



C11- Système du 2nd ordre (K, z et ω_0) Modèle et identification expérimentale

1. DÉFINITION ET CONSTANTES CARACTÉRISTIQUES.....	2
2. APPROCHE THÉORIQUE	2
2.1. POLES DE LA FONCTION DE TRANSFERT : 3 CAS A ENVISAGER	2
2.2. REPONSE INDICIELLE : ENTREE-TEST INDICIELLE (ECHELON).....	4
2.2.1. Cas 1 : Réponse indicielle pour $z > 1$ (système amorti-réponse apériodique)	4
2.2.2. Cas 2 : Réponse indicielle pour $z = 1$ (Amortissement critique-réponse apériodique)	5
2.2.3. Cas 3 : Réponse indicielle pour $z < 1$ (système sous-amorti-réponse pseudo-périodique)	6
3. APPROCHE EXPÉRIMENTALE : IDENTIFICATION A PARTIR DE MESURES DE LA RÉPONSE INDICIELLE - METHODES	7
3.1. IDENTIFICATION DANS LES CAS 1 ET 2 AMORTI-APERIODIQUE ET CRITIQUE ($z \geq 1$)	7
3.2. IDENTIFICATION DANS LE CAS 3 ($z < 1$) : UTILISATION D'ABAQUES	8
3.2.1. Synthèse	10
4. DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES (RACINES COMPLEXES)	10
5. APPLICATIONS	11
5.1. MOTEUR A COURANT CONTINU MCC	11
5.2. SYSTEME MECANIQUE : BOULE A VAGUES POUR PISCINE	11

Compétences attendues

Savoir **identifier un système du 2^{ème} ordre à partir d'une mesure** à une entrée-test ou d'une modélisation.

Connaître **les formes canoniques d'un système du 2^{ème} ordre**

Connaître les **techniques de détermination des constantes caractéristiques K, z et ω_0** pour l'entrée-test indicielle

Savoir **utiliser les abaques D_1** en fonction de z et temps réduit en fonction de z .

Connaître les **techniques de décomposition en éléments simples** et leurs transformées de Laplace

1. DÉFINITION ET CONSTANTES CARACTÉRISTIQUES



Un système physique d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est du 2^{ème} ordre, s'il est régi par une équation différentielle du 2^{ième} ordre à coefficients constants. On l'écrit alors sous la forme canonique :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

Avec :

- K est le gain statique du système [unité de sortie]/[unité d'entrée]
- z est le facteur d'amortissement : $z > 0$ et sans unité
- ω_0 est la pulsation propre non amortie du système : $\omega_0 > 0$ en rad/s.

Elle est très fréquente dans la caractérisation du comportement des systèmes technologiques.

Dans les conditions de Heaviside, la fonction de transfert dans le domaine de Laplace s'écrit $\left(\frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2 + \frac{2z}{\omega_0} \cdot p + 1 \right) \cdot S(p) = K \cdot E(p)$, soit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{p^2 + 2 \cdot z \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2}$$

Forme canonique ①  Forme canonique ② 

2. APPROCHE THÉORIQUE

2.1. Pôles de la fonction de transfert : 3 cas à envisager



Le comportement dynamique du système est toujours entièrement défini par deux éléments de la fonction de transfert :

- les **zéros** : racines du numérateur ;
- les **pôles** : racines du dénominateur.

Il est donc judicieux de calculer au préalable les valeurs des pôles de la fonction de transfert du système puis de tracer la position de ces pôles dans le plan complexe. Dans un second temps, la réponse du système à des entrées types est étudiée.

Dans le cas des systèmes du second ordre, la fonction de transfert $H(p)$ ne possède qu'un seul polynôme (d'ordre 2 : $p^2 + 2 \cdot z \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2$) au niveau du dénominateur, il n'y a donc aucun zéro sur cette fonction de transfert et on retrouve **2 pôles** (p_1 et p_2 qui sont les deux racines du dénominateur).

Le dénominateur $p^2 + 2 \cdot z \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2$ peut donc s'écrire sous la forme $(p - p_1) \cdot (p - p_2)$.

Calcul de la valeur des pôles p_1 et p_2 et représentation dans le plan complexe :

Racines du polynôme : $p^2 + 2 \cdot z \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2 \longrightarrow \Delta = 4 \cdot z^2 \cdot \omega_0^2 - 4 \cdot \omega_0^2 = 4 \cdot \omega_0^2 \cdot (z^2 - 1)$

(avec $\Delta = b^2 - 4ac$)

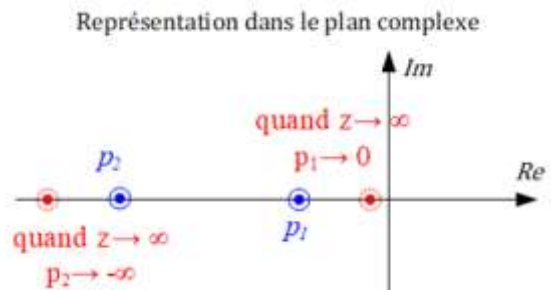
• Cas 1 : $z > 1 \Rightarrow \Delta > 0$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

d'où $p^2 + 2 \cdot z \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2 = (p - p_1) \cdot (p - p_2)$

avec $\left. \begin{array}{l} p_1 = -z\omega_0 + \omega_0\sqrt{z^2 - 1} \\ p_2 = -z\omega_0 - \omega_0\sqrt{z^2 - 1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ pôles réels} \\ \text{négatifs} \end{array}$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{(p - p_1) \cdot (p - p_2)} \quad (\text{sous forme canonique } \textcircled{2})$$



• Cas 2 : $z = 1 \Rightarrow \Delta = 0$

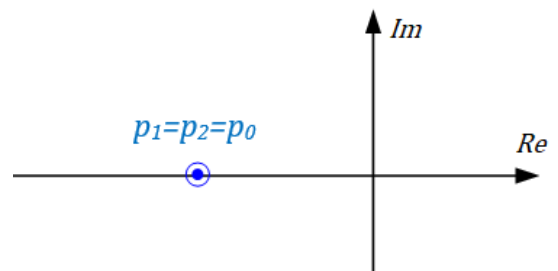
$$p_1 = p_2 = p_0 = \frac{-b}{2a}$$

d'où $p^2 + 2 \cdot z \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2 = p^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2 = (p - p_0)^2$

avec $p_0 = -\omega_0$ 1 pôle réel double

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{(p - p_0)^2} \quad (\text{sous forme canonique } \textcircled{2})$$

Représentation dans le plan complexe



• Cas 3 : $z < 1 \Rightarrow \Delta < 0$

$$\Delta = 4 \cdot \omega_0^2 \cdot j^2 \cdot \sqrt{1 - z^2}$$

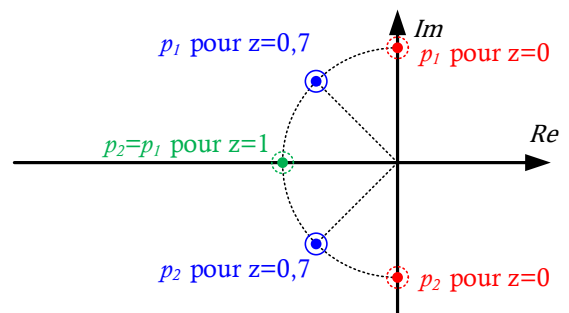
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{-b \pm j \cdot \sqrt{\Delta}}{2a} = -z\omega_0 \pm j \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{1 - z^2}$$

d'où $p^2 + 2 \cdot z \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2 = (p - p_1) \cdot (p - p_2)$

avec $\left. \begin{array}{l} p_1 = -z \cdot \omega_0 + j \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{1 - z^2} \\ p_2 = -z \cdot \omega_0 - j \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{1 - z^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ pôles complexes} \\ \text{conjugués} \end{array}$

et $|p_1| = |p_2| = \sqrt{Re^2 + Im^2} = \omega_0$

Représentation dans le plan complexe



Cas particulier : $z=0$; $z=0,7$; $z=1$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{(p - p_1) \cdot (p - p_2)} \quad (\text{sous forme canonique } \textcircled{2})$$

$$\text{Remarque : } (p - p_1) \cdot (p - p_2) = p^2 + \underbrace{(-p_1 - p_2)}_{2 \cdot z \cdot \omega_0} \cdot p + \underbrace{p_1 \cdot p_2}_{\omega_0^2}$$

2.2. Réponse indicielle : entrée-test indicielle (échelon)

L'entrée est définie par un échelon, $e(t) = A_0 \cdot u(t)$, soit dans le domaine de Laplace $E(p) = \frac{A_0}{p}$.

La sortie a donc pour expression dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p) = \frac{A_0}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_0^2}{p^2 + 2z \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2}$$

Deux particularités générales à connaître de la réponse indicielle

- **Pente à l'origine de la courbe de sortie $s(t)$**

$$\dot{s}(0+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{s}(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p [p \cdot S(p)] = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 \cdot \frac{A_0}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_0^2}{p^2 + 2z \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2} = 0 \rightarrow \text{Pente à l'origine} = 0$$

La tangente à l'origine est une droite horizontale, ce qui diffère de la réponse indicielle du système du premier ordre (voir cours précédent).

- **Réponse asymptotique en $+\infty$ de la courbe de sortie $s(t)$**

$$s(+\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A_0}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_0^2}{p^2 + 2z \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2} = A_0 \cdot K \rightarrow s(+\infty) = K \cdot A_0$$

Le régime établi ne dépend que du gain statique K alors que z et ω_0 n'interviennent que sur le régime transitoire.

2.2.1. Cas 1 : Réponse indicielle pour $z > 1$ (système amorti-réponse apériodique)

Lorsque $z > 1$, il est utile d'écrire la fonction de transfert en utilisant une écriture privilégiant les pôles de celle-ci pour obtenir $S(p)$ soit : $S(p) = E(p) \cdot H(p) = \frac{A_0}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)} = K \cdot A_0 \cdot \frac{p_1 \cdot p_2}{p \cdot (p-p_1) \cdot (p-p_2)}$ avec p_1 et $p_2 \in \mathbb{R}^-$

Décomposition, voir l'annexe du C10 et § 4

$$\frac{a \cdot b}{p \cdot (p+a) \cdot (p+b)} \rightarrow \left(1 + \frac{b}{a-b} e^{-at} - \frac{a}{a-b} e^{-bt}\right) \cdot u(t)$$

Autrement dit,

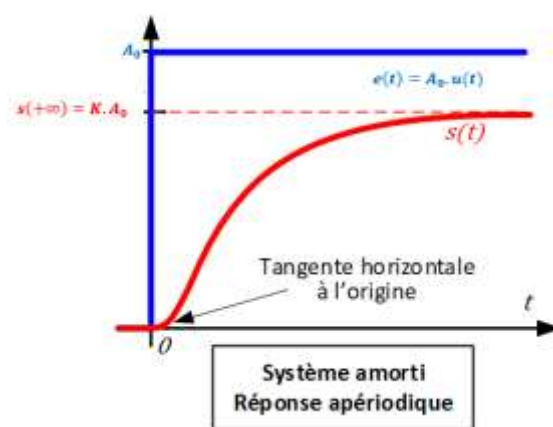
$$s(t) = K \cdot A_0 \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{p_2}{p_1-p_2} \cdot e^{p_1 \cdot t} - \frac{p_1}{p_1-p_2} \cdot e^{p_2 \cdot t}}_{\substack{\text{tend vers 0 si } t \rightarrow +\infty \\ \text{Régime transitoire}}}\right) \cdot u(t)$$

Pour $z > 1$, comme p_1 et $p_2 \in \mathbb{R}^-$, on pose $\tau_1 = -\frac{1}{p_1}$; $\tau_2 = -\frac{1}{p_2}$
(τ_i : constantes de temps en seconde)

$$\text{Finalement, } s(t) = K \cdot A_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \cdot (\tau_1 \cdot e^{-t/\tau_1} - \tau_2 \cdot e^{-t/\tau_2})\right) \cdot u(t)$$

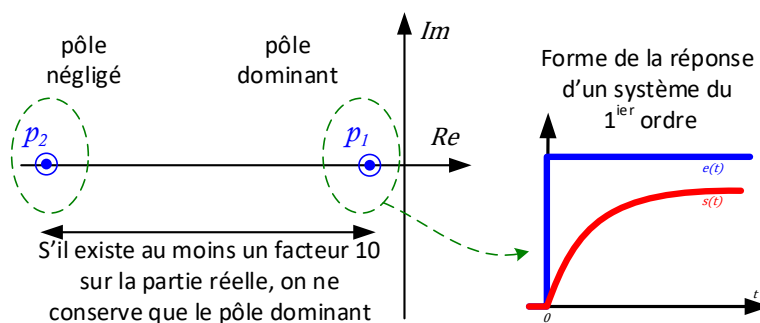
$$\text{Relations fondamentales : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \cdot \tau_2}} \quad \text{et} \quad z = \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{2 \cdot \sqrt{\tau_1 \cdot \tau_2}} \quad (\text{démontrées } \star \text{ plus loin})$$

Représentation graphique pour $z > 1$



Remarque importante (pôle dominant) :

Quand z devient $\gg 1$ (système très amorti), on peut négliger le pôle à gauche du **pôle dominant** s'il existe au moins un rapport 10 sur la partie réelle entre les deux pôles (ici p_1 et p_2). Dans ce cas, seul le pôle dominant caractérise la forme de la réponse. La réponse du système devient alors, si on néglige p_2 , une réponse du type 1^{er} ordre de pôle p_1 .



C'est le cas de l'exemple traité en 5.1 de ce cours où $p_1 = -56,8 \text{ s}^{-1}$ et $p_2 = -1267 \text{ s}^{-1}$ et donc

$$\text{D'après } \textcircled{*} \textcircled{*}, \quad s(t) \approx K \cdot A_0 \cdot (1 + (-1) \cdot e^{p_1 t} - 0) \cdot u(t) = K \cdot A_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau_1}) \cdot u(t)$$

Il correspond au 1^{er} ordre modélisé en C10-4. Application : Moteur Crouzet lorsque l'inductance L est négligée (car négligeable...) comme dans le TP 1 de la série 1.

$$\begin{aligned} \text{Démonstration } \textcircled{*} : H(p) &= \frac{K \cdot \omega_0^2}{p^2 + 2z \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2} = \frac{K \cdot p_1 \cdot p_2}{(p - p_1) \cdot (p - p_2)} = \frac{K \cdot p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot p_2 \cdot \left(1 - \frac{p}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{p}{p_2}\right)} \\ &= \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)} = \frac{K}{1 + \underbrace{(\tau_1 + \tau_2)}_{\frac{2z}{\omega_0}} \cdot p + \underbrace{\tau_1 \cdot \tau_2}_{\frac{1}{\omega_0^2}} \cdot p^2} \dots \end{aligned}$$

Pour $z \geq 1$, ce 2nd ordre peut être vu comme le produit de deux 1^{er} ordre.

2.2.2. Cas 2 : Réponse indicielle pour $z = 1$ (Amortissement critique-réponse apériodique)

Il y a dans ce cas **1 pôle réel négatif double** $p_0 = -\omega_0 \in \mathbb{R}^-$

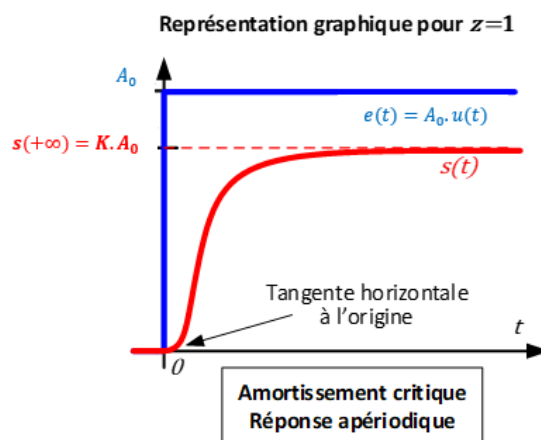
$$\text{Alors, } S(p) = E(p) \cdot H(p) = \frac{A_0}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_0^2}{(p - p_0)^2} = K \cdot A_0 \cdot \frac{\omega_0^2}{p \cdot (p + \omega_0)^2}$$

Décomposition, voir l'annexe du C10 et § 4

$$\frac{a^2}{p \cdot (p + a)^2} \rightarrow (1 - (1 + a \cdot t) \cdot e^{-at}) \cdot u(t)$$

La réponse temporelle a donc pour expression :

$$s(t) = K \cdot A_0 \cdot \left[1 - \underbrace{(1 + \omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\omega_0 t}}_{\substack{\text{Régime transitoire} \\ \text{tend vers 0}}} \right] \cdot u(t)$$



2.2.3. Cas 3 : Réponse indicielle pour $z < 1$ (système sous-amorti-réponse pseudo-périodique)

Il y a dans ce cas 2 pôles complexes conjugués p_1 et p_2 : **p_1 et $p_2 \in \mathbb{C}$**

$$p_1 = -z \cdot \omega_0 + j \cdot \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$$

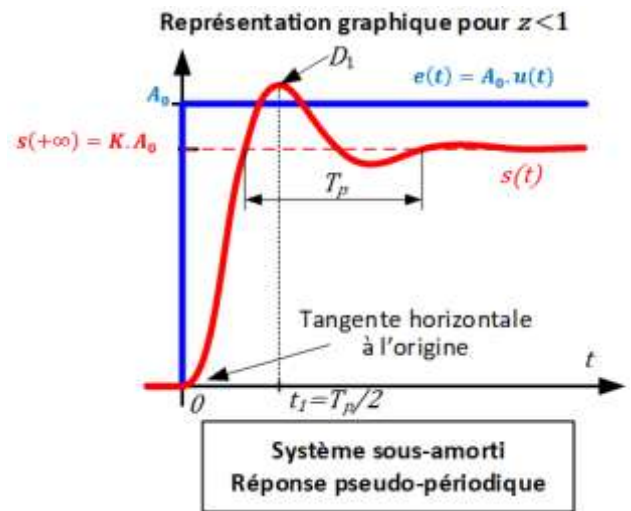
$$p_2 = -z \cdot \omega_0 - j \cdot \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$$

La décomposition en élément simples de l'expression de la sortie $S(p)$ donne (voir annexe du C10 et § 4) :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p) = A_0 \cdot K \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{p + 2z\omega_0}{(p + z\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - z^2)} \right)$$

Puis en posant $\omega_p = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - z^2}$ (**pseudo-pulsation**)

$$\text{On a : } S(p) = A_0 \cdot K \left(\frac{1}{p} - \frac{p + 2z\omega_0}{(p + z\omega_0)^2 + \omega_p^2} \right)$$



Pour appliquer la transformée de Laplace inverse, il est nécessaire de manipuler l'expression pour obtenir des formes connues (voir annexe du C10 et § 4) :

$$\text{On a : } \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2} \right] = \sin(\omega t) \cdot e^{-at} \cdot u(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2} \right] = \cos(\omega t) \cdot e^{-at} \cdot u(t)$$

$$\text{Ainsi : } S(p) = A_0 \cdot K \left(\frac{1}{p} - \frac{p + z\omega_0}{(p + z\omega_0)^2 + \omega_p^2} - \frac{z\omega_0}{(p + z\omega_0)^2 + \omega_p^2} \right)$$

La réponse temporelle a donc pour expression :

$$s(t) = K \cdot A_0 \cdot \left[1 - \underbrace{\cos(\omega_p t) e^{-z \cdot \omega_0 \cdot t} - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \sin(\omega_p \cdot t) \cdot e^{-z \cdot \omega_0 \cdot t}}_{\text{Régime transitoire oscillant amorti (tend vers 0)}} \right] \cdot u(t)$$

- **Pseudo-période, pseudo pulsation et pulsation propre** : T_p ; $\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$ et ω_0

La réponse présente des oscillations amorties de période : $T_p = 2 \cdot t_1$; $\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$ et $\omega_0 = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-z^2}}$

- **1^{er} dépassement relatif** : D_1

Le premier maximum (ou dépassement) apparaît à $t_1 = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_p}$

La valeur **relative** du 1^{er} dépassement D_1 correspond à $D_1 = \left| \frac{s(t_1) - s(\infty)}{s(\infty) - s(0)} \right|$

$$s(t_1) = s\left(\frac{\pi}{\omega_p}\right) = K \cdot A_0 \cdot \left(1 - \cos\left(\omega_p \frac{\pi}{\omega_p}\right) e^{-z\omega_0 \frac{\pi}{\omega_p}} - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \sin\left(\omega_p \frac{\pi}{\omega_p}\right) e^{-z\omega_0 \frac{\pi}{\omega_p}} \right) \cdot u\left(\frac{\pi}{\omega_p}\right)$$

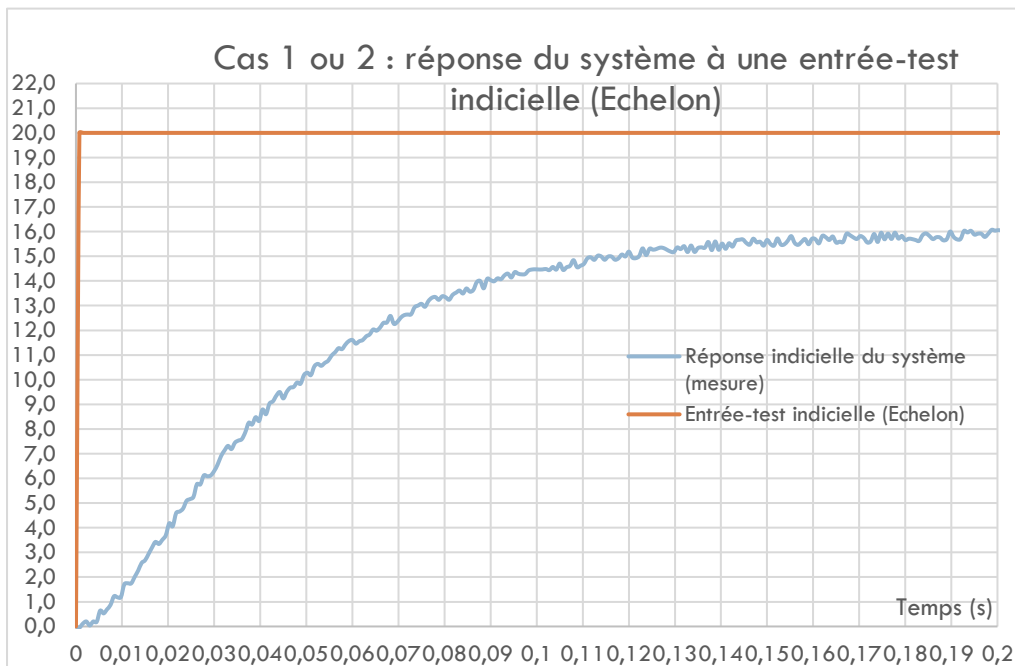
$$= K \cdot A_0 \cdot \left(1 + e^{-z\omega_0 \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}} \right)$$

$$\text{D'où : } D_1 = \left| \frac{s(t_1) - s(\infty)}{s(\infty) - s(0)} \right| = \left| \frac{K \left(1 + e^{-\frac{z\pi}{\sqrt{1-z^2}}} \right) - K}{K} \right| \quad \text{soit : } \boxed{D_1 = e^{-\frac{z \cdot \pi}{\sqrt{1-z^2}}}}$$

$$\frac{z}{\omega_0} = \sqrt{\frac{(\ln(D_1))^2}{\pi^2 + (\ln(D_1))^2}} \Leftrightarrow \boxed{z = \frac{|\ln(D_1)|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(D_1))^2}}}$$

3. APPROCHE EXPÉRIMENTALE : IDENTIFICATION A PARTIR DE MESURES DE LA RÉPONSE INDICIELLE – METHODES

3.1. Identification dans les cas 1 et 2 amorti-apériodique et critique ($z \geq 1$).



On observe que la réponse à une pente nulle à l'origine et par ailleurs, il n'y a pas de dépassement.

Si l'on suppose que le système est du 2nd ordre amorti ($z > 1$) on peut :

- calculer $K = \frac{s(+\infty) - s(0)}{e(+\infty) - e(0)} =$

Une méthode très approximative existe pour déterminer les constante de temps !

- Calculer τ_2 par la méthode de la tangente en t :
- En déduire $(\tau_1 + \tau_2)$ à 63 % de Δs et calculer τ_1 :

Par ailleurs,

$$(p - p_1) \cdot (p - p_2) = p^2 + \underbrace{(-p_1 - p_2)}_{2 \cdot z \cdot \omega_0} \cdot p + \underbrace{p_1 \cdot p_2}_{\omega_0^2} \quad \text{avec} \quad \tau_i = -\frac{1}{p_i} \quad \text{on a} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \cdot \tau_2}} \quad \text{et} \quad z = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \cdot \tau_2}}$$

- On calcule $\omega_0 =$
- On calcule $z =$

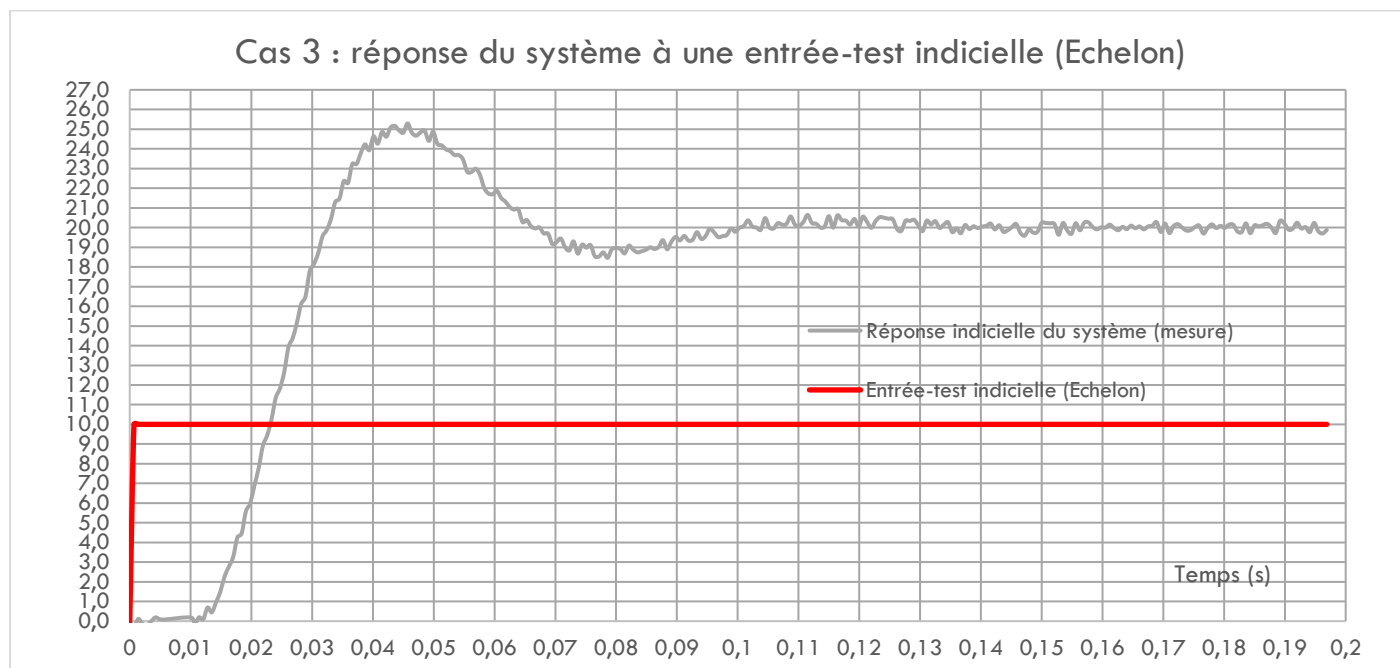
On vérifie en traçant $s_{\text{modèle}}(t) = K \cdot A_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \cdot (\tau_1 \cdot e^{-t/\tau_1} - \tau_2 \cdot e^{-t/\tau_2})\right) \cdot u(t) \quad \text{si } z > 1$

Ou

$$s_{\text{modèle}}(t) = K \cdot A_0 \cdot [1 - (1 + \omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\omega_0 t}] \cdot u(t) \quad \text{si } z = 1$$

en superposition de $s_{\text{mesure}}(t)$.

3.2. Identification dans le cas 3 ($z < 1$) : Utilisation d'abaques



On observe que la réponse à une pente nulle à l'origine et par ailleurs, il y a dépassement.

Si l'on suppose que le système est du 2nd ordre sous-amorti pseudo-périodique ($z < 1$) on peut :

- calculer le gain statique $K = \frac{s(+\infty) - s(0)}{e(+\infty) - e(0)} =$



La réponse présente un retard de $T = 0,01$ s.

- Calculer à t_1 du premier dépassement relatif $D_1 = \left| \frac{s(t_1) - s(\infty)}{s(\infty) - s(0)} \right| =$

$$\text{Or } D_1 = e^{\frac{-\pi \cdot z}{\sqrt{1-z^2}}} \Leftrightarrow z =$$

- lire la demi pseudo-période $t_1 =$ $\text{Or } t_1 = \frac{1}{2} \cdot T_p = \frac{\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1-z^2}} \Leftrightarrow \omega_0 =$

Finalement,

$$s_{\text{modèle}}(t) = K \cdot A_0 \cdot \left[1 - \cos(\omega_p \cdot (t - T)) e^{-z \cdot \omega_0 \cdot (t - T)} - \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \sin(\omega_p \cdot (t - T)) \cdot e^{-z \cdot \omega_0 \cdot (t - T)} \right] \cdot u(t - T)$$

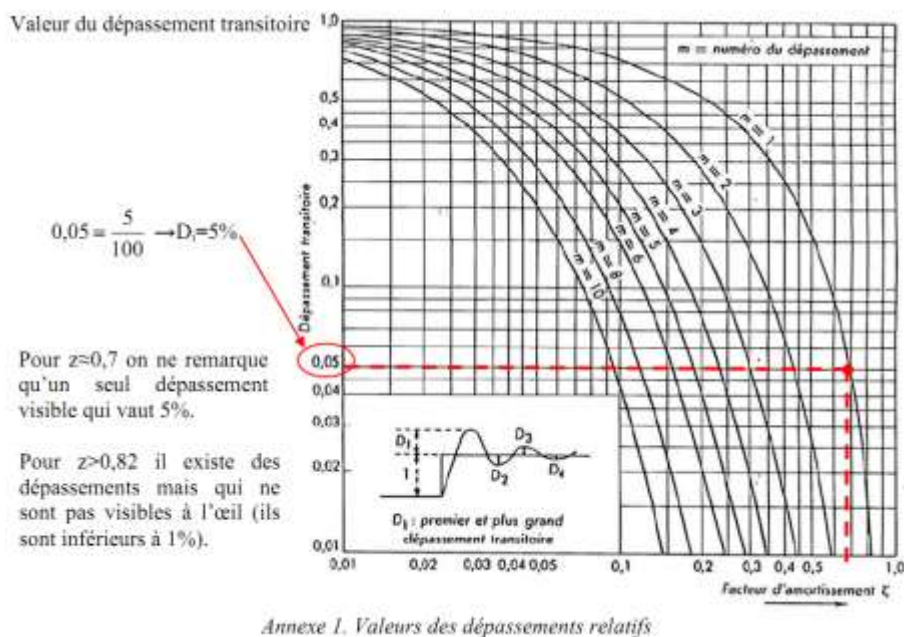
On superpose avec $s_{\text{mesure}}(t)$.

- Lecture du temps de réponse à 5 % : $t_{r5\%} =$

Remarque : $H(p) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{p^2 + 2z \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2} \cdot \underbrace{e^{-T \cdot p}}_{\substack{\text{car le système} \\ \text{répond en retard}}} \quad \text{et} \quad S(p) = \frac{A_0}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_0^2}{p^2 + 2z \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2} \cdot \underbrace{e^{-T \cdot p}}_{\substack{\text{retard} \\ T=0,01 \text{ s}}}$

Utilisation d'abaques (pour $z < 1$) :

- Dépassements en fonction de z



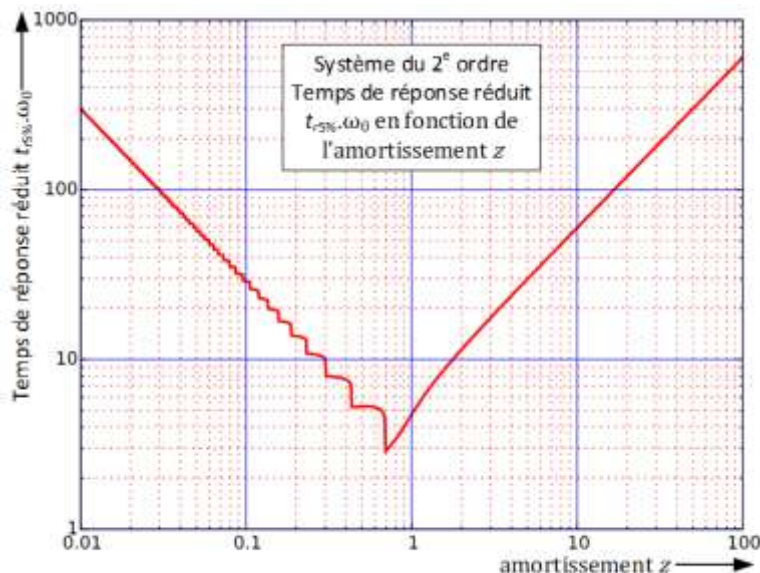
Vérification :

Utilisation d'abaques (quel que soit z) :

- Temps de réponse réduit ($t_{5\%} \cdot \omega_0$ en fonction de z)

Il n'existe pas de formule simple pour calculer le temps de réponse à 5% car il dépend de la valeur du coefficient d'amortissement z et de la pulsation propre non amortie du système ω_0 .

Rappel : Le temps de réponse à 5% correspond à la durée au-delà de laquelle la réponse $s(t)$ reste comprise entre 0.95 et 1.05 fois la valeur de la réponse en régime permanent $s(+\infty)$.



Vérification :

- Temps de réponse minimum à connaître par cœur



Le temps de réponse $t_{5\%}$ minimum est obtenu pour $z = 0,69$ et on a $t_{5\%} \cdot \omega_0 = 3$ pour $z = 0,69$

3.2.1. Synthèse

- pour $z \ll 1$ (amortissement faible), les oscillations sont mal amorties et le temps de réponse est grand.
- pour $z \approx 0,69$, le système présente un dépassement D_1 faible ($D_1 = 5\%$) avec le temps de réponse le plus faible.
- pour $z = 1$, le système présente le temps de réponse le plus faible pour une réponse sans dépassement.
- pour $z \gg 1$, il n'y a pas de dépassement mais le système est hyper amorti donc le temps de réponse est très grand.

Pour un même coefficient d'amortissement z , plus ω_0 augmente plus le temps de réponse à 5% diminue, donc plus le système est rapide.

4. DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES (RACINES COMPLEXES)

- **Racines simples conjuguées :** $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p^2 + m.p + n).(\dots)}$

$(p^2 + mp + n)$ possède deux racines complexes conjuguées ($p_1 = -a + j.\omega$, $p_2 = -a - j.\omega$)

$(p^2 + mp + n)$ peut se mettre sous la forme : $(p - p_1)(p - p_2) = (p + a)^2 + \omega^2$

La méthode consiste simplement à mettre $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ sous la forme :

$$\frac{A_1.p + B_1}{p^2 + m.p + n} + \dots = \frac{A_1.p + B_1}{(p + a)^2 + \omega^2} + \dots$$

$f(t)$ s'exprime alors simplement en fonction de $e^{-a.t} \cdot \sin \omega.t$ et/ou $e^{-a.t} \cdot \cos \omega.t$ (voir tableau en annexe du cours C10).

- **Racines multiples conjuguées (plus que rare) :** $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p^2 + m.p + n)^\alpha .(\dots)}$

$(p^2 + mp + n)$ possède deux racines complexes conjuguées ($p_1 = -a + j.\omega$, $p_2 = -a - j.\omega$)

$(p^2 + mp + n)$ peut se mettre sous la forme : $(p - p_1)(p - p_2) = (p + a)^2 + \omega^2$

La méthode consiste simplement à mettre $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ sous la forme :

$$\frac{A_1.p + B_1}{p^2 + m.p + n} + \frac{A_2.p + B_2}{(p^2 + m.p + n)^2} + \dots + \frac{A_\alpha.p + B_\alpha}{(p^2 + m.p + n)^\alpha} + \dots = \frac{A_1.p + B_1}{(p + a)^2 + \omega^2} + \frac{A_2.p + B_2}{((p + a)^2 + \omega^2)^2} + \dots + \frac{A_\alpha.p + B_\alpha}{((p + a)^2 + \omega^2)^\alpha} + \dots$$

Et on cherche les transformées inverses dans l'annexe du C10.

5. APPLICATIONS

5.1. Moteur à courant continu MCC

Reprenons l'exemple *non simplifiée* du C10. On a :

$$\begin{cases} u_A(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + K_e \cdot \omega(t) & (1) \\ J \frac{d\omega(t)}{dt} = K_m \cdot i(t) & (2) \end{cases}$$

- (1) Loi des mailles appliquée au circuit équivalent.
 (2) Principe fondamental de la dynamique, appliqué à l'isolement {Rotor+Système entraîné} sur un axe de rotation (Cours C2).

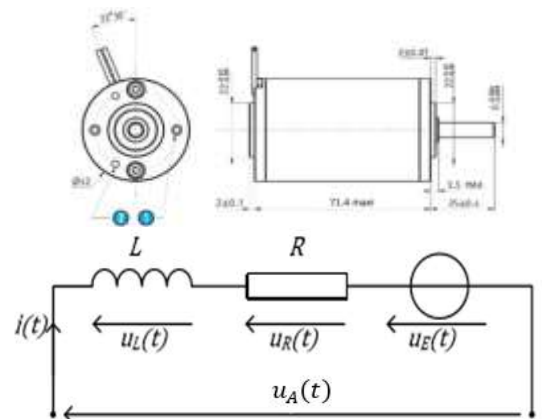


Figure 2 : schéma électrique équivalent.

Q1.1 En combinant ces équations, montrer que :

$$\frac{L \cdot J}{K_m \cdot K_e} \cdot \frac{d^2 \Omega(t)}{dt^2} + \frac{R \cdot J}{K_m \cdot K_e} \cdot \frac{d\Omega(t)}{dt} + \Omega(t) = \frac{1}{K_e} u_A(t)$$

Données du moteur :

Inertie du rotor : $J = 75 \text{ g.cm}^2$	Constante de couple : $K_m = 0,109 \text{ N.m.A}^{-1}$
Résistance : $R = 28 \text{ Ohm}$	Constante de force électromotrice : $K_e = 0,109 \text{ Volt/(rad/s)}$
Inductance : $L = 22 \text{ mH}$	

Q1.2. Calculer K, z et ω_0 :

Q1.3. Calculer les pôles p_1 et p_2 et les constantes de temps τ_1 et τ_2

Q1.4. Y a-t-il un pôle est dominant ?

Q1.5. Donner les relations entre ω_0, z, τ_1 et τ_2 .

Q1.5. Donner $s(t)$.

5.2. Système mécanique : Boule à vagues pour piscine (d'après concours)

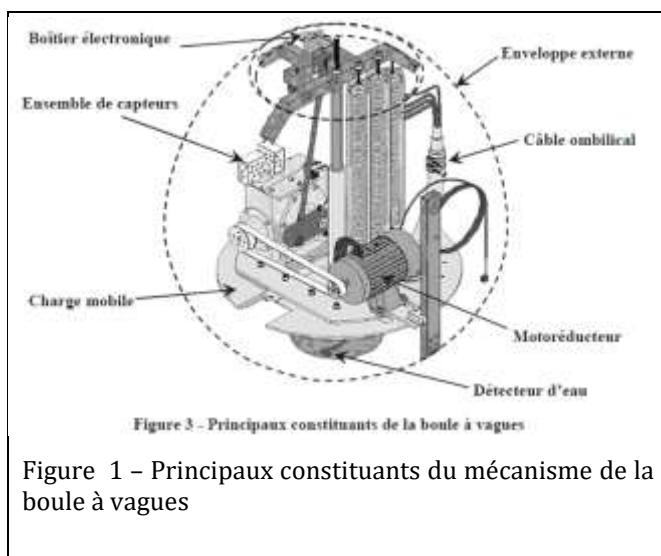


Figure 2 – Boule à vagues dans sa zone de stockage dans le bassin.

<https://youtu.be/3eCmfaxIijc>

y_C : déplacement du centre de la boule par rapport à la surface d'eau du bassin.

$f(t)$: effort généré par mécanisme de la boule à vague.

m : masse de la charge mobile

c : course de la charge ($< 0,65 \text{ m}$)

$r < 1 \text{ m}$: rayon utile.

$b = 1500$ coefficient de frottement visqueux.

Le déplacement du centre C de la boule à vagues est régi par l'équation différentielle ci-dessous, issue des lois de l'énergétique :

$$m \cdot c^2 \cdot \ddot{y}_C = -m \cdot g \cdot c \cdot y_C - b \cdot r^4 \cdot \dot{y}_C + r^2 \cdot f(t)$$

Q2.1. Ecrire cette équation sous forme canonique. Déterminer la valeur minimale de la pulsation propre.

Q2.2. Donner une condition sur la masse m pour avoir un comportement oscillant de la boule (préciser vos hypothèses).

Q2.3. Donner une condition sur la masse m qui permettrait d'avoir un troisième dépassement d'au moins 5 %.

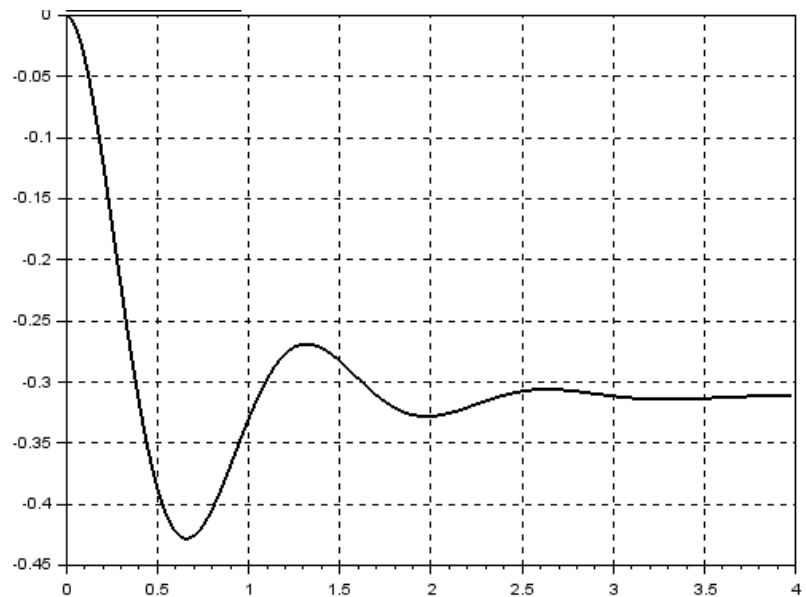
Le bureau d'études choisit $z = 0,3$.

Q2.4. Le cahier des charges, en plus de la condition ci-dessus, impose $t_{5\%} = 2$ s. En déduire les valeurs de c et m satisfaisants aux exigences.

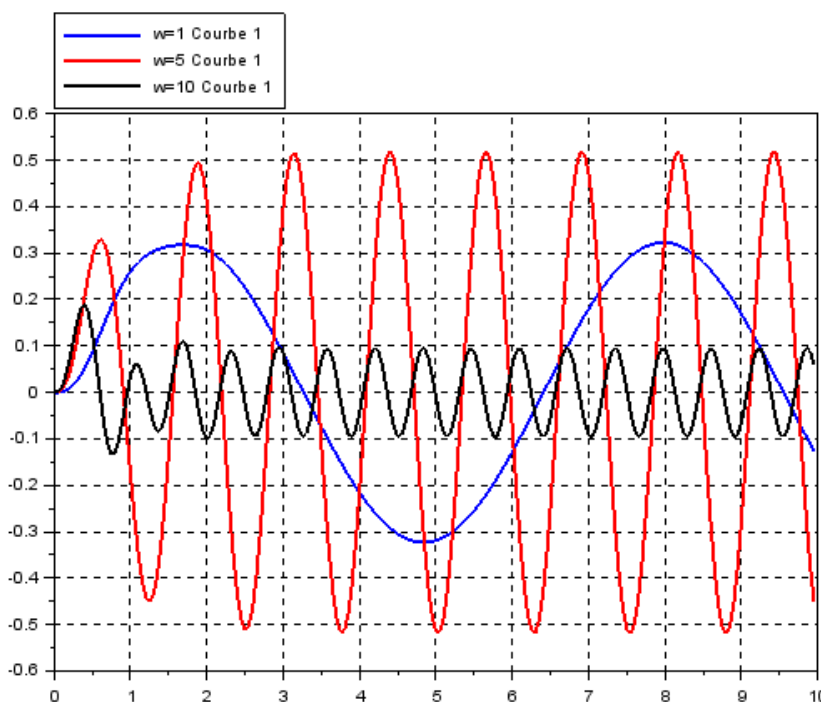
Q2.5 La masse trouvée est excessive. Sur quel paramètre peut-on agir pour réduire m ?

Q2.6. Une mesure sur le dispositif réel est donnée ci-contre pour une entrée-test indicielle $f(t) = -2000 \cdot u(t)$ (obtenue en accrochant une gueuze de fonte sous la boule pour générer un effort constant de -2000 N).

Déterminer les coefficients caractéristiques du système réel et calculer la masse m réellement choisie. Conclusions.



Position (y_C en m) de C par rapport à la surface d'eau du bassin en fonction du temps (t en s) : Entrée-test indicielle $f(t) = -2000 \cdot u(t)$



Remarque :

L'entrée sera en réalité harmonique correspondant aux déplacements alternatifs verticaux de la charge mobile, du type $f(t) = 1000 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t)$.

La modélisation obtenue permet de créer des simulations pour tous types d'entrées.

Ci-contre : trois valeurs de ω :

1 ; 5 et 10 rad/s

On note que $\omega = 5$ rad/s semble proche de la résonance. Elle est utilisée pour avoir de grands déplacements de la boule.

<https://www.facebook.com/EntrepriseFuturaPlay/videos/1643301072611390/?t=18>