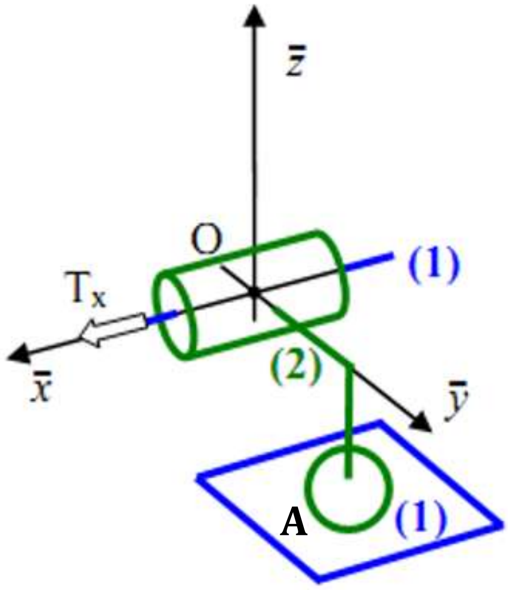
TD8 : Liaison équivalente - Optimisation de l'adhérence par le contrôle du glissement

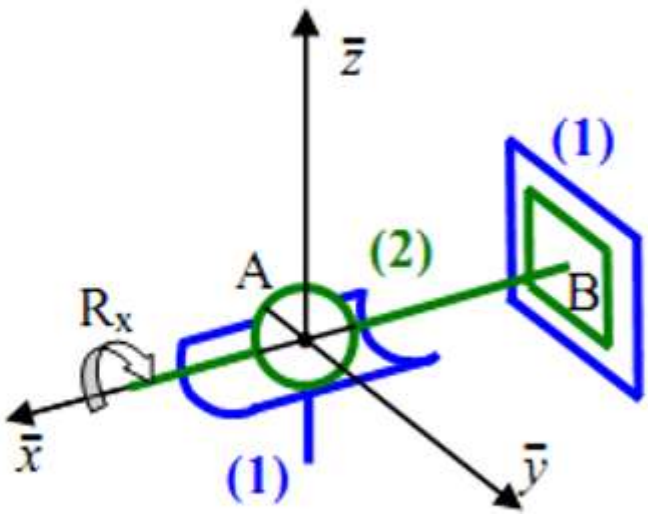
CORRIGÉ - CORRIGÉ- CORRIGÉ

1. Liaisons équivalentes

Pour les deux assemblages suivants, déterminer la liaison cinématique équivalente.

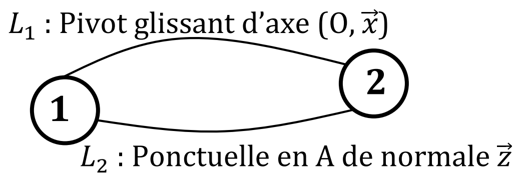


$\overrightarrow{OA} = a.\vec{y} - b.\vec{z}$



$\overrightarrow{BA} = a.\vec{x}$

Graphe de liaisons :



$$\{\mathcal{V}_{L_1}(2/1)\}: \left\{\begin{matrix} \omega_{1x} & V_{1x} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{O\,R} \; ; \; \{\mathcal{V}_{L_2}(2/1)\}: \left\{\begin{matrix} \omega_{2x} & V_{2x} \\ \omega_{2y} & V_{2y} \\ \omega_{2z} & 0 \end{matrix}\right\}_{A\,R}$$

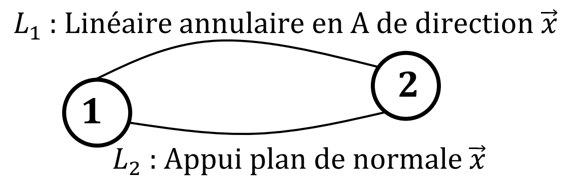
Torseur équivalent : ~~Série~~ ou **Parallèle**

$\{\mathcal{V}_{eq}(2/1)\} = \{\mathcal{V}_{L_1}(2/1)\} = \{\mathcal{V}_{L_2}(2/1)\}$ à calculer au même point (choix de A).

On a pour L_1 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{L_1}(A \in 2/1)} &= \overrightarrow{V_{L_1}(O \in 2/1)} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{L_1\,;\,2/1}} \\ &= V_{1x}.\vec{x} + (-a.\vec{y} + b.\vec{z}) \wedge (\omega_{1x}.\vec{x}) \\ &= V_{1x}.\vec{x} + b.\omega_{1x}.\vec{y} + a.\omega_{1x}.\vec{z}\end{aligned}$$

Graphe de liaisons :



$$\{\mathcal{V}_{L_1}(2/1)\}: \left\{\begin{matrix} \omega_{1x} & V_{1x} \\ \omega_{1y} & 0 \\ \omega_{1z} & 0 \end{matrix}\right\}_{A\,R} \; ; \; \{\mathcal{V}_{L_2}(2/1)\}: \left\{\begin{matrix} \omega_{2x} & 0 \\ 0 & V_{2y} \\ 0 & V_{2z} \end{matrix}\right\}_{A\,R}$$

Torseur équivalent : ~~Série~~ ou **Parallèle**

$\{\mathcal{V}_{eq}(2/1)\} = \{\mathcal{V}_{L_1}(2/1)\} = \{\mathcal{V}_{L_2}(2/1)\}$ à calculer au même point (c'est déjà le cas).

d'où les équations scalaires :

$$\begin{cases} \omega_{1y} = 0 \; ; \; \omega_{1z} = 0 \\ V_{1x} = 0 \; ; V_{2y} = 0 \; ; \; V_{2z} = 0 \\ \omega_{1x} = \omega_{2x} \end{cases}$$

$$\{\mathcal{V}_{eq}(2/1)\} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \omega_{1x} & V_{x1} \\ 0 & b.\omega_{1x} \\ 0 & a.\omega_{1x} \end{Bmatrix}}_R = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \omega_{2x} & V_{2x} \\ \omega_{2y} & V_{2y} \\ \omega_{2z} & 0 \end{Bmatrix}}_R$$

d'où les équations scalaires : $\begin{cases} \omega_{2y} = 0 \ ; \ \omega_{2z} = 0 \\ \omega_{1x} = \omega_{2x} \ ; a.\omega_{1x} = 0 \\ b.\omega_{1x} = V_{2y} \end{cases}$

On en déduit $\begin{cases} \omega_{1x} = \omega_{2x} = \omega_{2y} = \omega_{2z} = V_{2z} = 0 \\ V_{x1} = V_{2x} \end{cases}$

Finalement,

$$\{\mathcal{V}_{eq}(2/1)\} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_R$$

Ce qui est équivalent au torseur cinématique d'une glissière de direction $\vec{x}$.

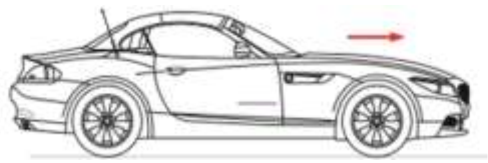
Finalement,

$$\{\mathcal{V}_{eq}(2/1)\} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_R$$

Ce qui est équivalent au torseur cinématique d'une liaison pivot d'axe (A, $\vec{x}$).

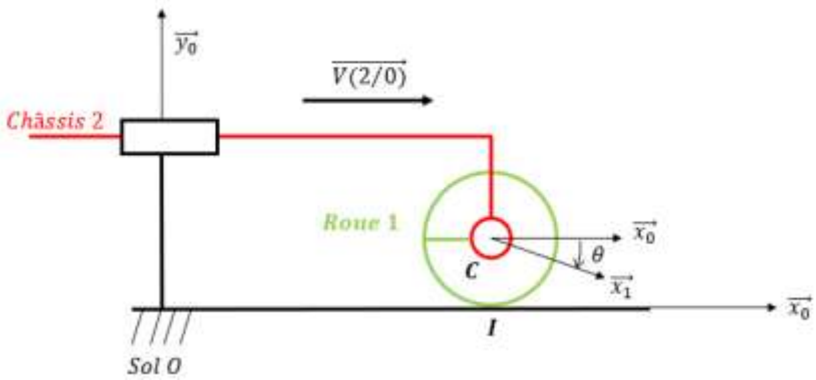
2. Optimisation de l'adhérence par le contrôle du glissement pneumatique /sol

Le contact pneumatique / sol est le lieu des actions mécaniques permettant d'assurer les fonctions : accélérer, freiner et diriger un véhicule.



Lorsque les roues patinent (burn) ou sont bloquées (freinage sévère), aucune de ces fonctions n'est optimisée.

Le système est modélisé par le schéma cinématique suivant (on a une ponctuelle en I de normale $\overrightarrow{y_0}$) :



On définit le **glissement** relatif entre le pneumatique et le sol par $g = \frac{\overrightarrow{V(I\in 1/0)}.\overrightarrow{x_0}}{\overrightarrow{V(2/0)}.\overrightarrow{x_0}}$.

Le fonctionnement optimal en freinage et en accélération est obtenu respectivement pour *g = g_c = +25%* et *g = - g_c*.

Le rayon de la roue est $CI = R$.

La vitesse de translation du châssis est, quel que soit M, $\overrightarrow{V(M \in 2/0)} = \overrightarrow{V(2/0)} = V.\overrightarrow{x_0}$.

La vitesse de rotation de la roue/châssis est $\overrightarrow{\Omega(1/2)} = \omega_{z12}.\overrightarrow{z_0} = \dot{\theta}.\overrightarrow{z_0}$.

Cinématique

Q2.1. Ecrire les torseurs cinématiques des 3 liaisons de ce modèle (les paramètres non définis dans l'énoncé seront notés de façon cohérente).

<table>
<tr>
<td>Glissière de direction $\overrightarrow{x_0}$ (1 ddl) :
$\{\mathcal{V}(2/0)\} : \underset{B}{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V(B \in 2/0)} = V.\overrightarrow{x_0} \end{Bmatrix}}$
(Valable en tous points de l'espace)</td>
<td>Pivot d'axe $(C, \overrightarrow{z_0})$ (1 ddl) :
$\{\mathcal{V}(1/2)\} : \underset{C}{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/2}} = \dot{\theta}.\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(C \in 1/2)} = \vec{0} \end{Bmatrix}}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Ponctuelle en I de normale $\overrightarrow{y_0}$ (5 ddl) :
$\{\mathcal{V}(1/0)\} : \underset{I}{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \omega_{x10}.\overrightarrow{x_0} + \omega_{y10}.\overrightarrow{y_0} + \omega_{z10}.\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(I \in 1/0)} = V_{x10}.\overrightarrow{x_0} + V_{z10}.\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}}$</td>
</tr>
</table>

Q2.2. Ecrire une fermeture cinématique et déterminer tous les paramètres (V et $\dot{\theta}$ sont connus).

On a, par exemple, $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \{\mathcal{V}(1/2)\} + \{\mathcal{V}(2/0)\}$

Qu'il faudra calculer au même point pour les additionner (choix du point C).

On aura donc 2 équations vectorielles :

1 $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \overrightarrow{\Omega_{1/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$

2 $\overrightarrow{V(C \in 1/0)} = \overrightarrow{V(C \in 1/2)} + \overrightarrow{V(C \in 2/0)}$

- L'équation 1 s'écrit, $\omega_{x10}.\overrightarrow{x_0} + \omega_{y10}.\overrightarrow{y_0} + \omega_{z10}.\overrightarrow{z_0} = \vec{0} + \dot{\theta}.\overrightarrow{z_0}$

  Et donne les 3 équations scalaires $\begin{cases} \omega_{x10} = 0 \\ \omega_{y10} = 0 \\ \omega_{z10} = \dot{\theta} \end{cases}$

- Pour l'équation 2 il faut, au préalable, calculer les vitesses en C :
  - $\overrightarrow{V(C \in 1/0)} = \overrightarrow{V(I \in 1/0)} + \overrightarrow{CI} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = V_{x10}.\overrightarrow{x_0} + V_{z10}.\overrightarrow{z_0} + (-R.\overrightarrow{y_0}) \wedge (\dot{\theta}.\overrightarrow{z_0}) = V_{z10}.\overrightarrow{z_0} + (V_{x10} - R.\dot{\theta}).\overrightarrow{x_0}$
  - $\overrightarrow{V(C \in 1/2)} = \vec{0}$
  - $\overrightarrow{V(C \in 2/0)} = \overrightarrow{V(B \in 2/0)} = V.\overrightarrow{x_0}$

  d'où, $V_{z10}.\overrightarrow{z_0} + (V_{x10} - R.\dot{\theta}).\overrightarrow{x_0} = V.\overrightarrow{x_0}$

  2 donne les 2 équations scalaires $\begin{cases} V_{z10} = 0 \\ V_{x10} = V + R.\dot{\theta} \end{cases}$

  On a donc $\overrightarrow{V(I \in 1/0)} = (V + R.\dot{\theta}).\overrightarrow{x_0}$

Contact

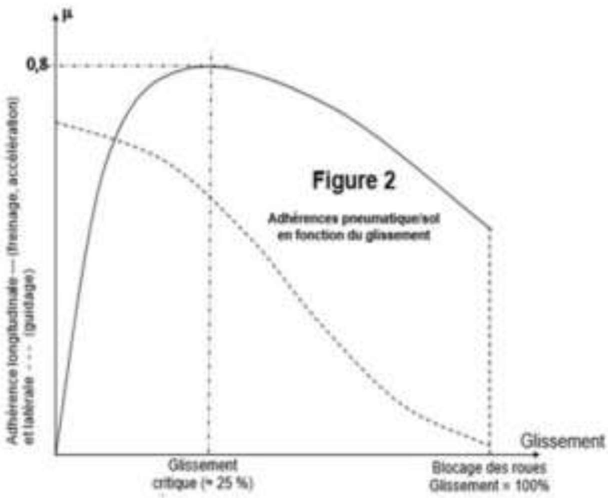
Q2.3. Que vaut g lorsqu'il y a non glissement en I ?

Par définition, dans le cas général,

$g = \frac{\overrightarrow{V(I\in 1/0)}.\overrightarrow{x_0}}{\overrightarrow{V(2/0)}.\overrightarrow{x_0}} = \frac{V+R.\dot{\theta}}{V}$.

Et lorsqu'il y a non-glissement en I, $g = 0$.

*Q2.4. Déterminer $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ en fonction de $\boldsymbol{g}$ **et** $\boldsymbol{V}$ et calculer $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_{rsg}$ correspondant au non glissement (R = 0,3 m et V = 90 km/h).*



D'après Q2.4, on obtient $\dot{\theta} = \frac{V}{R}.(g-1)$ *et* $\dot{\theta}_{rsg} = -\frac{V}{R}$*. Numériquement,* $\dot{\theta}_{rsg} = -\frac{25}{0,3} = -83\ rad/s.$

Q2.5. Calculer $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_{fo}$ pour un freinage optimal.

D'après Q2.4, on a $\dot{\theta}_{fo} = \frac{V}{R}.(g_c - 1)$ *et* $\dot{\theta}_{f0} = \frac{25}{0,3}.(0,25-1) = -62,5\ rad/s.$

Remarque : Le système automatisé ABS récupère les informations de vitesses et élabore une consigne de pression pour l'actionneur du dispositif de freinage afin de réguler $\overrightarrow{\Omega(1/2)}$. Le freinage individualisé (par roue) permet, par ailleurs, d'avoir accès à une autre fonction « émergente » : ESP contrôle de trajectoire. (Voir vidéo).

3. Scanner

La réalisation d'une glissière par fabrication d'un emboîtement prismatique (comme le tiroir d'un meuble) n'est pas aisé. Par ailleurs, les risque de coincement de ce « tiroir » a été expérimenté par chacun d'entre vous dans la vie courante. On lui préfère un assemblage de liaison formant une glissière équivalente (voir C8 et TD 8).

La réalisation de la glissière entre la table S1 du scanner et son socle fixe S0, utilise des rangées de billes selon les axes $(O_2;\vec{x})$ *et* $(O_3;\vec{x})$ qui roulent sans glisser dans des gorges en V. Vous avez des photos d'autres technologies possibles avec recyclage des billes.

Q3.1. Axes instantanés de rotations.

D'après l'énoncé, $\overrightarrow{V(A\in 2/0)} = \overrightarrow{V(B\in 2/0)} = \vec{0}$. La droite (A,B) constitue donc un axe instantané de rotation de 2/0.

De même, la droite (C,D) constitue un axe instantané de rotation de 2/1 et la droite (E,F) un axe instantané de rotation de 3/1.

Q3.2. Relations entre paramètres cinématiques

Il s'agit, comme toujours, de calculer des vitesses par des chemins différents en utilisant la composition, Varignon et **les données de l'énoncé** (**dont les schémas**).

$\overrightarrow{V(C\in 2/0)} = \overrightarrow{V(C\in 2/1)} + \overrightarrow{V(C\in 1/0)} = \vec{0} + v.\vec{x}$ car le mouvement de 1/0 est une translation,

$$\overrightarrow{V(C\in 2/0)} = v.\vec{x}$$

Par ailleurs, $\overrightarrow{V(E \in 3/0)} = \overrightarrow{V(E \in 3/1)} + \overrightarrow{V(E \in 1/0)} = \vec{0} + v.\vec{x}$, $\overrightarrow{V(E \in 3/0)} = v.\vec{x}$

On peut aussi écrire que $\overrightarrow{V(C \in 2/0)} = \overrightarrow{V(A \in 2/0)} + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} = \vec{0} - R.\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}.\vec{z} + \underbrace{Y}_{\substack{sans\\ intérêt}}.\vec{y}\right) \wedge \omega_{20}.\vec{y}$,

$$\overrightarrow{V(C \in 2/0)} = R.\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}.\omega_{20}.\vec{x}$$

De même, on trouve

$$\overrightarrow{V(E \in 3/0)} = r.(1+\sin(\alpha)).\omega_{30}.\vec{x}$$

On en déduit les relations cinématiques :

$$\boldsymbol{v = R.\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}.\omega_{20}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v = r.(1+\sin(\alpha)).\omega_{30}}$$

Q3.3. Torseurs cinématiques

On a donc : $\{\mathcal{V}(2/0)\} : \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \frac{2.v}{R.(\sqrt{2}+\sqrt{3})}.\vec{y} \\ \overrightarrow{V(A \in 2/0)} = \vec{0} \end{matrix}\right\}_A$ et $\{\mathcal{V}(3/0)\} : \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \frac{v}{r.(1+\sin(\alpha))}.\vec{y} \\ \overrightarrow{V(E \in 3/0)} = \vec{0} \end{matrix}\right\}_E$

Q3.4. Vecteurs rotations en G et B

En G, la normale au contact de 3/0 est $\vec{z}$, or $\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \frac{v}{r.(1+\sin(\alpha))}.\vec{y}$.

Par définition (C8), le vecteur pivotement $\overrightarrow{\Omega_{3/0\,p}} = (\overrightarrow{\Omega_{3/0}}.\vec{z}).\vec{z}$ donc $\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega_{3/0\,p}} = \vec{0}}$

On en déduit immédiatement, comme $\overrightarrow{\Omega_{3/0\,r}} = \overrightarrow{\Omega_{3/0}} - \overrightarrow{\Omega_{3/0\,p}}$, que le vecteur roulement $\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega_{3/0\,r}} = \frac{v}{r.(1+\sin(\alpha))}.\vec{y}}$**.**

En B, la normale au contact de 2/0 est $\vec{n} = (-\frac{1}{2}.\vec{y} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\vec{z})$, or $\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \frac{2.v}{R.(\sqrt{2}+\sqrt{3})}.\vec{y}$.

Le vecteur pivotement $\overrightarrow{\Omega_{2/0\,p}} = (\overrightarrow{\Omega_{2/0}}.\vec{n}).\vec{n}$ donc $\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega_{2/0\,p}} = -\frac{v}{R.(\sqrt{2}+\sqrt{3})}.(-\frac{1}{2}.\vec{y} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\vec{z})}$

Et, $\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega_{2/0\,r}} = \frac{v}{R.(\sqrt{2}+\sqrt{3})}.(\frac{3}{2}.\vec{y} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\vec{z})}$

Q3.5. Vitesses des centres de billes

Pour O_2, on a $\overrightarrow{V(O_2 \in 2/0)} = \overrightarrow{V(A \in 2/0)} + \overrightarrow{O_2A} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} = -R.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\vec{z} + \underbrace{Y}_{\substack{sans\\ intérêt}}.\vec{y}\right) \wedge \omega_{20}.\vec{y}$

$$\overrightarrow{V(O_2 \in 2/0)} = R.\frac{\sqrt{3}}{2}.\omega_{20}.\vec{x} = \frac{\sqrt{3}.v}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}.\vec{x}$$

Pour O_3, on a $\overrightarrow{V(O_3 \in 3/0)} = \overrightarrow{V(G \in 3/0)} + \overrightarrow{O_3G} \wedge \vec{\Omega}_{3/0} = -r.\vec{z} \wedge \omega_{30}.\vec{y}$

$$\overrightarrow{V(O_3 \in 3/0)} = \frac{v}{(1+\sin(\alpha))}.\vec{x}$$

Q3.6. Détermination de α

L'égalité des vitesses précédentes impose $\frac{\sqrt{3}.v}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{v}{(1+\sin(\alpha))}$

Autrement dit, $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ et finalement $\boldsymbol{\alpha = 54,74}$ °