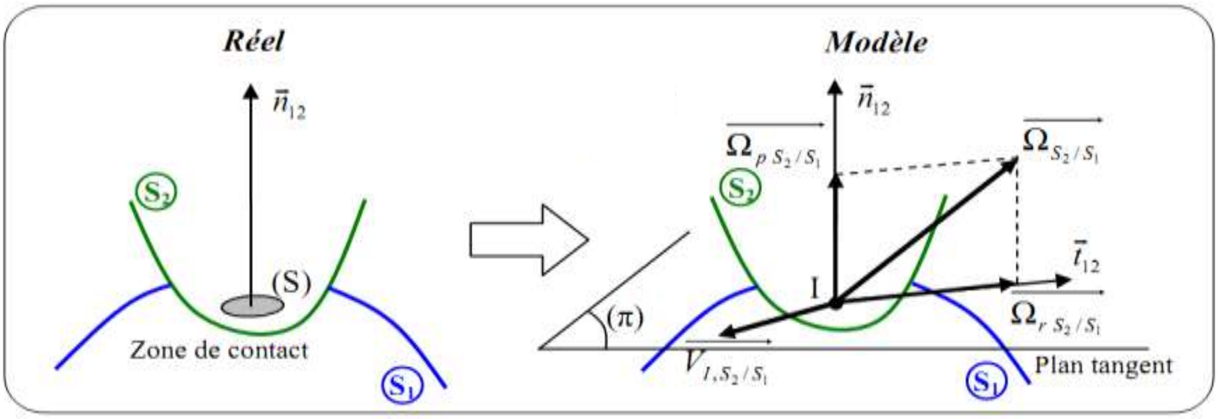
Compétences :

Notion de **point géométrique** de contact
Définition de la **vitesse de glissement** au contact
Définition des **vitesses de rotation de roulement et de rotation de pivotement** au contact
Méthode de calcul de la vitesse de glissement
Définition de la **condition de non glissement**
Méthode de calculs du **torseur équivalent de n liaisons en série**
Méthode de calculs du **torseur équivalent de n liaisons en parallèle**

1. CINÉMATIQUE DU CONTACT PONCTUEL – ROULEMENT SANS GLISSEMENT

1.1. Hypothèses et modèle

On considère deux solides S_1 et S_2 en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$. Par ailleurs, le solide S_2 est en mouvement relatif et en contact ponctuel par rapport à un solide S_1. Pour construire le modèle, on part du repère local associé à la géométrie du contact (surface infiniment petite). On définit au point de contact I, une normale au contact $\overrightarrow{n_{12}}$ et un plan tangent au contact (π) entre les deux solides (S_1 est en dessous de (π), S_2 est



au-dessus de (π)).

Le mouvement relatif de S_2 par rapport à S_1 peut être caractérisé cinématiquement par le torseur $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$ exprimé au point de contact I :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} \\ \overrightarrow{V(I \in S_2/S_1)} \end{Bmatrix}$$

Au cours du mouvement relatif de S_2 par rapport à S_1, on suppose qu'il existe toujours un point de contact (hyp du C6 : il n'y a pas rupture du contact dans une liaison : bilatéralité).

1.2. Mise en évidence du point géométrique de contact

La définition du point I sur le modèle recouvre en fait, du point de vue cinématique, l'existence de 3 points particuliers :

- Le point I matériel appartenant au solide 1 : sa vitesse est notée $\overrightarrow{V(I\in S_1/\mathcal{R})}$.
- Le point I matériel appartenant au solide 2 : sa vitesse est notée $\overrightarrow{V(I\in S_2/\mathcal{R})}$.
- Le point I qui correspond au point géométrique de contact : sa vitesse est notée $\overrightarrow{V(I/\mathcal{R})}$.

Les deux premiers points ont une existence matérielle (appartiennent à des solides) et coïncident à l'instant du contact avec le 3ème. Les 3 points sont confondus à l'instant t et ne le sont plus à l'instant $t+\Delta t$. Par conséquent :

$$\overrightarrow{V(I\in S_2/\mathcal{R})} \neq \overrightarrow{V(I/\mathcal{R})} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{V(I\in S_1/\mathcal{R})} \neq \overrightarrow{V(I/\mathcal{R})}$$

1.3. Définitions et méthode de calcul

Vitesse de glissement :

Le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(I\in S_2/S_1)}$ s'appelle vecteur vitesse de glissement en I de S_2/S_1

Puisque l'on suppose qu'il n'y a pas de rupture de contact entre les 2 solides et que ce sont des solides indéformables (ils ne peuvent pas s'interpénétrer), le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(I\in S_2/S_1)}$ est nécessairement contenu dans le plan (π).

Méthode obligatoire de calcul de la vitesse de glissement :

- on écrit une composition de vitesse $\overrightarrow{V(I\in S_2/S_1)} = \overrightarrow{V(I\in S_2/S_0)} - \overrightarrow{V(I\in S_1/S_0)}$;
- on calcule $\overrightarrow{V(I\in S_2/S_0)}$ *et* $\overrightarrow{V(I\in S_1/S_0)}$ par Varignon ou par dérivation s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le point I (point lié et non coïncident) ;
- on additionne.

Condition de roulement sans glissement (ou de non glissement) :

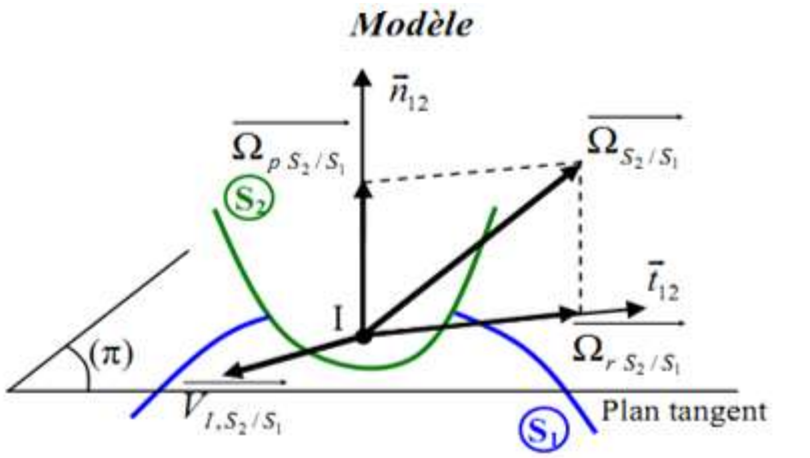
La condition de roulement sans glissement en I de S_2/S_1 s'écrit $\overrightarrow{V(I\in S_2/S_1)} = \vec{0}$. Cette relation est utile pour de très nombreux mécanismes, par exemple lorsqu'il y a adhérence entre deux surfaces.

Vitesse de rotation de roulement et vitesse de rotation de pivotement :

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}$ étant donné, on peut le décomposer en la somme de deux vecteurs :

- Le vecteur normal au plan (π) est le **vecteur vitesse de rotation de pivotement** de S_2/S_1. On le note $\overrightarrow{\Omega_\mathrm{p}(S_2/S_1)}$
- Le vecteur contenu dans le plan (π) est le **vecteur vitesse de rotation de roulement** de S_2/S_1. On le note $\overrightarrow{\Omega_\mathrm{r}(S_2/S_1)}$.

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \underbrace{\overrightarrow{\Omega_\mathrm{p}(S_2/S_1)}}_{pivotement} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega_\mathrm{r}(S_2/S_1)}}_{roulement}$$



Méthode de calculs, dans le cas de la figure :

$$\overrightarrow{\Omega_p(S_2/S_1)} = \left(\underbrace{\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}.\overrightarrow{n_{12}}}_{\substack{produit\\ scalaire}}\right).\overrightarrow{n_{12}}$$

et

$$\overrightarrow{\Omega_r(S_2/S_1)} = \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} - \overrightarrow{\Omega_p(S_2/S_1)}$$

porté par $\overrightarrow{t_{12}}$ qui pourrait se calculer ainsi, $\overrightarrow{t_{12}} = \frac{\overrightarrow{\Omega_r(S_2/S_1)}}{\|\overrightarrow{\Omega_r(S_2/S_1)}\|}$

2. LIAISONS ÉQUIVALENTES.

2.1. Liaison équivalente à n liaisons en série.

2.1.1. Définition.

Soit $(n+1)$ solides en liaisons séries suivant la chaîne suivante :

$$0 \overset{L_{10}}{—} 1 \overset{L_{21}}{—} 2 \overset{L_{n/n-1}}{\cdots} n$$

La liaison équivalente aux n liaisons est la liaison qui autorise le même mouvement relatif du solide n par rapport au solide 0.

Torseur équivalent

Le torseur cinématique équivalent, en un point quelconque, à **n liaisons en séries** est égal à la somme des torseurs cinématiques des n liaisons exprimées en ce même point :

$$\boxed{\{\mathcal{V}_{eq}\} = \{\mathcal{V}(S_n/S_0)\} = \sum_{i=1}^{n}\{\mathcal{V}(S_i/S_{i-1})\}}$$

C’est une composition de vitesses. Tous les torseurs seront à exprimer au même point.

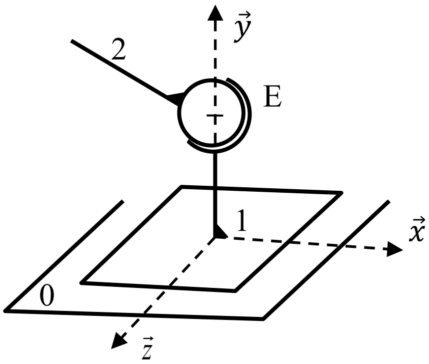
2.1.2. Applications.

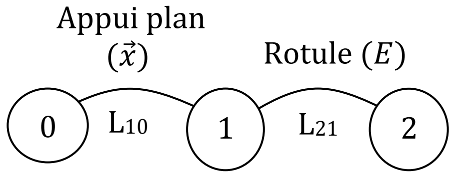
Objet :

Remplacer des liaisons à géométrie de contact ponctuelle ou linéaire par des assemblages de liaisons simples à contact surfacique. L’intérêt étant de transmettre des actions mécaniques plus importantes.

- Liaisons simples à contact ponctuel / linéique : Sphère – plan, cylindre – plan, Sphère – cylindre.
- Liaisons simples à contact surfacique : Appui plan, sphérique, pivot glissant.

Exemple 1 : Réalisation d'une liaison Sphère – plan (ou ponctuelle).



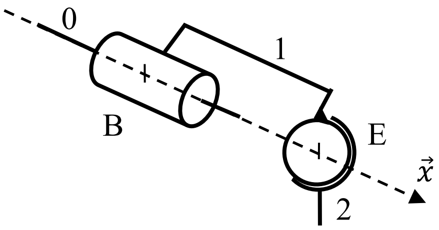


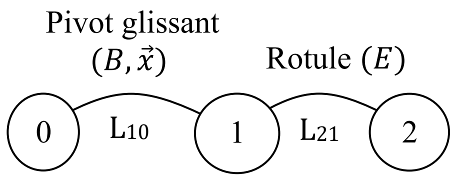
Ici, il est plus simple de tout écrire au point E :

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \{\mathcal{V}(2/0)\} = {}_E\begin{Bmatrix} \omega_{x20} & V_{x20} \\ \omega_{y20} & V_{y20} \\ \omega_{z20} & V_{z20} \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} = \underbrace{{}_E\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & 0 \\ \omega_{y21} & 0 \\ \omega_{z21} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}}_{\text{rotule}} + \underbrace{{}_E\begin{Bmatrix} 0 & V_{x10} \\ \omega_{y10} & 0 \\ 0 & V_{z10} \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}}_{\text{appui plan}} = {}_E\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & V_{x10} \\ \omega_{y21} + \omega_{y10} & 0 \\ \omega_{z21} & V_{z10} \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

On obtient le torseur cinématique d'une liaison ponctuelle (5 ddl) …

Exemple 2 : Réalisation d'une liaison Sphère – Cylindre (ou linéaire annulaire)



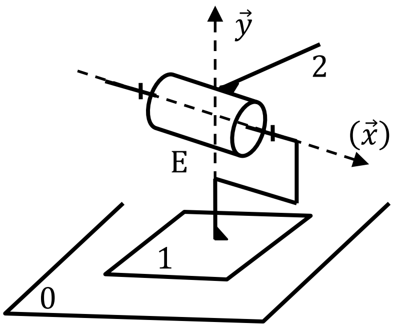


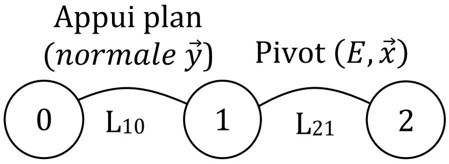
Ici, il est plus simple de tout écrire au point :

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \{\mathcal{V}(2/0)\} = {}_E\begin{Bmatrix} \omega_{x20} & V_{x20} \\ \omega_{y20} & V_{y20} \\ \omega_{z20} & V_{z20} \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} = \underbrace{{}_E\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & 0 \\ \omega_{y21} & 0 \\ \omega_{z21} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}}_{\text{rotule}} + \underbrace{{}_E\begin{Bmatrix} \omega_{x10} & V_{x10} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}}_{\text{pivot glissant}} = {}_E\begin{Bmatrix} \omega_{x21} + \omega_{x10} & V_{x10} \\ \omega_{y21} & 0 \\ \omega_{z21} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

On obtient le torseur cinématique d'une liaison linéaire annulaire (4 ddl).

Exemple 3 : Réalisation d'une liaison Cylindre – plan (ou linéaire rectiligne)





$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \{\mathcal{V}(2/0)\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x20} & V_{x20} \\ \omega_{y20} & V_{y20} \\ \omega_{z20} & V_{z20} \end{Bmatrix}_{E\ \mathcal{B}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 & V_{x10} \\ \omega_{y10} & 0 \\ 0 & V_{z10} \end{Bmatrix}_E}_{\text{appui plan}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_E}_{\text{pivot}} = \begin{Bmatrix} \omega_{x21} & V_{x10} \\ \omega_{y10} & 0 \\ 0 & V_{z10} \end{Bmatrix}_E$$

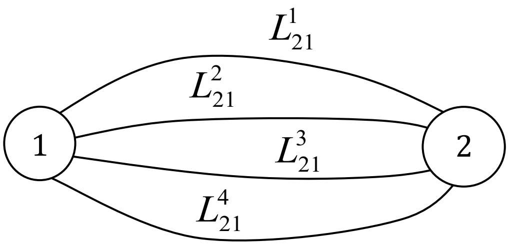
On obtient le torseur cinématique d'une liaison cylindre plan ou linéaire rectiligne.

2.2. Liaison équivalente de n liaisons en parallèle

2.2.1. Définition.

Deux solides sont en liaisons parallèles s'ils sont reliés suivant la chaîne cinématique ci-contre.

La liaison équivalente aux n liaisons associées en parallèles est la liaison qui est compatible avec les n liaisons L_{21}^i.



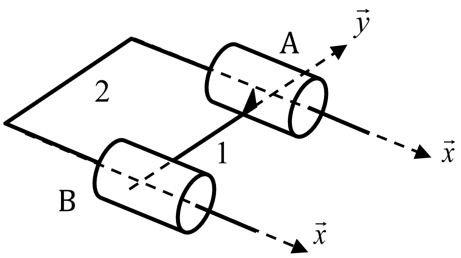
Torseur équivalent.

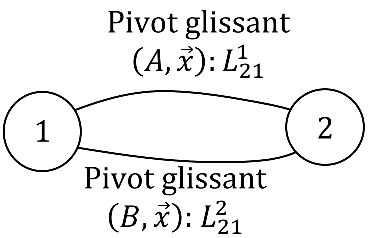
Le torseur cinématique équivalent, en un point A, à **n liaisons en parallèles** est égal à chaque torseur cinématique des n liaisons exprimées au même point A.

$$\boxed{\forall i \in [1,n], \quad \{\mathcal{V}_{eq}\} = \{\mathcal{V}^i(S_2/S_1)\}_A}$$

2.2.2. Applications.

Exemple 1 : réalisation d'une liaison glissière de direction $\vec{x}$.





avec $\overrightarrow{AB} = -a.\vec{y}$.

Et pour le pivot glissant L² d'axe $(B,\vec{x})$, $\overrightarrow{V(A \in 2/1)} = \overrightarrow{V(B \in S_2/S_1)} + \overrightarrow{AB}_\wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}$

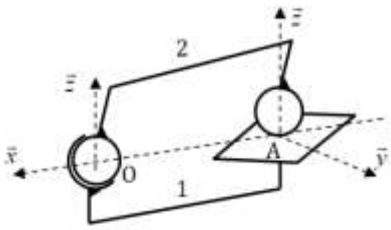
$$= V_{2x21}.\vec{x} + a.\omega_{2x21}.\vec{z}$$

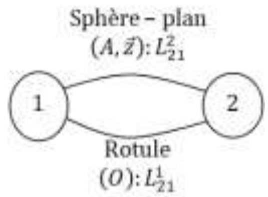
$$\{V_{eq}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x21} & V_{x21} \\ \omega_{y21} & V_{y21} \\ \omega_{z21} & V_{z21} \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{B}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \omega_{1x21} & V_{1x21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{B}}}_{\text{pivot glissant 1}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \omega_{2x21} & V_{2x21} \\ 0 & 0 \\ 0 & a.\omega_{2x21} \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{B}}}_{\text{pivot glissant 2}} = \begin{Bmatrix} 0 & V_{x21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{B}}$$

Equations :

Exemple 2 : réalisation d'une liaison sphérique à doigt.

avec $\overrightarrow{OA} = -b.\vec{x}$





Calculs :

$$\{V_{eq}\}_E = \begin{Bmatrix} \omega_{x21} & V_{x21} \\ \omega_{y21} & V_{y21} \\ \omega_{z21} & V_{z21} \end{Bmatrix}_{O,\mathcal{B}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \omega_{1x21} & 0 \\ \omega_{1y21} & 0 \\ \omega_{1z21} & 0 \end{Bmatrix}_{O,\mathcal{B}}}_{\text{rotule}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \omega_{2x21} & V_{2x21} \\ \omega_{2y21} & b.\omega_{2z21} + V_{2y21} \\ \omega_{2z21} & -b.\omega_{2y21} \end{Bmatrix}_{O,\mathcal{B}}}_{\text{sphère} - \text{plan}} = \begin{Bmatrix} \omega_{x21} & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z21} & 0 \end{Bmatrix}_{O,\mathcal{B}}$$

Conclusion sur les paramètres :

On obtient le torseur cinématique d'une liaison sphérique à doigt.

3. CONTACT ROUES/SOL D'UN SEGWAY : PILOTAGE DES MOTEURS LORS D'UN VIRAGE DE RAYON R

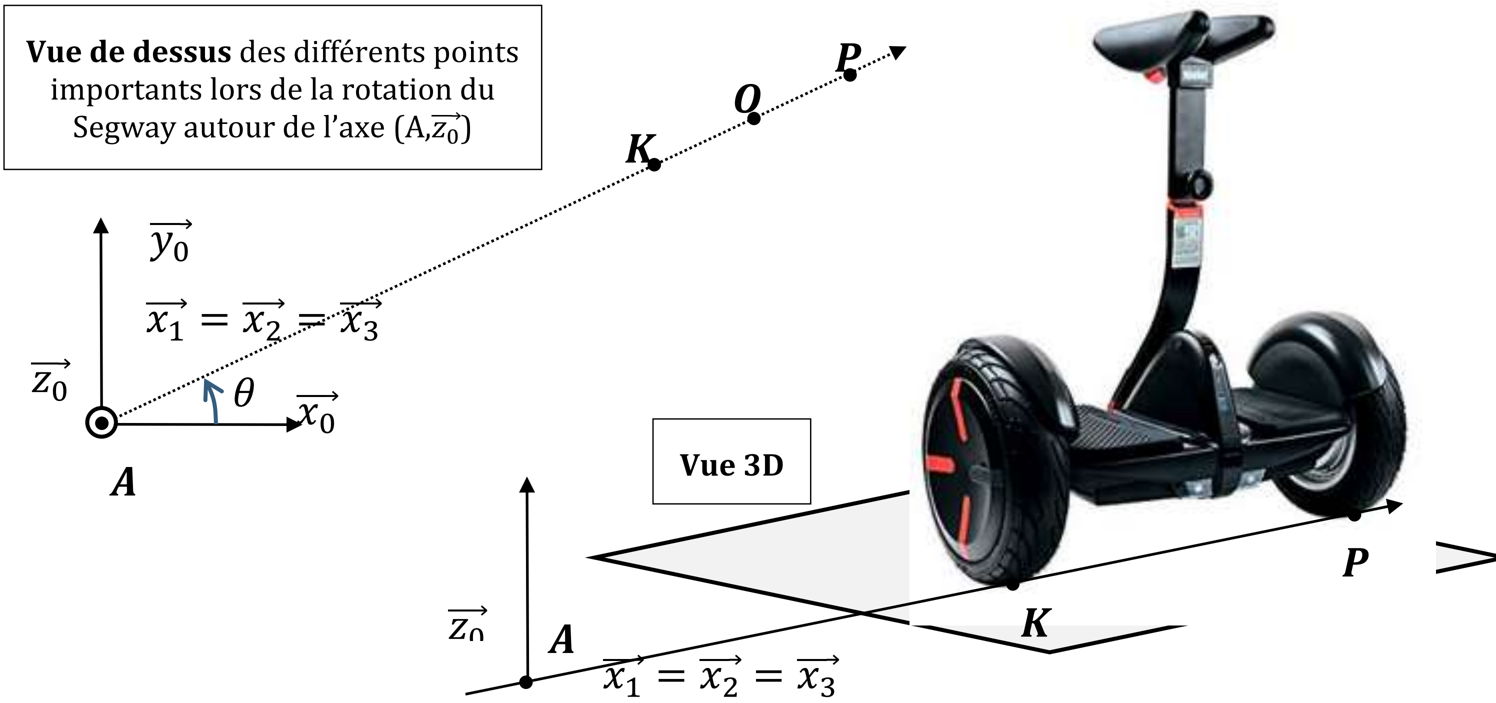
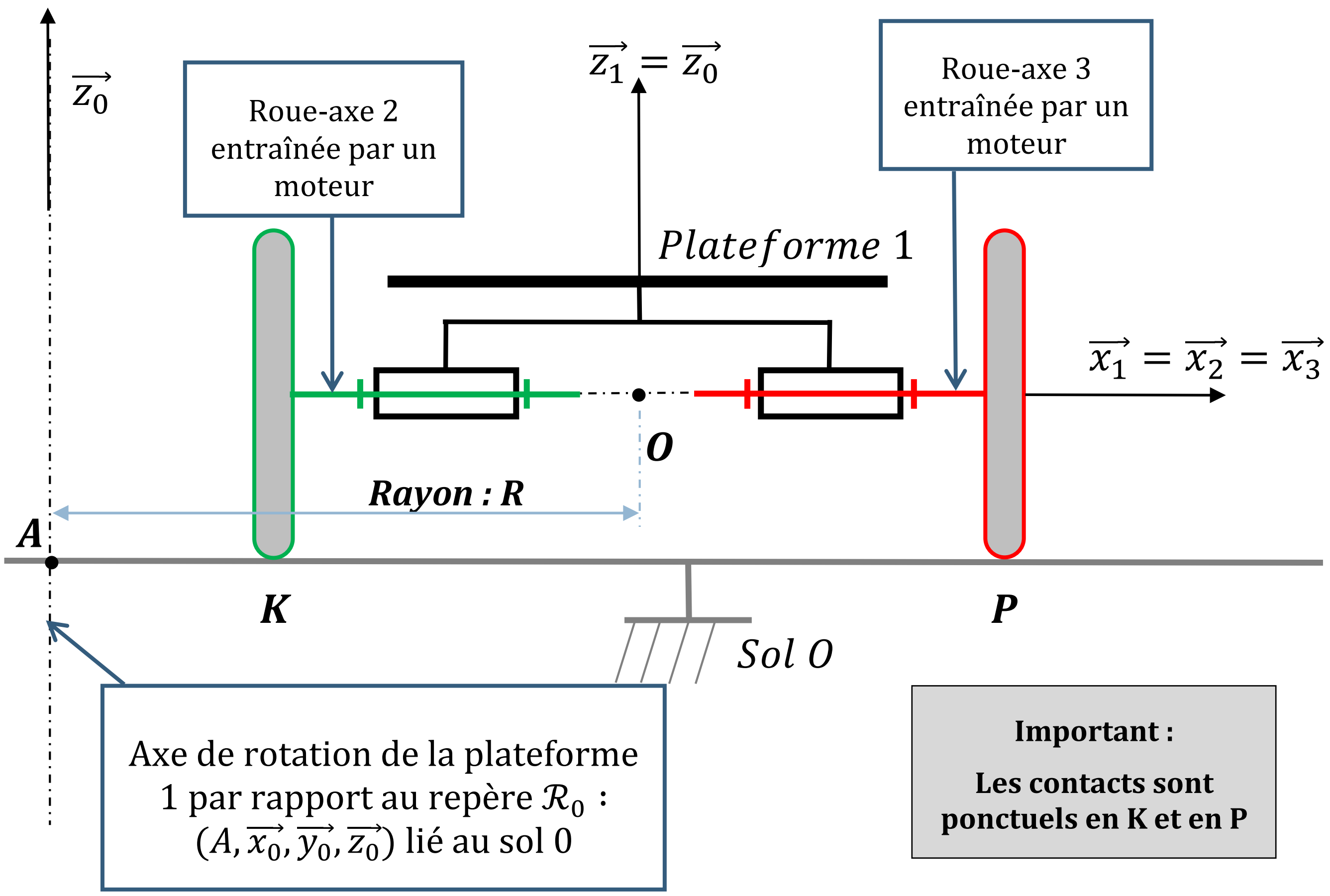


Schéma cinématique (**Vue de côté**) du Segway



(les distances entre les points ne sont pas respectées sur les schémas)

$\overrightarrow{AO} = \boldsymbol{R}.\vec{x}_1 + h.\vec{z}_0$ $\overrightarrow{KO} = a.\vec{x}_1 + h.\vec{z}_0$ $\overrightarrow{OP} = a.\vec{x}_1 - h.\vec{z}_0$	Rotation de la plateforme 1 par rapport au sol 0 autour de l'axe $(A,\overrightarrow{z_0})$: $\theta = (\vec{x}_0;\vec{x}_1) = (\vec{y}_0;\vec{y}_1)$ **On considèrera qu'il y a une liaison pivot d'axe $(A,\overrightarrow{z_0})$ rentre 1 et 0.**	Rotation des roues par rapport à la plateforme 1 autour de l'axe $(O,\overrightarrow{x_1})$: $\alpha_2 = (\vec{z}_1;\vec{z}_2) = (\vec{y}_1;\vec{y}_2)$ $\alpha_3 = (\vec{z}_1;\vec{z}_3) = (\vec{y}_1;\vec{y}_3)$

Q0. Construire le graphe de liaisons et les figures planes.

Q1. Ecrire les 5 torseurs cinématiques des liaisons de ce mécanisme (les paramètres non définis seront notés $\boldsymbol{\omega_{xij}}$, … , $\boldsymbol{V_{xij}}$, …).

*Le graphe de liaisons présente deux **chaînes fermées**.*

Q2. Ecrire deux fermetures cinématiques indépendantes sur les vecteurs rotations et en déduire toutes les inconnues cinématiques de rotation $\boldsymbol{\omega_{xij}}$, … en fonction de $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{2}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{3}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}$.

Q3. Préciser les vecteurs rotations de roulement et pivotement de 3/0 et de 2/0.

Q4. Ecrire la condition de non glissement de 2/0 en K. Montrer que $\boldsymbol{V_{x20} = V_{y20} = 0}$ et trouver la fonction $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{f}(\dot{\boldsymbol{\theta}})$.

Q5. Ecrire la condition de non glissement de 3/0 en P. Montrer que $\boldsymbol{V_{x30} = V_{y30} = 0}$ et trouver la fonction $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{3}} = \boldsymbol{g}(\dot{\boldsymbol{\theta}})$.

*Q6. En déduire, finalement, la relation entre $\boldsymbol{a}$ et les vitesses de rotations des moteurs $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{3}}$ **et** $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{2}}$ pour que le Segway prenne un virage de rayon $\boldsymbol{R}$.*