



C10 – Premier ordre

Identification et calcul de K et τ

1. DÉFINITION ET CONSTANTES CARACTÉRISTIQUES	1
2. MÉTHODOLOGIES D'IDENTIFICATION D'UN PREMIER ORDRE	2
3. IDENTIFICATION D'UN 1 ^{ER} ORDRE À PARTIR DE MESURES.....	2
3.1. REPONSE IMPULSIONNELLE (ENTREE-TEST IMPULSION DE DIRAC)	2
3.2. REPONSE INDICIELLE (ENTREE-TEST INDICIELLE (ECHELON)) : LA PLUS FREQUENTE.....	3
3.3. REPONSE A UNE RAMPE (ENTREE-TEST RAMPE)	5
3.4. PRECAUTIONS.....	6
4. IDENTIFICATION D'UN 1 ^{ER} ORDRE À PARTIR D'UN MODÈLE DE CONNAISSANCE (VOIR TP 1 SÉRIE 1)	6
5. DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES (RACINES RÉELLES).....	8
5.1. METHODES DE DECOMPOSITION POUR DES RACINES REELLES.....	8
5.2. TRANSFORMEE DE LAPLACE INVERSE	8
6. APPLICATIONS	9
6.1. APPLICATION 1 : SEGWAY.....	9
6.2. APPLICATION 2 : CAPTEUR ABS.....	9
6.3. APPLICATION 3 : CONTROLE D'UNE REMORQUE FRIGORIFIQUE	10
6.4. APPLICATION 4 : DECOMPOSER EN ELEMENTS SIMPLES ET DONNER S(T)	12

Compétences attendues

Savoir **identifier un système du 1^{er} ordre à partir d'une mesure** à une entrée-test ou d'une modélisation.

Connaître les **techniques de détermination des constantes caractéristiques K et τ** pour les différentes entrées-test.

Connaître les **techniques de décomposition en éléments simples** et leurs transformées de Laplace.

1. DÉFINITION ET CONSTANTES CARACTÉRISTIQUES



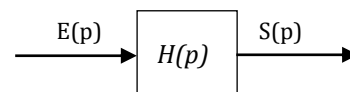
Un système physique d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est du 1^{er} ordre, s'il est régi par une équation différentielle du 1^{er} ordre à coefficients constants. On l'écrit alors sous la forme canonique :

$$\tau \cdot \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = K \cdot e(t) \quad \rightarrow (\tau \cdot p + 1) \cdot S(p) = K \cdot E(p) \text{ en Laplace}$$

avec : $\begin{cases} K \text{ le gain statique du système [unité de sortie]/[unité d'entrée]} \\ \tau \text{ est la constante de temps [temps].} \end{cases}$

Dans les conditions de Heaviside, la fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$



2. MÉTHODOLOGIES D'IDENTIFICATION D'UN PREMIER ORDRE

Cette fonction est obtenue soit :

- à partir de la **mesure** de $s(t)$ à une **entrée-test $e(t)$ d'amplitude A_0 donnée**. On parle alors de **modèle de comportement**. Le composant se comporte alors comme s'il s'agissait d'un 1^{er} ordre. Dans ce cas :
 - selon l'entrée-test, on identifie la réponse comme étant celle d'un 1^{er} ordre ;
 - on calcule les valeurs des constantes K et τ grâce à des lectures sur la courbe.
- à partir des équations des **modèles de connaissances** (lois physiques) décrivant le lien entre l'entrée et la sortie du bloc. Dans ce cas, il faudra :
 - écrire les équations et les combiner
 - écrire le rapport $\frac{S(p)}{E(p)} = H(p)$ sous **forme canonique**
 - déterminer les expressions des constantes K et τ .

3. IDENTIFICATION D'UN 1^{ER} ORDRE À PARTIR DE MESURES

3.1. Réponse impulsionnelle (entrée-test impulsion de Dirac)

Le système est testé par une impulsion de Dirac, $e(t) = A_0 \cdot \delta(t)$ et dans le domaine de Laplace, $E(p) = A_0$ (A_0 peut être une tension, température, vitesse, ...).

La réponse mesurée semble être une exponentielle décroissante.

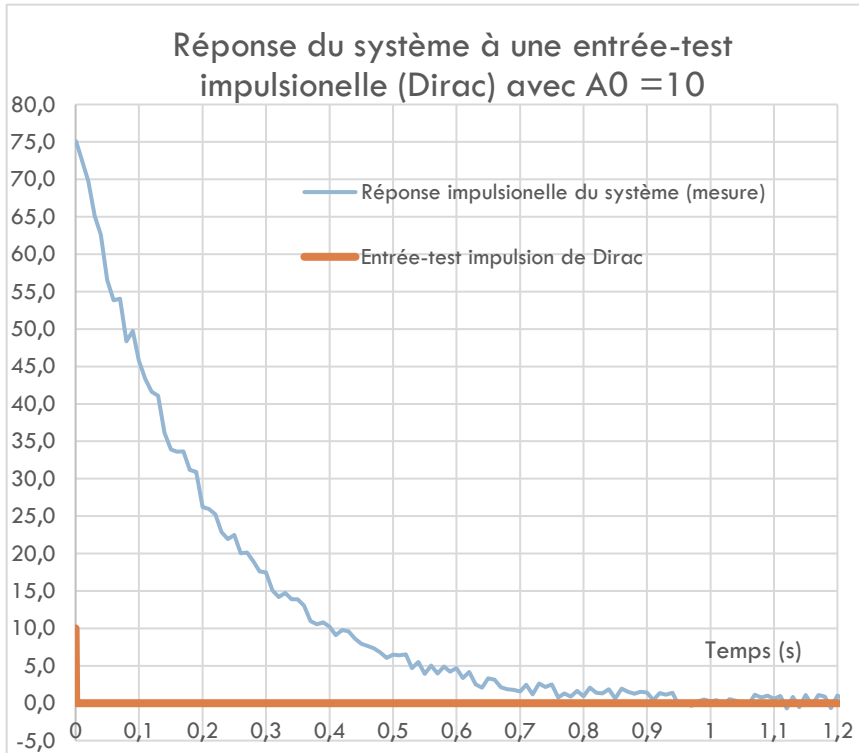
Or pour une entrée en Dirac, la sortie d'un 1^{er} ordre a pour expression dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p) = A_0 \cdot \frac{K}{1 + \tau p} = \frac{K \cdot A_0 / \tau}{\frac{1}{\tau} + p}$$

Par ailleurs, $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p+a} \right] = e^{-at} \cdot u(t)$

On en déduit que la réponse temporelle d'un 1^{er} ordre à une impulsion de Dirac est :

$$s(t) = \frac{K \cdot A_0}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} \cdot u(t) \quad (1)$$



La lecture de la valeur à l'origine donne :

D'après (1), $s(0) = \frac{K \cdot A_0}{\tau}$

La lecture de t correspond à τ :

- pour **0,37.s(0)** (méthode la plus précise)

Ou bien,

- à l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à l'origine.

Calcul de K et τ :

Remarques pour une entrée-test en Dirac :

Valeurs pour $t = n \cdot \tau$:

$$s(t = \tau) = \frac{K \cdot A_0}{\tau} e^{-\frac{\tau}{\tau}} \cdot u(\tau) = 0,37 \cdot s(0)$$

$$s(t = 2 \cdot \tau) = \frac{K \cdot A_0}{\tau} e^{-\frac{2 \cdot \tau}{\tau}} \cdot u(2 \cdot \tau) = 0,14 \cdot s(0)$$

$$s(t = 3 \cdot \tau) = \frac{K \cdot A_0}{\tau} e^{-\frac{3 \cdot \tau}{\tau}} \cdot u(3 \cdot \tau) = 0,05 \cdot s(0)$$

Valeur finale : $s(+\infty) = 0$

Tangente à l'origine (démonstration) :

$$\text{On a, } \dot{s}(t) = -\frac{K \cdot A_0}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t) \Rightarrow \dot{s}(0) = -\frac{K \cdot A_0}{\tau^2}$$

L'équation de la tangente est donc :

$$y(t) = -\frac{K \cdot A_0}{\tau^2} \cdot t + \frac{K \cdot A_0}{\tau}$$

Et nous avons bien pour $t = \tau$, $y(\tau) = 0$.

3.2. Réponse indicielle (entrée-test indicielle (Echelon)) : la plus fréquente

Le système est testé par un échelon d'amplitude $e(t) = A_0 \cdot u(t)$ et dans le domaine de Laplace, $E(p) = \frac{A_0}{p}$.

La réponse mesurée semble être une exponentielle croissante avec une asymptote horizontale pour $t \rightarrow +\infty$.

Or pour une entrée en échelon, la sortie d'un 1^{er} ordre a pour expression dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p) = \frac{A_0}{p} \cdot \frac{K}{1 + \tau p} = \frac{K \cdot A_0 / \tau}{p \cdot (\frac{1}{\tau} + p)}$$

La décomposition en éléments simples donne :

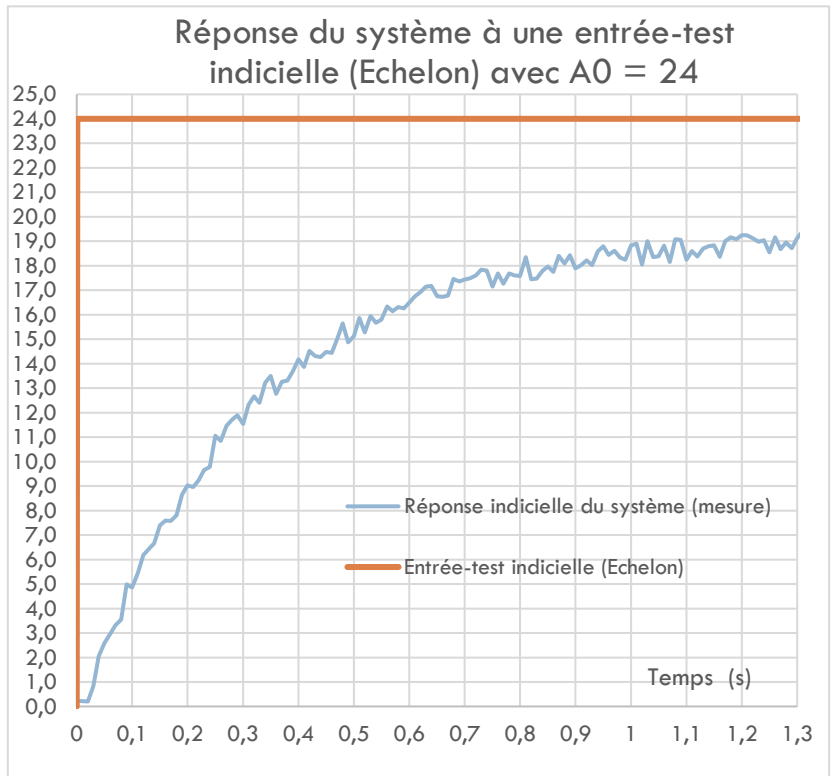
$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{a}{p} + \frac{b}{1 + \tau p} = \frac{K \cdot A_0}{p} - \frac{K \cdot A_0 \cdot \tau}{1 + \tau p} \\ &= \frac{K \cdot A_0}{p} - \frac{K \cdot A_0}{\frac{1}{\tau} + p} \end{aligned}$$

On en déduit que la réponse temporelle d'un 1^{er} ordre à un échelon est :

$$s(t) = K \cdot A_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \cdot u(t) \quad (2)$$

La lecture de la valeur de la sortie asymptotique donne :

$$\text{D'après (2), } s(+\infty) = K \cdot A_0$$



La lecture de t correspond à τ :

- pour **0,63** $s(+\infty)$ (méthode la plus précise)

Ou bien,

- à l'intersection de $s(+\infty)$ avec la tangente à l'origine.

Calcul de K et τ :

Remarques pour une **entrée-test indicielle (échelon)** :

Valeurs pour $t = n \cdot \tau$:

Valeur finale : $s(+\infty) = K \cdot A_0$ (sortie asymptotique)

$$s(t = \tau) = K \cdot A_0 \cdot (1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}) \cdot u(\tau) = 0,63 \cdot s(+\infty)$$

$$s(t = 2 \cdot \tau) = K \cdot A_0 \cdot (1 - e^{-\frac{2 \cdot \tau}{\tau}}) \cdot u(2 \cdot \tau) = 0,86 \cdot s(+\infty)$$

$$s(t = 3 \cdot \tau) = K \cdot A_0 \cdot (1 - e^{-\frac{3 \cdot \tau}{\tau}}) \cdot u(3 \cdot \tau) = 0,95 \cdot s(+\infty)$$

L'exigence en rapidité impose très souvent le temps de réponse à 5% notée $t_{5\%}$ correspondant à l'instant qui vérifie $|s(t_{5\%}) - s(+\infty)| < 0,05 \cdot |s(+\infty)|$ et on montre que $t_{5\%} = 3 \cdot \tau$.

Tangente à l'origine (démonstration) :

$$\text{On a } \dot{s}(t) = \frac{K \cdot A_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t) \Rightarrow \dot{s}(0) = \frac{K \cdot A_0}{\tau}$$

L'équation de la tangente est donc :

$$y(t) = \frac{K \cdot A_0}{\tau} \cdot t$$

Et nous avons bien pour $t = \tau$,

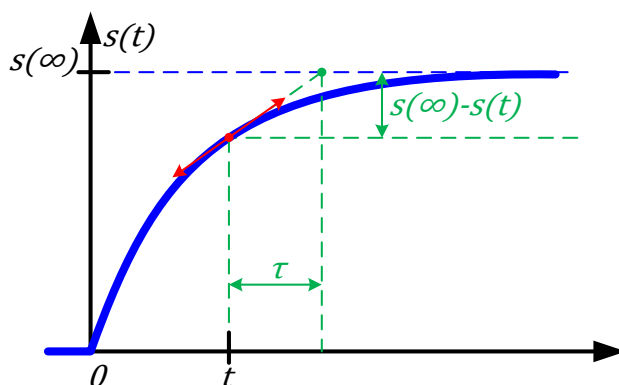
$$y(\tau) = K \cdot A_0 = s(+\infty).$$

Tangente à un instant t quelconque (démonstration) :

$$s(\infty) - s(t) = K \cdot A_0 \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad \dot{s}(t) = \frac{K \cdot A_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{s(\infty) - s(t)}{\tau}$$

La construction graphique sur la figure ci-dessous permet d'obtenir τ .

$$\text{car } \dot{s}(t) = \frac{s(\infty) - s(t)}{\tau}$$



Quelques calculs classiques pour une entrée-test indicielle (échelon) (à connaître parfaitement) :

- Pente à l'origine :

- Limite à l'infini :

3.3. Réponse à une rampe (Entrée-test Rampe)

L'entrée-test est définie par une **rampe**, $e(t) = A_0 \cdot t \cdot u(t)$, soit dans le domaine de Laplace, $E(p) = \frac{A_0}{p^2}$.

La sortie a donc pour expression dans le domaine de Laplace :

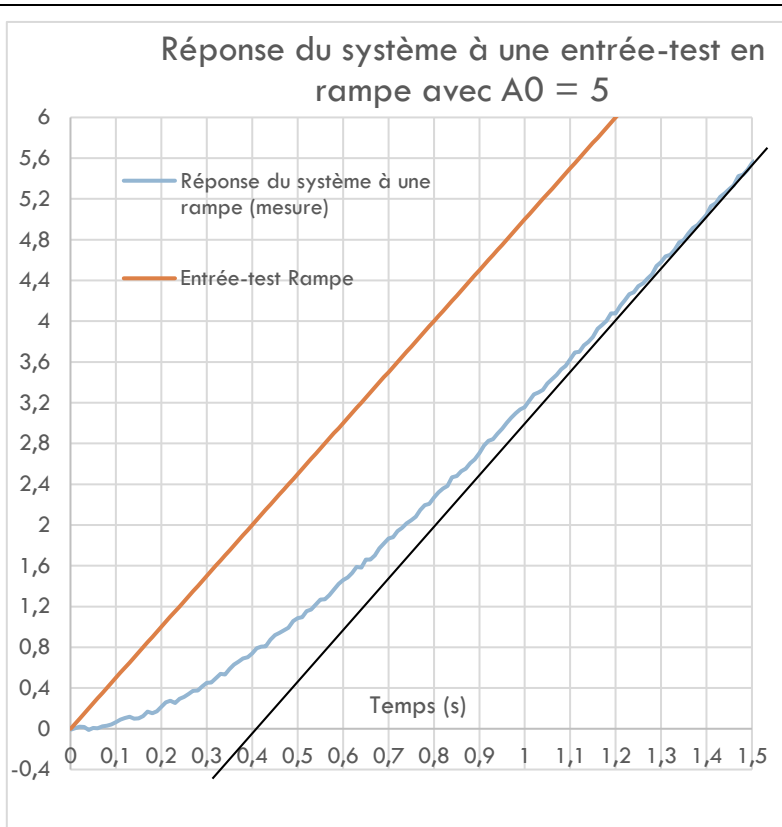
$$S(p) = \frac{A_0}{p^2} \cdot \frac{K}{1 + \tau p}$$

La décomposition en éléments simples donne :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{a}{p^2} + \frac{b}{p} + \frac{c}{1 + \tau p} \\ &= \frac{K \cdot A_0}{p^2} - \frac{K \cdot A_0 \cdot \tau}{p} + \frac{K \cdot A_0 \cdot \tau}{\frac{1}{\tau} + p} \end{aligned}$$

La réponse temporelle a donc pour expression :

$$s(t) = K \cdot A_0 \cdot (t - \tau + \tau \cdot e^{-t/\tau}) \cdot u(t) \quad (3)$$



La lecture de la **pen**te de l'asymptote à $+\infty$ donne : $K \cdot A_0$ d'après (3).

La lecture de t correspond τ :

- à l'intersection de l'asymptote à $+\infty$ avec l'axe des abscisses

Remarque :

Si $K = 1$, la **distance** entre l'entrée-test et l'asymptote est : $A_0 \cdot \tau$

Calcul de K et τ :

Remarques pour une entrée-test en rampe :

- Asymptote à $+\infty$ (démonstration) :**

D'après (3), $s(t) = K \cdot A_0 \cdot (t - \tau + \tau \cdot e^{-t/\tau}) \cdot u(t)$

Et lorsque $t \rightarrow +\infty$, $s(t) \approx K \cdot A_0 \cdot (t - \tau) \cdot u(t)$

L'équation de l'asymptote est donc : $y(t) = \underbrace{K \cdot A_0}_{\text{pente de l'asymptote} \cdot (t - \tau) \cdot u(t)$

Et nous avons bien pour $t = \tau$, $y(\tau) = 0$.

- Distance à l'asymptote lorsque $K = 1$ (démonstration) :**

$$d = e(t) - y(t) = A_0 \cdot t \cdot u(t) - K \cdot A_0 \cdot (t - \tau) \cdot u(t) = A_0 \cdot t \cdot u(t) - A_0 \cdot (t - \tau) \cdot u(t) = A_0 \cdot \tau$$

Quelques calculs classiques pour une entrée-test rampe (à connaître parfaitement) :

- Pente à l'origine :

e de la valeur initiale appliqué à la dérivée en $t = 0$ s :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{s}(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \underbrace{p}_{\text{Théorème de la valeur initiale}} \cdot \underbrace{\left[\frac{p \cdot S(p)}{p} \right]}_{\substack{\text{Transformée} \\ \text{de la dérivée (CI nulle)}}} = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 \cdot \frac{A_0}{p^2} \frac{K}{(1 + \tau \cdot p)} = 0$$

- Limite à l'infini :

Théorème de la valeur finale : $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \underbrace{p}_{\text{Théorème de la valeur finale}} \cdot S(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot \frac{A_0}{p^2} \frac{K}{(1 + \tau \cdot p)} = +\infty$

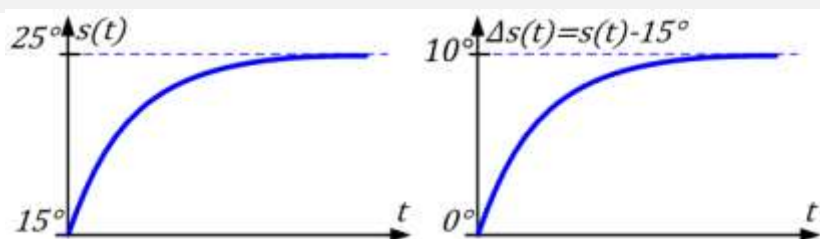
- Pour $K < 1$, l'écart entre l'entrée et la sortie augmente toujours.
- Pour $K = 1$, le système ne rejoint jamais la consigne mais sa variation est parallèle à l'entrée retardée d'une fois la valeur de la constante de temps.
- Pour $K > 1$, l'écart entre l'entrée et la sortie diminue, s'annule puis augmente.

3.4. Précautions

Lors d'un essai de réponse indicielle, les valeurs initiales ne sont pas toujours nulles.

Exemple : Bras de robot, en position initiale 15° et un échelon de tension de 5V. Pour se ramener aux bonnes conditions initiales, on pose : $\Delta e = 5V$ et $\Delta s(t) = s(t) - s(0)$ alors $\Delta s(+\infty) = K \cdot \Delta e$ soit :

$$K = \frac{\Delta s(\infty)}{\Delta e} = \frac{s(+\infty) - s(0)}{e(+\infty) - e(0)} = \frac{25 - 15}{5 - 0} = \frac{10}{5} = 2^\circ/V$$



Remarque : Si la réponse présente un **retard de T** seconde, on a alors

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \cdot e^{-T \cdot p}.$$

4. IDENTIFICATION D'UN 1^{ER} ORDRE À PARTIR D'UN MODÈLE DE CONNAISSANCE (VOIR TP 1 SÉRIE 1)

Application : Moteur Crouzet 89 810 003

Le schéma électrique équivalent simplifié est donné sur la figure ci-contre. Les grandeurs physiques

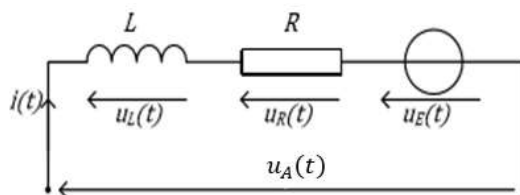
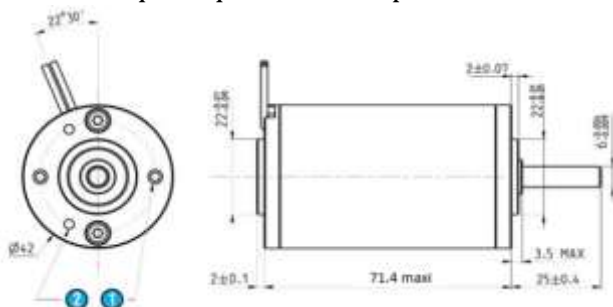


Figure 2 : schéma électrique équivalent.

électriques sont liées par les équations issues des modèles de connaissances développées en électricité :

$$\text{avec : } \begin{cases} u_L(t) + u_R(t) + u_E(t) = u_A(t) & \text{où } u_A(t) \text{ est la tension d'alimentation} \\ u_R(t) = R \cdot i(t) \\ u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \ll u_R(t) \\ u_E(t) = \text{force électro-motrice, proportionnelle à la vitesse de rotation : } u_E(t) = K_e \cdot \omega(t) \end{cases}$$

Q2.1. Montrer que sous ces hypothèses simplificatrices, $R \cdot i(t) + K_e \cdot \omega(t) = u_A(t)$.

Concernant le comportement mécanique, on applique le Principe fondamental de la dynamique au rotor et à sa charge (voir cours C2), sachant que le couple moteur C_m est proportionnel au courant dans le bobinage :

$$J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = C_m = K_m \cdot i(t) \quad \text{avec } \begin{cases} K_m : \text{constante de couple du moteur.} \\ J : \text{inertie du rotor et de sa charge.} \end{cases}$$

Q2.2. Par la manipulation de ces deux équations, montrer qu'on obtient l'équation du 1^{er} ordre linéaire à coefficients constants.

$$\frac{J \cdot R}{K_m} \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} + K_e \cdot \omega(t) = u_A(t)$$

Attention, ce n'est pas la forme canonique car $\omega(t)$ est multiplié par K_e

Il suffit de remplacer $i(t) = \frac{1}{R} \cdot u_A(t) - \frac{K_e}{R} \cdot \omega(t)$ dans l'équation du PFD :

$$J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = K_m \cdot \frac{1}{R} \cdot u_A(t) - K_m \cdot \frac{K_e}{R} \cdot \omega(t) \text{ et finalement, } \frac{J \cdot R}{K_m} \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} + K_e \cdot \omega(t) = u_A(t)$$

Q2.3. Donner l'expression de $H(p)$, K et τ .

Données du constructeur :

Inertie du rotor : $J = 75 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$

Constante de couple : $K_m = 109 \text{ mN} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$

Constante de force électromotrice $K_e = 0,109 \text{ Volt}/(\text{rad}/\text{s})$

Résistance : $R = 28 \text{ Ohm}$

Inductance : $L = 22 \text{ mH}$

Q2.4. Calculer de K et τ :

Q2.5. Calculer la vitesse asymptotique pour un échelon de tension de 48 Volts ($u_A(t) = 48 \cdot u(t)$)

5. DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES (RACINES RÉELLES)

La fonction $F(p)$ se présente sous la forme $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ où $N(p)$ et $D(p)$ sont deux polynômes en p , tels que le degré de $N(p) <$ degré de $D(p)$. (Dans le cas contraire, le système n'est pas causal).

5.1. Méthodes de décomposition pour des racines réelles

- Racines réelles simples $a, b, c \dots$ de $D(p)$:**

On met $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ sous la forme : $\frac{A}{p-a} + \frac{B}{p-b} + \frac{C}{p-c} + \dots$

Ainsi, on retrouve par « lecture » du tableau de l'annexe : $f(t) = Ae^{at} + Be^{bt} + Ce^{ct} + \dots$

Les coefficients A, B, C , se calculent soit par identification en réduisant au même dénominateur, soit par exemple pour le coefficient B , en multipliant $F(p)$ par $(p-b)$ et en faisant tendre p vers b .

- Racines réelles multiples $a, b, c \dots$ de $D(p)$:**

On met $F(p) = \frac{N(p)}{(p-a)^\alpha (p-b)^\beta}$ sous la forme :

$$F(p) = \left[\frac{A_1}{(p-a)} + \frac{A_2}{(p-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(p-a)^\alpha} \right] + \left[\frac{B_1}{(p-b)} + \frac{B_2}{(p-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(p-b)^\beta} \right]$$

Les coefficients se calculent soit par identification en réduisant au même dénominateur, soit par exemple pour les coefficients du type A_α , en multipliant $F(p)$ par $(p-a)^\alpha$ et en faisant tendre p vers a puis en déterminant les autres coefficients en donnant des valeurs réelles à p .

5.2. Transformée de Laplace inverse

La transformation de Laplace inverse consiste à rechercher la fonction temporelle $f(t)$ qui correspond à une fonction $F(p)$ donnée. Dans les problèmes d'automatique, $F(p)$ se présente sous la forme d'une fraction rationnelle en p qu'il faut décomposer en éléments simples pour retrouver des fractions élémentaires. Cette manipulation permet d'identifier la transformée inverse de chaque fraction élémentaire simplement par identification avec les transformées de Laplace usuelles (voir tableau de l'annexe). La fonction $f(t)$ correspond au final à une somme de fonctions temporelles élémentaires.

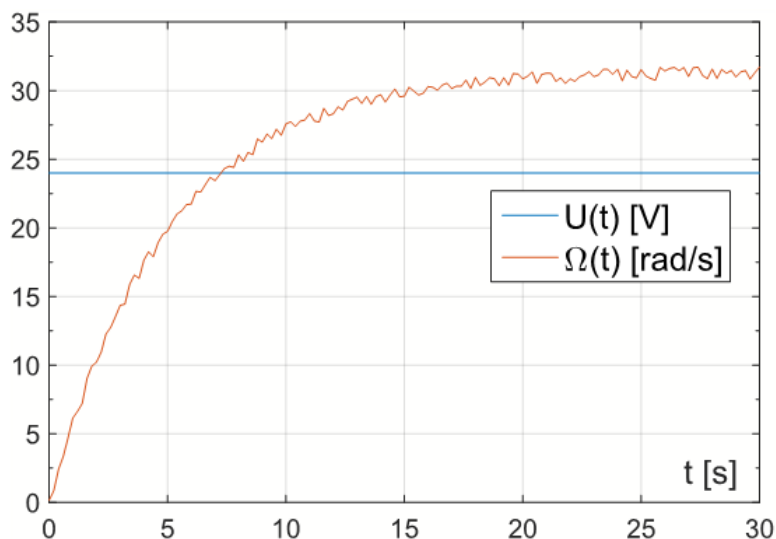
Exemple : La fonction $F(p) = \frac{p+2}{(p+5)^2 \cdot (p+10)}$ se présentera, en éléments simples, sous la forme :

6. APPLICATIONS

6.1. Application 1 : Segway

Dans une phase de développement du Segway (voir TD 8), les ingénieurs cherchent à vérifier la capacité d'accélération spécifiée dans le cahier des charges. Pour cela, des mesures de la vitesse de rotation de l'arbre des moteurs ont été effectuées sur le Segway avec une charge de 80 kg en fonctionnement de sorte à identifier leur comportement et plus précisément les constantes du modèle qui semble être du premier ordre pour une tension d'alimentation en échelon de 24 V.

Q1.1. Identifier sur la courbe les coefficients K et τ .



Q1.2. Donner $H(p)$.

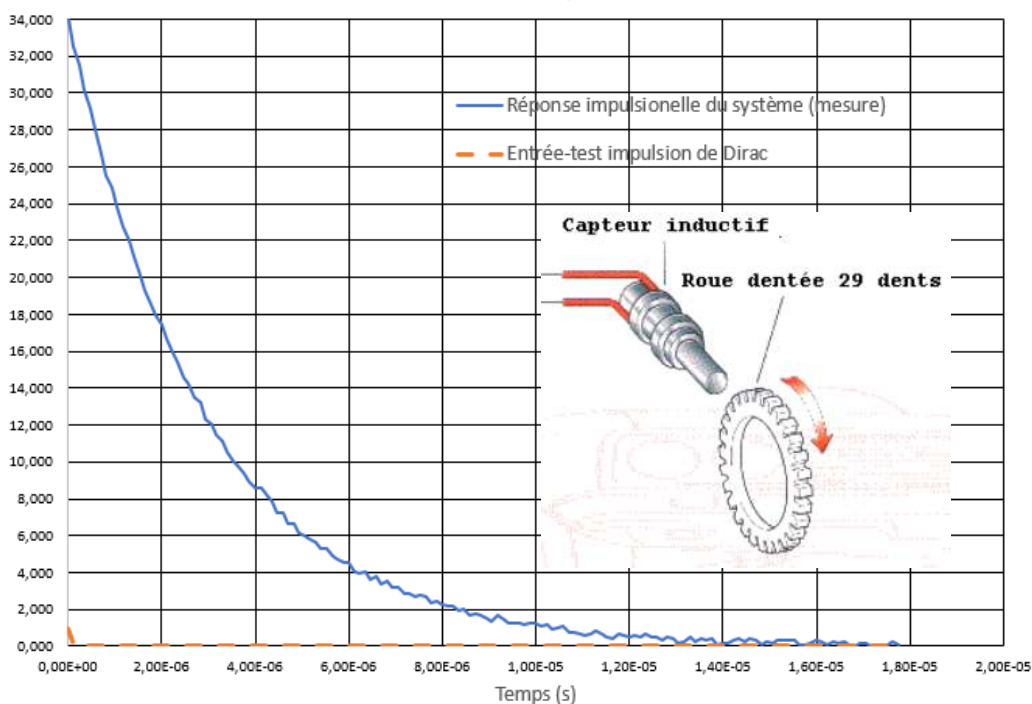
6.2. Application 2 : Capteur ABS

Dans le TD 8, le contrôle du glissement, par un système asservi, a été évoqué pour optimiser le freinage d'un véhicule. Pour chaque roue, la mesure de sa vitesse de rotation de la roue est effectuée par un capteur inductif qui détecte le passage des dents d'une roue cible solidaire de la roue du véhicule.

Chaque passage de dent fait varier le champ magnétique et génère une entrée $e(t)$ assimilée à une impulsion de Dirac d'amplitude $T_0 = 10^{-3}$.

La réponse du capteur est l'image d'une tension notée $u_{capt}(t)$ et donnée ci-contre.

Entrée et Réponse d'un capteur inductif de fréquence de rotation de roue en fonction du temps



Q3.1. Le comportement du capteur est modélisé par un 1^{er} ordre. Déterminer ses constantes caractéristiques.

Q3.2. Pour un véhicule roulant à $130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, calculer le nombre d'impulsion de Dirac par seconde (rayon de la roue $R = 0,3 \text{ m}$).

Q3.3. On suppose que $u_{\text{capt}}(t) \approx 0$ pour $t = 6 \cdot \tau$. Conclusion ?

6.3.Application 3 : Contrôle d'une remorque frigorifique

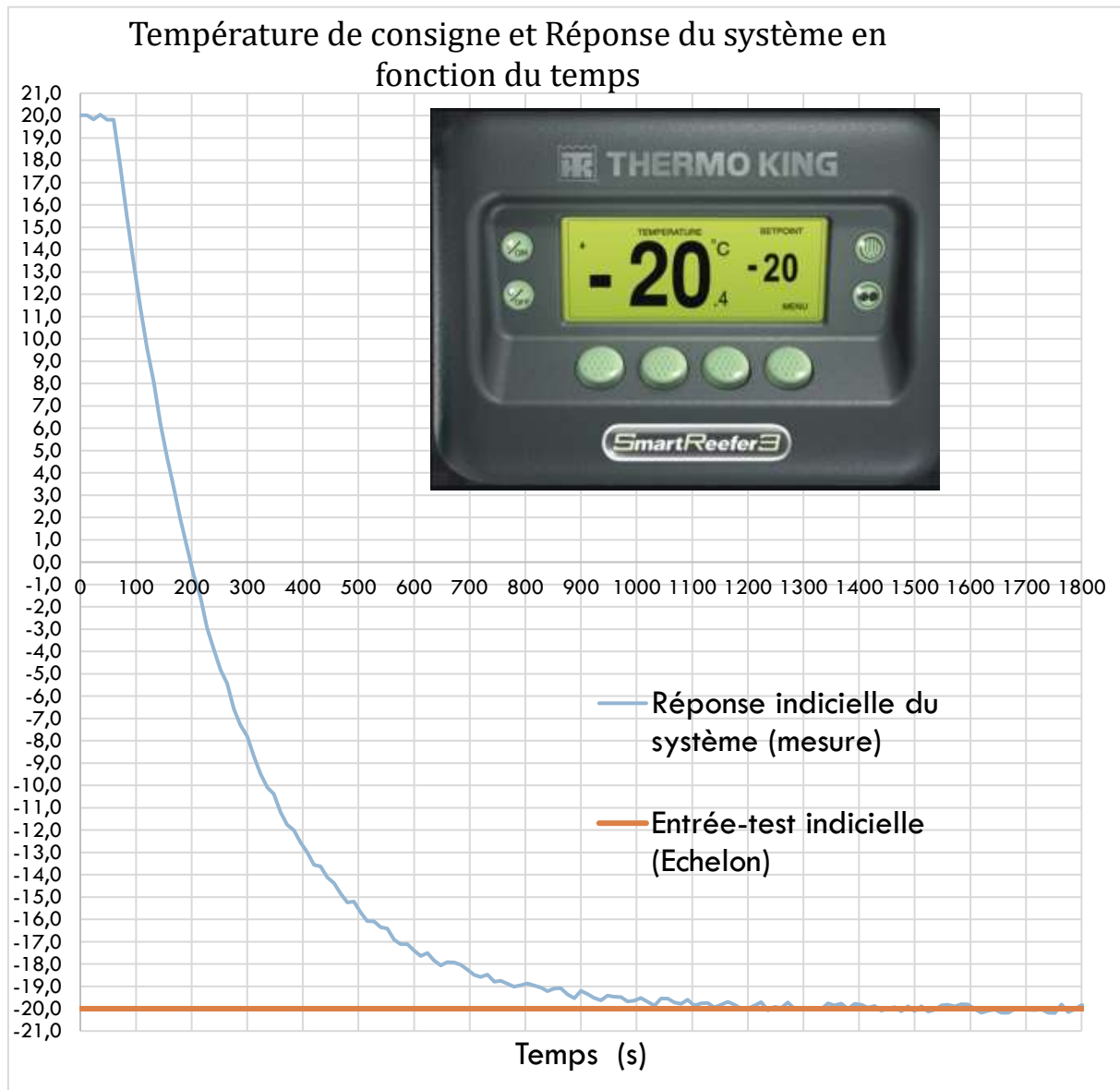
Le transport de produits alimentaires frais ou congelés est effectué sur le réseau routier dans des remorques frigorifiques qu'y doivent être régulièrement contrôlées par des organismes certifiés. Le contrôle vérifie que la température de consigne est atteinte en un temps donné, avec une précision et une stabilité suffisantes.

Le test dure plusieurs heures et l'intérieur de la remorque est équipée de plusieurs capteurs de température qui doivent mesurer la même température au cours du test (à une erreur près fixée par la norme).

L'opérateur impose une consigne de température en degré $\theta_c(t) = -20 \cdot u(t)$. L'évolution de la température $\theta_{\text{moyenne}}(t)$ dans la remorque est donnée page suivante.



Q4.1. Les courbes associées aux fonctions θ_c et θ_{moyenne} ne passent pas par zéro. Pour l'identification du comportement thermique de la remorque, on change les origines des températures et du temps pour ramener la température initiale à une référence nulle et annuler le retard. Déterminer les fonctions $\Delta\theta_c(t)$ et $\Delta\theta_{\text{moyenne}}(t)$ correspondants à ces décalages.



Q4.2. Tracer les courbes associées aux fonctions $\Delta\theta_c(t)$ et $\Delta\theta_{moyenne}(t)$.

Q4.3. Donner les coefficients de transfert $H(p) = \frac{\Delta\theta_{moyenne}(p)}{\Delta\theta_c(p)}$ de la remorque

Q4.2. Le temps de réponse $t_{5\%}$ doit être inférieur à 15 min. Conclusion.

6.4. Application 4 : Décomposer en éléments simples et donner $s(t)$

6.4.1. $H(p) = \frac{6}{(1+0,25p) \cdot (p+1)}$ et entrée indicielle $e(t) = 12 \cdot u(t)$

6.4.2. $H(p) = \frac{3+p}{(p+6)^2}$ et entrée rampe $e(t) = 2 \cdot t \cdot u(t)$