



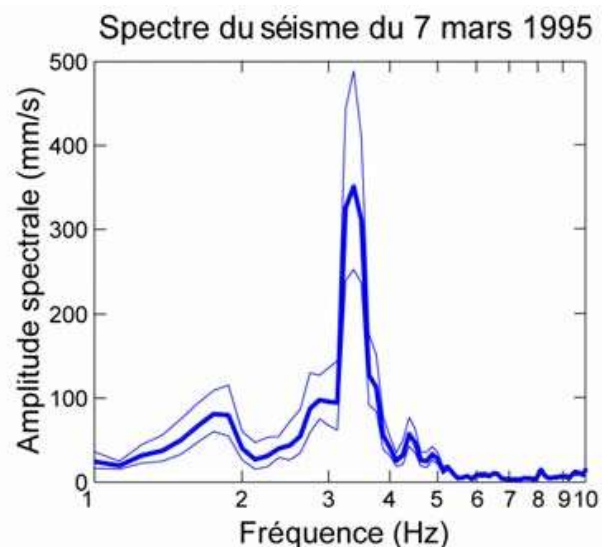
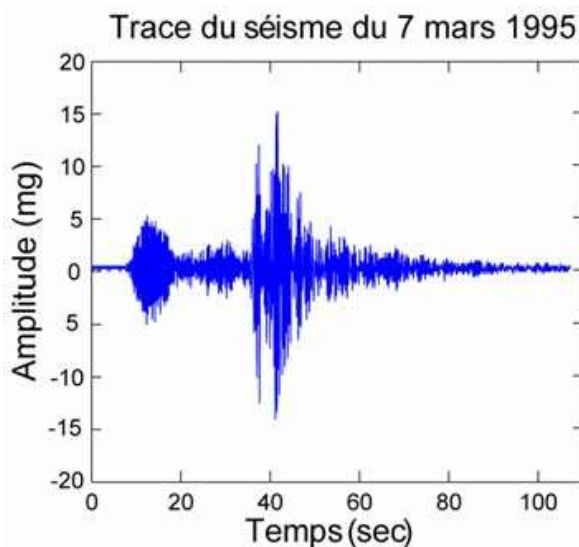
C12 - Analyse fréquentielle des SLCI

1. PRINCIPE DE L'ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SLCI	1
2. DIAGRAMME DE BODE.....	3
3. RÉPONSE HARMONIQUE DES SYSTÈMES ÉLÉMENTAIRES.	4
4. RÉPONSE HARMONIQUE DE SYSTÈMES DU 1 ^{ER} ORDRE	5
5. RÉPONSE HARMONIQUE DE SYSTÈMES DU 2 ND ORDRE.....	6
6. GÉNÉRALISATION : DE H(P) QUELCONQUE AUX DIAGRAMMES DE BODE	9
7. DES DIAGRAMMES DE BODE (GAIN ET PHASE) A H(P)	14

Compétences attendues : voir page 16/16

1. PRINCIPE DE L'ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SLCI

La théorie développée par Fourier permet de considérer que tout signal périodique résulte de la sommation d'un ensemble de composantes sinusoïdales de fréquences et d'amplitudes différentes (spectre).

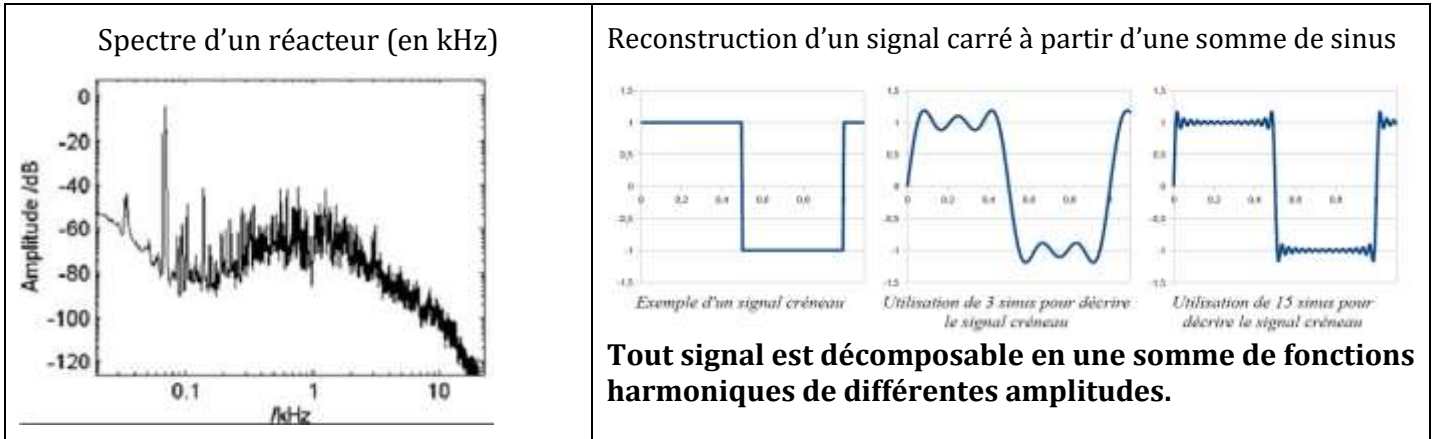


Pour une zone urbaine, constituée de bâtiments divers qui sont des systèmes technologiques, un **séisme** est un **signal d'entrée** qui vient la solliciter. Or, **tout signal est décomposable en une somme de fonctions harmoniques de différentes amplitudes (spectre)**. Dans notre exemple, la fréquence autour de 3,5 Hz est prépondérante (en amplitude). Il faudra cependant que les bâtiments résistent à l'ensemble du spectre.

Par ailleurs, les systèmes présentent généralement des fréquences propres (modes propres) qui leur sont intrinsèques. Lorsqu'ils sont sollicités à ces fréquences, la sortie a une amplitude infinie conduisant à la destruction du système (pont, bâtiment, système robotisé, ...).

En ingénierie, il faut donc prévoir le comportement des systèmes à une **infinité de fréquences excitatrices**. Cela correspond à une **entrée-test spécifique, l'entrée harmonique**, qui s'appuie sur l'**analyse fréquentielle** des systèmes utilisant des outils tels que les **diagrammes de Bode**.

Autres exemples :



Important : Les entrées-test temporelles (impulsion, échelon ou rampe) correspondent à une autre approche qu'il faut absolument distinguer et **ne pas confondre les constructions graphiques** des réponses temporelles avec celles des réponses fréquentielles (diagrammes de Bode).

1.1. Réponse fréquentielle d'un système

Soit un système linéaire continu et invariant d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ dont le comportement est régi par une équation différentielle à coefficients constants :

$$B_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + B_1 \cdot \frac{ds(t)}{dt} + B_0 \cdot s(t) = A_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + A_1 \cdot \frac{de(t)}{dt} + A_0 \cdot e(t) \quad (1)$$

Pour l'analyse fréquentielle, l'entrée-test spécifique sera donc un signal harmonique de la forme :

$$e(t) = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t) \text{ de pulsation } \omega \text{ quelconque (au moins le spectre)}$$

La réponse sera alors harmonique et de même pulsation $s(t) = S_0(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi(\omega)) \cdot u(t)$

Il est commode, mathématiquement, d'écrire ce signal d'entrée e sous la forme d'une fonction complexe de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$: $\tilde{e} : t \rightarrow E_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$, on montre alors immédiatement que la sortie est (forme complexe de (1)) :

$$\tilde{s}(t) = \tilde{H}(j \cdot \omega) \cdot \tilde{e}(t) \quad (2) \text{ avec } \tilde{H}(j \cdot \omega) = \frac{A_m(j \cdot \omega)^m + \dots + A_1(j \cdot \omega) + A_0}{B_n(j \cdot \omega)^n + \dots + B_1(j \cdot \omega) + B_0} = \frac{N(j \cdot \omega)}{D(j \cdot \omega)}, \text{ (valable pour les } \omega \text{ qui n'annulent pas } D)$$

(On retrouve la fonction de transfert H du système et $\tilde{H} = H$ avec $p = j \cdot \omega$ pour une entrée-test harmonique)

Et la fonction complexe $\tilde{H}(j \cdot \omega) = H(j \cdot \omega)$ peut être mise, comme tout complexe, sous la forme,

$$H(j \cdot \omega) = G(\omega) \cdot e^{j \cdot \varphi(\omega)} \text{ (avec } G(\omega) \in \mathbb{R}^+)$$

$$\text{autrement dit : } \tilde{s}(t) = E_0 \cdot G(\omega) \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi(\omega))} = S_0(\omega) \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi(\omega))} \quad (3)$$

Concrètement, l'entrée et la sortie, qui nous intéressent, sont, bien entendu, les parties imaginaires de l'équation (3) et :

Pour	$e(t) = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t),$	on aura	$s(t) = \underbrace{E_0 \cdot G(\omega)}_{S_0(\omega)} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi(\omega)) \cdot u(t)$
------	---	---------	---

Comme constaté précédemment, la principale difficulté lors de l'étude des SLCI vient de l'équation différentielle du système qui est généralement trop complexe dans la réalité. Mais, pour réaliser l'étude fréquentielle d'un système, on voit qu'il suffit d'exploiter la fonction de transfert $H(p)$ du système.



- $H(j\omega)$ est appelée transmittance isochrone. (Il s'agit de cette fonction qui est utilisée en physique). $H(j\omega)$ représente donc le *comportement fréquentiel* du système de fonction de transfert $H(p)$.
- $G(\omega) = |H(j\omega)|$ est appelé **gain réel** du système
- $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$ est appelé **phase** du système,

2. DIAGRAMME DE BODE



Cette représentation est composée de deux tracés :

- Le tracé du gain en décibels G_{dB} tracé en fonction de $\log(\omega)$ pour $\omega \in [0, +\infty[$.

$$G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log(|H(j\omega)|)$$

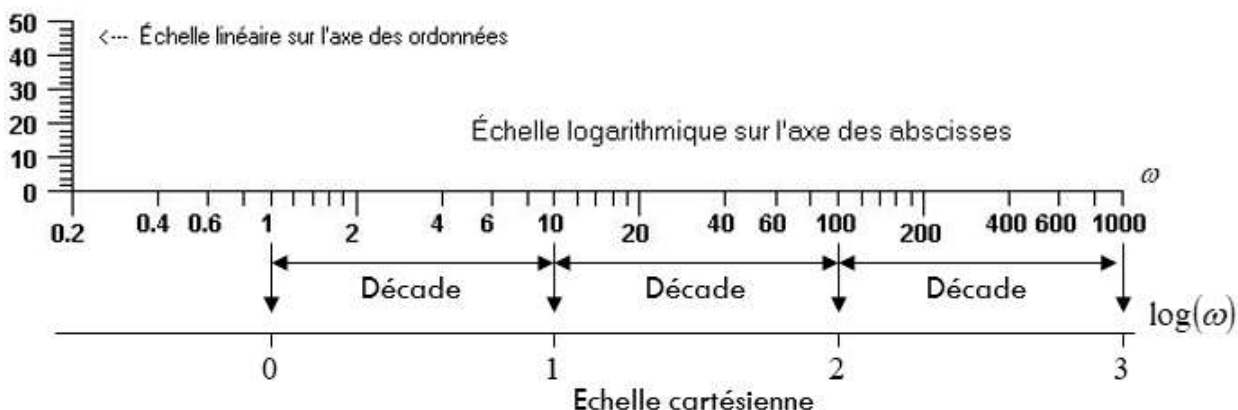
- Le tracé de la phase φ exprimée en degrés et tracée en fonction de $\log(\omega)$ pour $\omega \in [0, +\infty[$.

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$$

Représentation graphique.

Elle comporte une graduation logarithmique des abscisses et une graduation cartésienne des ordonnées. Elle a l'avantage de ne pas avoir à calculer systématiquement la fonction $\log(\omega)$. Elle permet de représenter les variations de $G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log(|H(j\omega)|)$ pour une forte amplitude de ω sur un encombrement réduit et donc de conserver une bonne finesse pour les basses fréquences.

Correspondance échelle logarithmique / échelle cartésienne :



Réponses harmoniques de systèmes élémentaires

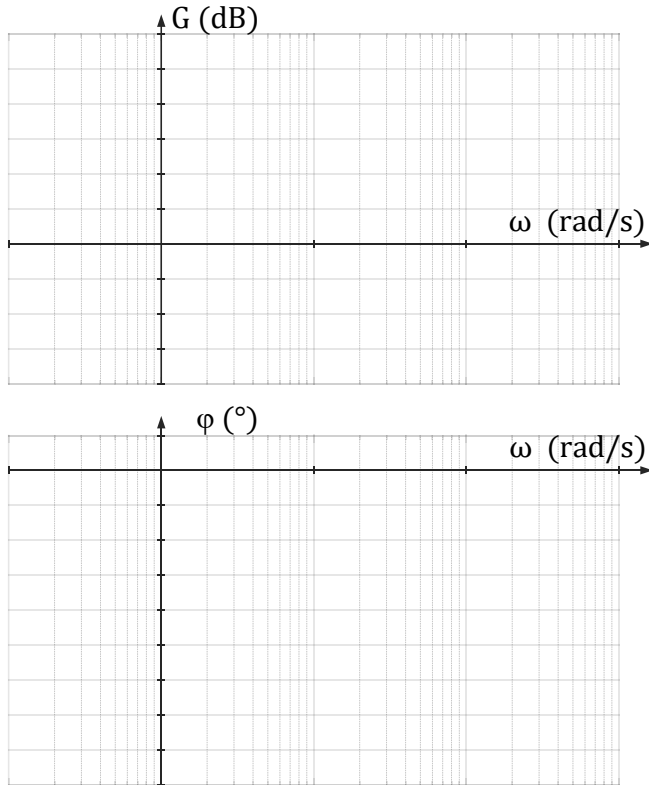
Il faut connaître le diagramme de Bode de toutes les fonctions de transfert élémentaires, qui sont :

- Le gain pur K , l'intégrateur $\frac{K}{p}$ et le dérivateur $K \cdot p$ (ou $\frac{K}{p^\alpha}$ et $K \cdot p^\alpha$)
- Le 1^{er} ordre $\frac{1}{1+Tp}$ et son inverse $(1 + Tp)$

- Le 2nd ordre $\frac{1}{1 + \frac{2z}{\omega_0} \cdot p + \left(\frac{1}{\omega_0} p\right)^2}$ et son inverse $1 + \frac{2z}{\omega_0} \cdot p + \left(\frac{1}{\omega_0} p\right)^2$

3. RÉPONSE HARMONIQUE DES SYSTÈMES ÉLÉMENTAIRES.

Gain pur : $H(p) = K$



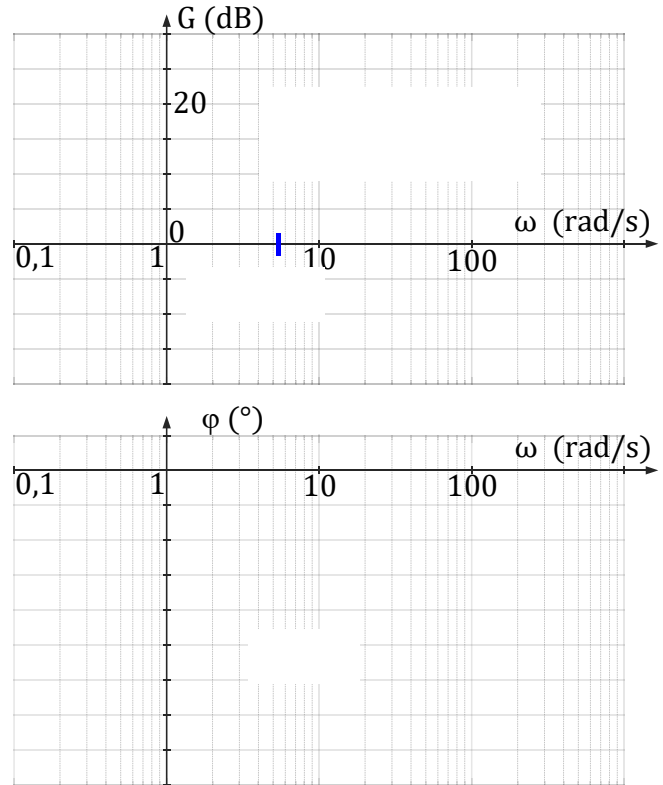
$$H(p) = K \quad \text{soit : } H(j\omega) = K$$

Gain en dB :

$$G_{dB} =$$

Phase en degrés : $\varphi(\omega) =$

Intégrateur : $H(p) = \frac{K}{p}$



$$H(p) = \frac{K}{p} \quad \text{soit : } H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

Gain en dB :

$$G_{dB} =$$

Coupure des abscisses pour $\omega_{co} = K$

Phase en degrés : $\varphi(\omega) =$

Attention : si on a deux intégrateurs $H(p) = \frac{K}{p^2}$, la coupure des abscisses se fera pour $\omega_{co} = \sqrt{K}$.

La pente sera de -40dB/déc et la phase vaudra $\varphi(\omega) = 2 \cdot (-90^\circ) = -180^\circ$.



Sur l'échelle logarithmique en base 10 il n'y a pas d'origine des abscisses. Par conséquent il n'y a jamais de 0 sur l'axe des abscisses et le tracé ne concernera qu'une bande de pulsation qu'il faudra

choisir judicieusement.

4. RÉPONSE HARMONIQUE DE SYSTÈMES DU 1^{ER} ORDRE

Un système d'ordre 1 a pour fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1 + T \cdot p} \quad \text{soit} \quad H(j\omega) = \frac{K}{1 + T \cdot j\omega}$$

Gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega)|) = 20 \cdot \log(K) - 20 \cdot \log(\sqrt{1 + T^2 \omega^2})$

Phase en degrés : $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -\arg(1 + T \cdot j\omega) = -\arctan(T\omega)$

Asymptotes du diagramme de Bode :

- Pour $\omega \rightarrow 0$ $H(j\omega) \approx K \Rightarrow$ équivalent à un comportement de gain pur

$$G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log(|H(j\omega)|) \approx 20 \log K$$

$\Rightarrow$ L'asymptote en 0 du gain est donc une droite horizontale de valeur $20 \log K$.

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = 0$$

$\Rightarrow$ L'asymptote en 0 de la phase est donc une droite horizontale de valeur 0° .

- Pour $\omega \rightarrow \infty$ $H(j\omega) \approx \frac{K}{T \cdot j\omega}$

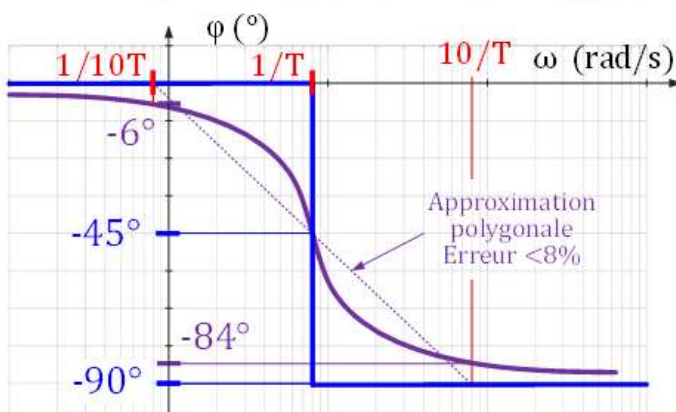
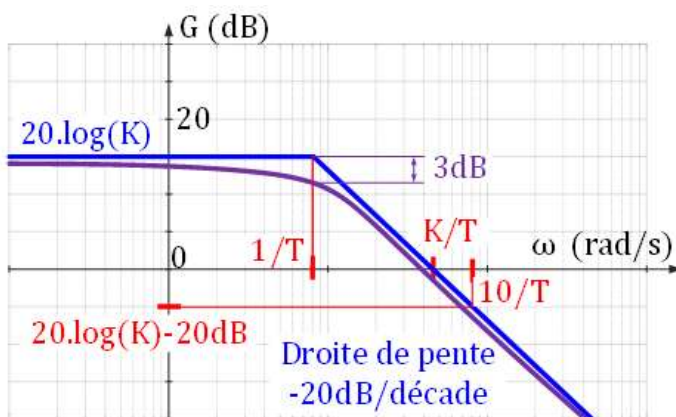
$\Rightarrow$ équivalent à un comportement d'intégrateur.

$$G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log(|H(j\omega)|) \approx 20 \log\left(\frac{K}{T}\right) - 20 \log(\omega)$$

$\Rightarrow$ droite de pente -20 dB/déc .

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$$

$\Rightarrow$ L'asymptote en $+\infty$ de la phase est donc une droite horizontale de valeur -90° .



- Point d'intersection des asymptotes du diagramme du gain :

Ce point a pour abscisse ω_c telle que :

$$20 \log\left(\frac{K}{T}\right) - 20 \log(\omega_c) = 20 \log K \Leftrightarrow \log(\omega_c) = \log\left(\frac{1}{T}\right) \Leftrightarrow \omega_c = \frac{1}{T}$$

- Gain en dB et phase pour $\omega_c = \frac{1}{T}$:

ω_c correspond à la **pulsation de cassure** du diagramme de Bode (intersection des asymptotes).

$$G_{dB}(\omega_c) = 20 \cdot \log(|H(j \cdot \omega_c)|) = 20 \cdot \log\left(\left|\frac{K}{1 + T \cdot j \cdot \frac{1}{T}}\right|\right) = 20 \cdot \log\left(\left|\frac{K}{1 + j}\right|\right)$$

$$G_{dB}(\omega_c) = 20 \log\left(\frac{K}{\sqrt{2}}\right)$$

$$G_{dB}(\omega_c) = 20 \log(K) - 3 \text{ dB}$$

$$\text{et } \varphi(\omega_c) = -\arctan\left(\frac{1}{1}\right) = -45^\circ$$

5. RÉPONSE HARMONIQUE DE SYSTÈMES DU 2ND ORDRE

Un système d'ordre 2 a pour fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2} \quad \text{soit} \quad H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} j\omega + \frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2}$$

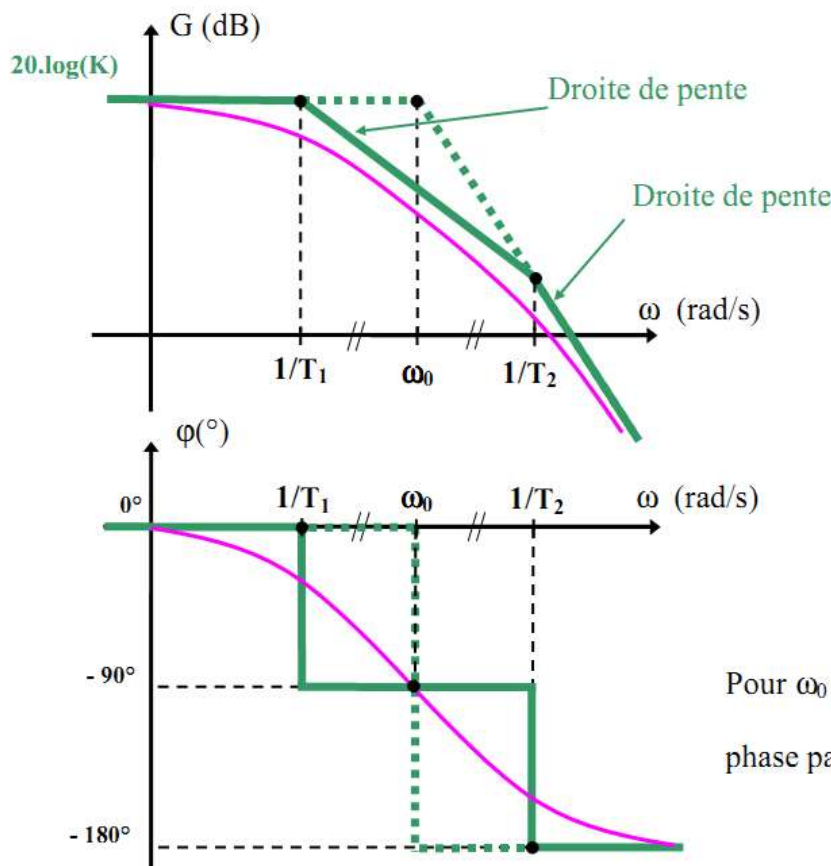
avec : K le gain statique, z le coefficient d'amortissement et ω_0 la pulsation propre du système.

5.1. Cas : $z > 1$ ou $z = 1$

La fonction de transfert présente 2 pôles réels p_1 et p_2 (voir cours Analyse temporelle SLCI ordre 2), distincts ou confondus.

Pour $z > 1$, le système peut être considéré comme le produit de deux systèmes de 1er ordre de constantes de temps $\tau_1 = -\frac{1}{p_1}$ et $\tau_2 = -\frac{1}{p_2}$. On peut donc écrire $H(j\omega)$ sous la forme :

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot j\omega) \cdot (1 + \tau_2 \cdot j\omega)}$$



Pour $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{T_1 \cdot T_2}}$ la courbe de phase passe toujours par -90° .



Le tracé asymptotique se construit en ajoutant les tracés du gain et des deux systèmes du premier ordre construits séparément dans un premier temps.

Pour $z = 1$, la fonction de transfert devient un carré parfait $H(j\omega) = \frac{K}{(1+\tau \cdot j\omega)^2}$ avec $\tau = \frac{1}{\omega_0}$ (seul son tracé asymptotique est représenté en pointillés sur la figure du dessus).

5.2. Cas : $z < 1$

Dans ce cas les pôles sont complexes conjugués. Par ailleurs, le module et l'argument de la réponse harmonique est donné par :

Our le module :

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1\right)^2 + 4z^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (E)$$

Pour la phase :

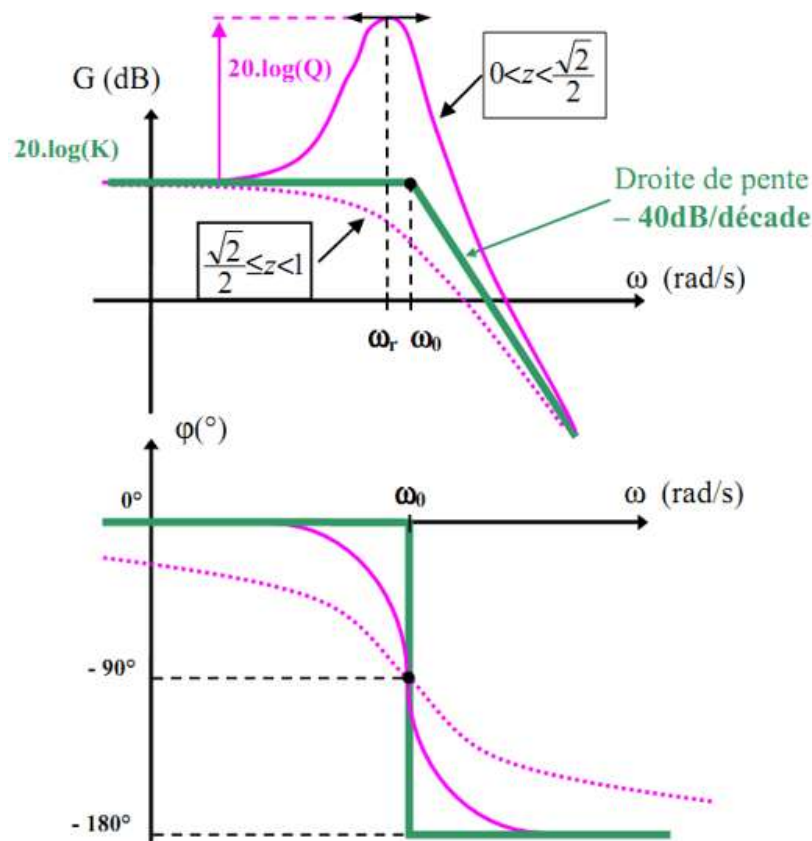
$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}j\omega + \frac{1}{\omega_0^2}(j\omega)^2} = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{2z}{\omega_0}j\omega} = \frac{-j \cdot K}{-j \cdot \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{2z}{\omega_0} \cdot \omega} = -j \cdot \frac{K}{\frac{2z}{\omega_0} \cdot \omega + j \cdot \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)}$$

$$\varphi = -90^\circ - \arctan\left(\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1}{2 \cdot z \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}\right)$$

Pulsation de résonance ω_r

La courbe de gain peut présenter un maximum suivant les valeurs de z . Ce maximum, s'il existe, est obtenu pour la pulsation ω_r tel que le gain soit maximal i.e. $\left[\frac{dG}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_r} = 0$, soit :

$$\left[\frac{d((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot z^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2)}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_r} = 0 \quad \text{ou encore} \quad -4 \cdot \omega_r \cdot (\omega_0^2 - \omega_r^2) + 8 \cdot z^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega_r = 0.$$



On obtient :

$$\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot z^2} \quad \text{si } z < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La pulsation ω_r est appelée **pulsation de résonance**.

Ce maximum est alors caractérisé par le **coefficient de surtension Q** :

$$Q = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(0)|} = \frac{1}{2 \cdot z \cdot \sqrt{1 - z^2}}$$

Ne pas confondre la résonance (analyse fréquentielle) et le dépassement (analyse temporelle C11).



Remarque : Les courbes définies par le diagramme de Bode restent très proches de leurs asymptotes sauf au voisinage du point d'intersection des asymptotes. C'est pourquoi on les trace en deux temps, tracé des asymptotes puis tracé des courbes réelles avec quelques points particuliers.



L'équation (E) est valable quelque soit z . On a donc pour $\omega = \omega_0$, $|H(j.\omega_0)| = \frac{K}{\sqrt{0+4z^2.(1)^2}} = \frac{K}{2.z}$

Pour $\omega = \omega_0$, $\forall z > 0$, $G_{dB}(\omega_0) = 20.\log\left(\frac{K}{2.z}\right)$. Le calcul de z est plus simple mais un peu moins précis.

Les 2 figures ci-dessous montrent l'influence du facteur d'amortissement $\xi = z$ sur la phase et le gain :

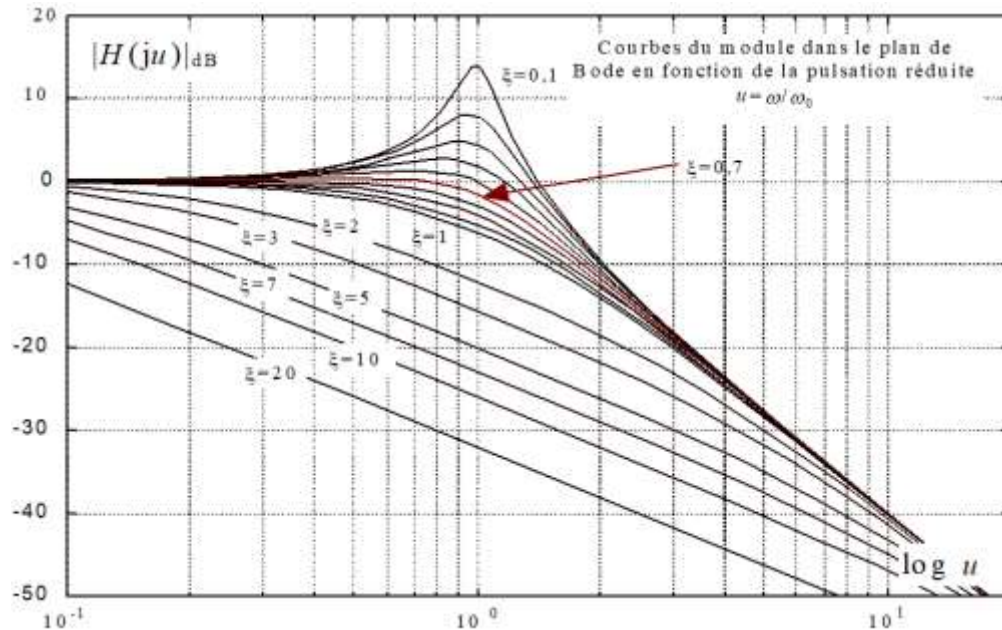


Figure 1 : Influence du coefficient d'amortissements sur le gain.

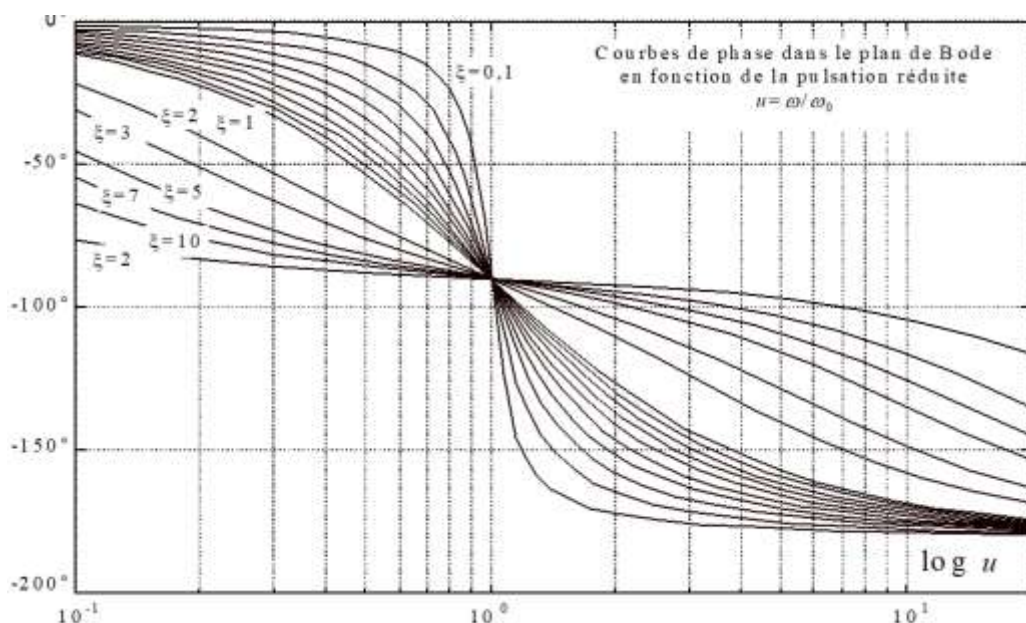
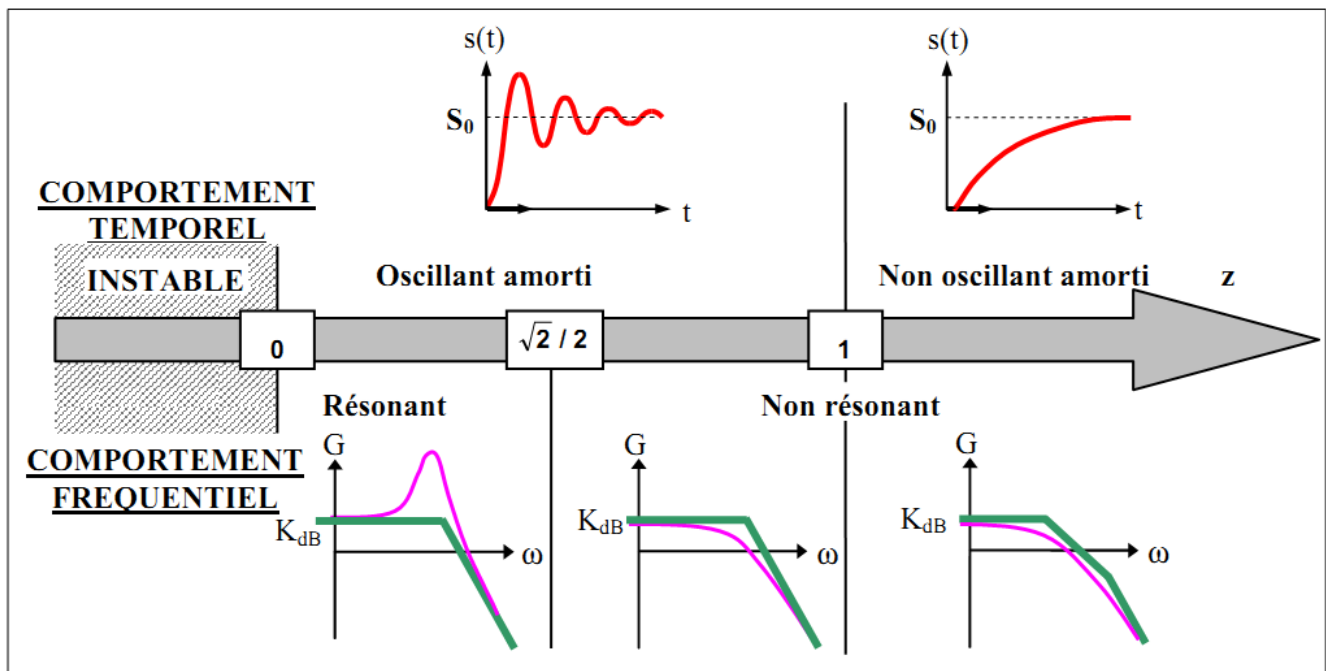


Figure 2 : Influence du coefficient d'amortissement sur la phase.

Synthèse sur les comportements fréquentiels et temporels du 2nd ordre (à connaître)6. GÉNÉRALISATION : DE $H(p)$ QUELCONQUE AUX DIAGRAMMES DE BODE

6.1. Principe

Le principe de tracé d'un diagramme de Bode consiste à factoriser le numérateur et le dénominateur de $H(j\omega)$ suivant la nature des pôles et des zéros. Cette technique permet de décomposer $H(j\omega)$ en un produit de fonctions de transfert élémentaires bien connues et faciles à tracer dans Bode.

Pour cela, on propose de retenir la forme générique suivante d'une fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\alpha} \cdot \frac{\prod_m (1 + T_m \cdot j\omega)}{\prod_n (1 + T_n \cdot j\omega)} \cdot \frac{\prod_k \left[1 + \frac{2z_k}{\omega_{0k}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0k}} \cdot j\omega \right)^2 \right]}{\prod_p \left[1 + \frac{2z_p}{\omega_{0p}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0p}} \cdot j\omega \right)^2 \right]}$$

Diagram labels and annotations:

- Gain pur**: Points to K .
- Intégrateur**: Points to $(j\omega)^\alpha$.
- Produit d'inverses de 1^{er} ordre**: Points to the numerator $\prod_m (1 + T_m \cdot j\omega)$.
- Produit de système de 1^{er} ordre**: Points to the denominator $\prod_n (1 + T_n \cdot j\omega)$.
- Produit d'inverses de 2^{ème} ordre**: Points to the numerator $\prod_k \left[1 + \frac{2z_k}{\omega_{0k}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0k}} \cdot j\omega \right)^2 \right]$.
- Produit de système de 2^{ème} ordre**: Points to the denominator $\prod_p \left[1 + \frac{2z_p}{\omega_{0p}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0p}} \cdot j\omega \right)^2 \right]$.



Si $H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p)$ alors $20 \cdot \log |H(j\omega)| = 20 \cdot \log |H_1(j\omega)| + 20 \cdot \log |H_2(j\omega)|$

L'échelle en dB permet de transformer le produit des modules en une somme. Tout comme ce qui a été fait avec dans les cours précédents avec le principe de superposition, on peut donc tracer séparément les diagrammes de Bode de chaque fonction de transfert élémentaire qui compose $(j\omega)$, puis faire la somme des modules et des arguments afin d'obtenir le diagramme de Bode final qui correspondra au comportement fréquentiel du système $H(j\omega)$.

Le module de $H(j\omega)$ est alors le produit des modules de chaque fonction de transfert élémentaire et l'argument, la somme des arguments de chaque fonction de transfert élémentaire :

$$\arg(H(j\omega)) = \arg\left(\frac{K}{(j\omega)^\alpha}\right) + \sum_m \arg(1 + T_m \cdot j\omega) + \sum_k \arg\left(1 + \frac{2z_k}{\omega_{0k}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0k}} \cdot j\omega\right)^2\right) - \sum_n \arg(1 + T_n \cdot j\omega) - \sum_p \arg\left(1 + \frac{2z_p}{\omega_{0p}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0p}} \cdot j\omega\right)^2\right)$$



$$\arg\left(\frac{1}{1 + T_m \cdot j\omega}\right) = -\arg(1 + T_m \cdot j\omega)$$

6.2. Méthode

1. **Mettre $H(p)$ sous la forme canonique** ci-dessus. Factoriser la fonction de transfert comme produits d'éléments simples du 1^{er} et 2^{ième} ordre ou de leurs inverses, d'un gain et d'intégrateurs multiples.
2. Classer les pulsations de cassure dans un ordre croissant ($1/T_i$ pour un 1^{er} ordre et ω_{0i} pour un 2nd ordre). Les cassures du tracé asymptotique correspondront alors à ces pulsations.
3. Pour $\omega \approx 0$, construire le diagramme de Bode de $H(j\omega) \approx K/(j\omega)^\alpha$, puis successivement en avançant vers les pulsations croissantes, faire intervenir les pôles et les zéros selon l'ordre précédent en utilisant les constructions asymptotiques.
4. Affiner le tracé asymptotique en combinant les courbes réelles.



Il est parfois suffisant pour analyser la réponse d'un système de tracer seulement le diagramme de Bode asymptotique.

6.3. Exemples

EXEMPLE 1 : Soit la fonction de transfert, $H(p) = \frac{(0,63+5,67 \cdot p)^2}{p^2+0,55 \cdot p^3+0,025 \cdot p^4}$

① **Celle-ci doit d'abord être écrite sous forme canonique :**

$$H(p) = \frac{0,63^2 \cdot (1 + 9 \cdot p)^2}{p^2 \cdot (1 + 0,05 \cdot p) \cdot (1 + 0,5 \cdot p)} = \frac{0,63^2}{p^2} \cdot (1 + 9 \cdot p)^2 \cdot \frac{1}{1 + 0,5 \cdot p} \cdot \frac{1}{1 + 0,05 \cdot p}$$

② Classement des pulsations de coupures :

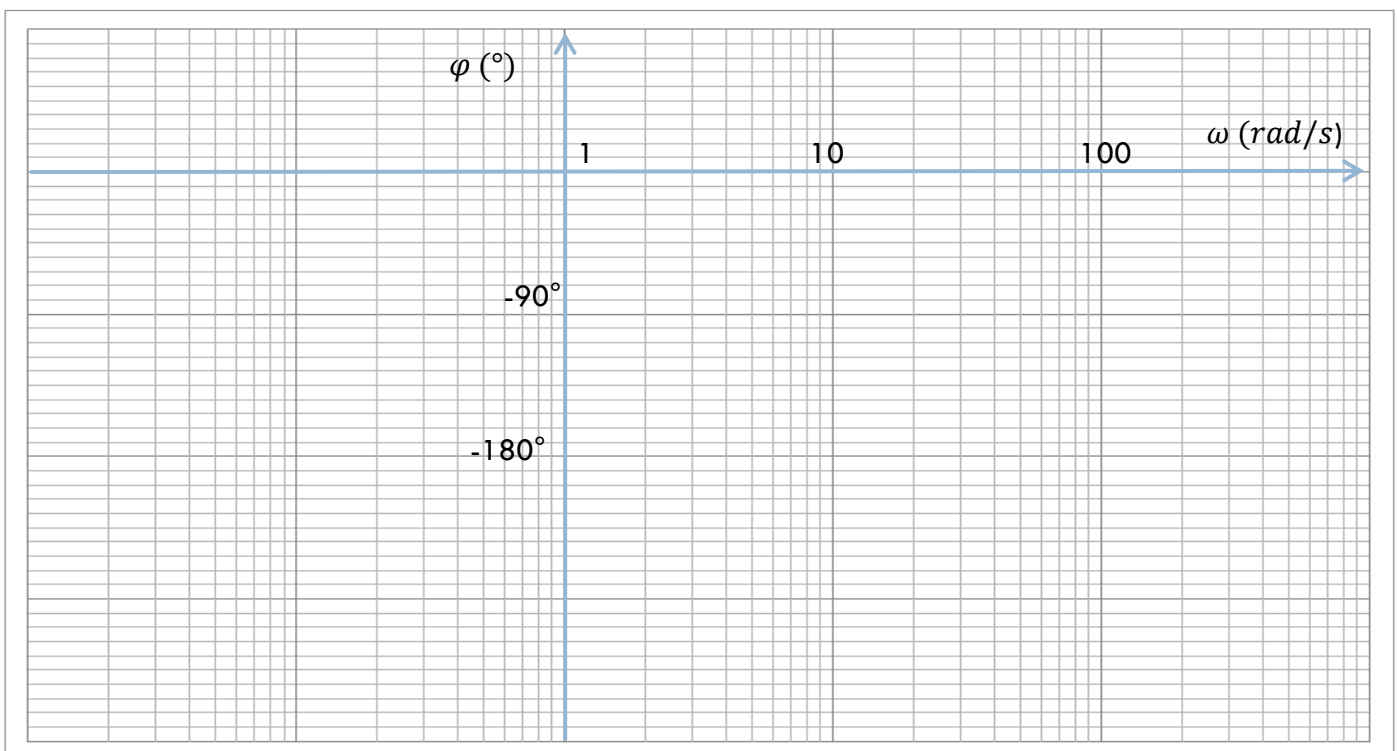
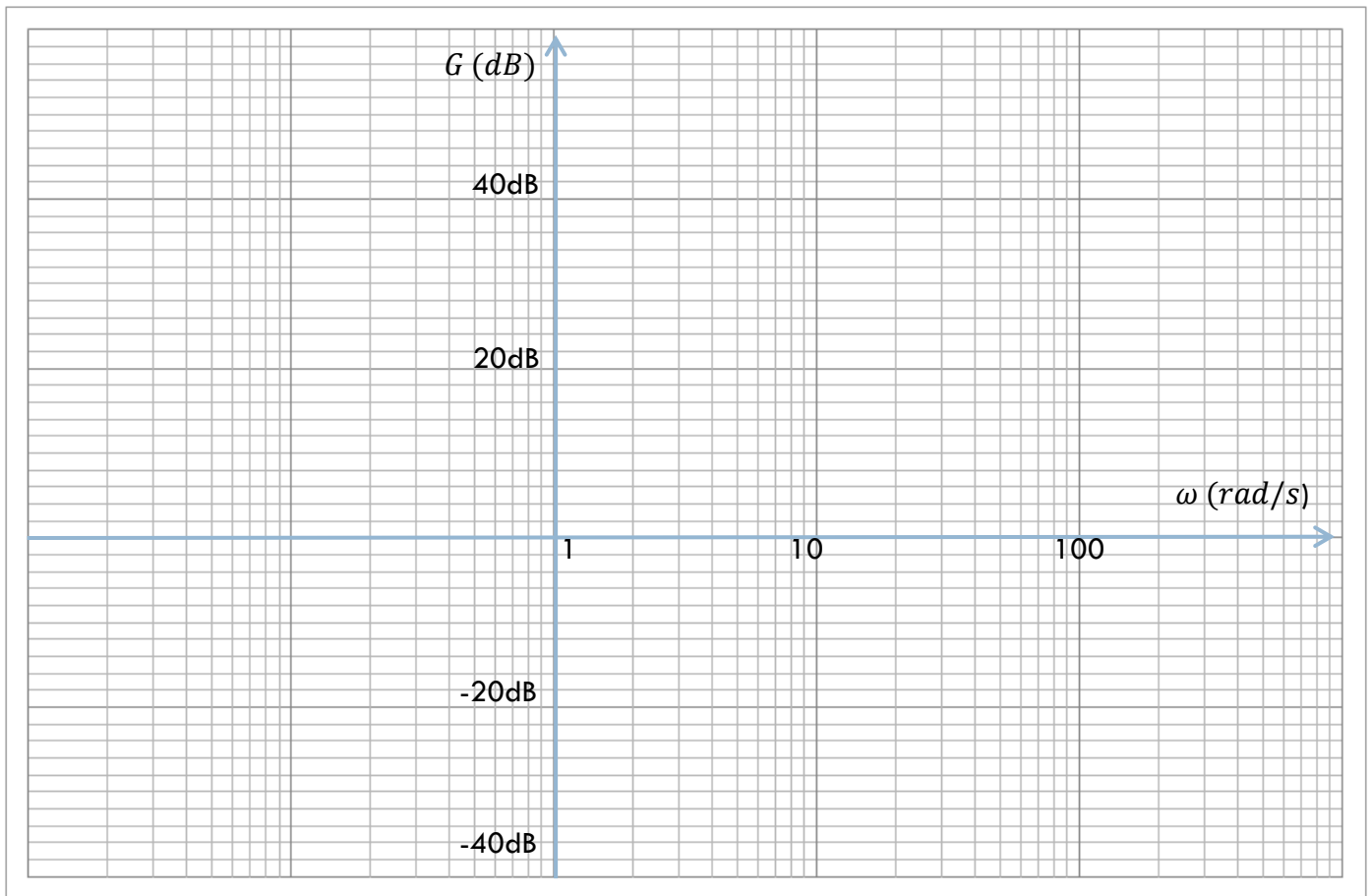
- $\tau_1 =$ (soit $\omega_1 =$) ;
- $\tau_2 =$ (soit $\omega_2 =$) ;
- $\tau_3 =$ (soit $\omega_3 =$).



$H(p)$ écrite selon les ω croissants

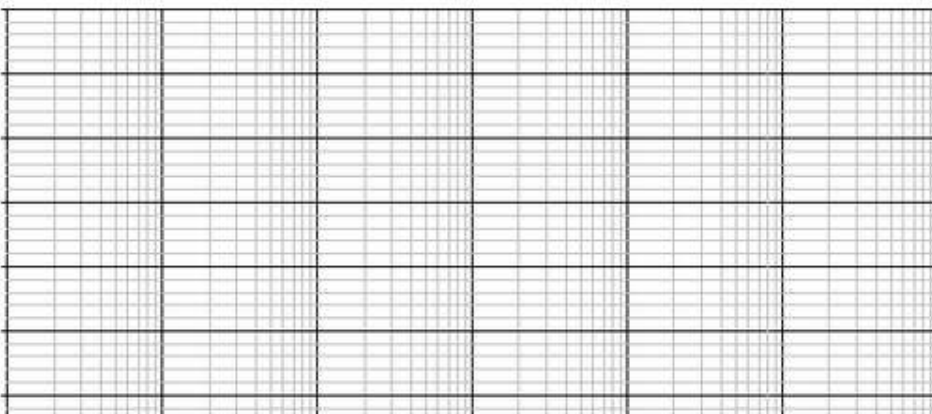
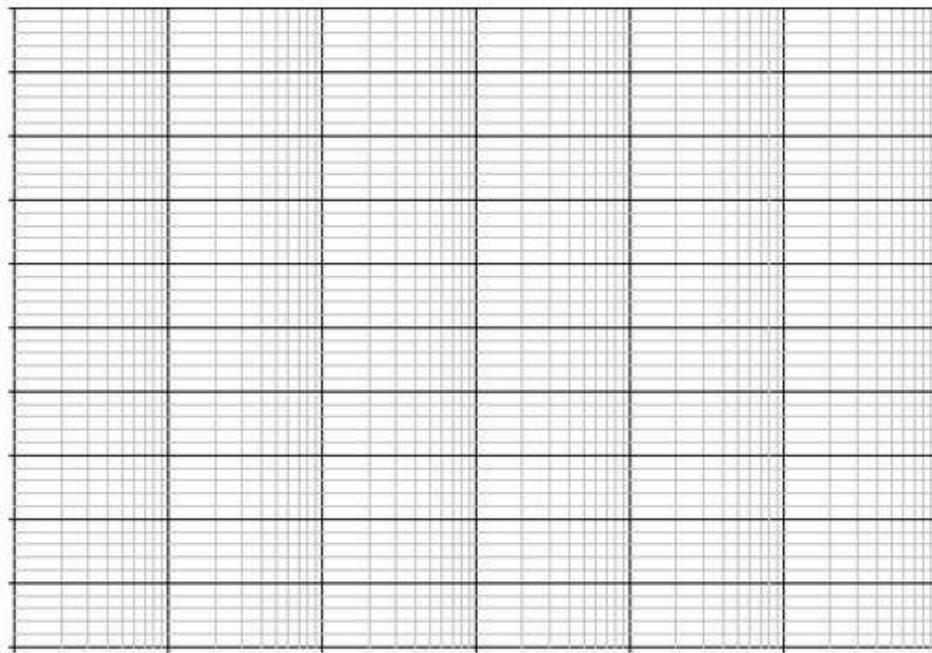
③ **On commence par les intégrateurs**, à gauche ($p = j \cdot \omega$ petit), donc les asymptotes de gain et de phase pour les intégrateurs $\frac{0,63^2}{p^2}$. Puis, successivement, en avançant vers les ω croissants, on fait intervenir les termes du double 1^{er} ordre inverse $(1 + 9 \cdot p)^2$ puis du 1^{er} ordre $\frac{1}{1+0,5 \cdot p}$ et enfin du 1^{er} ordre $\frac{1}{1+0,05 \cdot p}$.

④ Puis, on affine le tracé réel en calculant quelques points particuliers. Ici, on ne construira que le tracé asymptotique car tracer à la main la courbe réelle n'a plus vraiment de sens compte tenu des outils informatiques actuels ...



EXEMPLE 2 : Soit la fonction de transfert,

$$H(p) = \frac{9 + 18.p}{3 + 0,2.p + 0,03.p^2}$$



EXEMPLE 3 : Le comportement d'un moteur est décrit par le second ordre qui suit,

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{U_A(p)} = \frac{42}{1,667 \cdot p^2 + 2,5 \cdot p + 15}$$

Fréquentielle versus Temporelle

Approche fréquentielle : $H(p)$

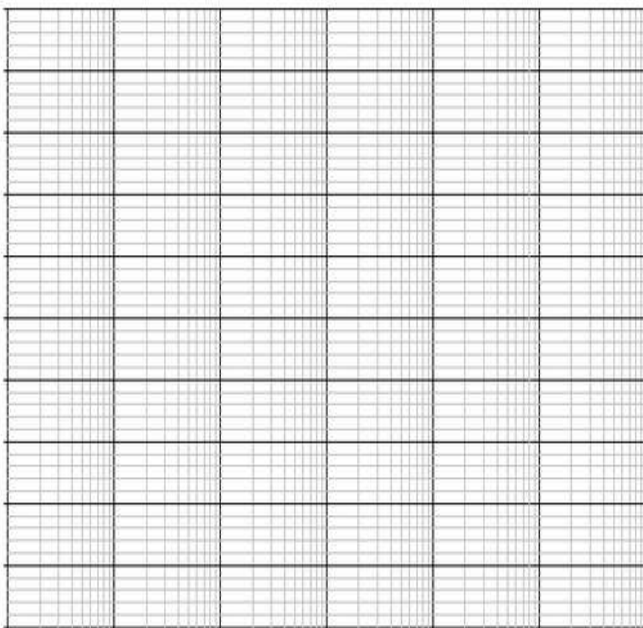
Ecrire la forme canonique :

Déterminer K , ω_0 et z :

Calculer la pulsation de résonance :

Calculer la surtension :

Tracer la courbe de gain :



Approche temporelle : $s(t)$

(réponse à un échelon de tension $u_A(t) = 12 \cdot u(t)$)

A partir des valeurs de K , z et ω_0 ,

Calculer la pseudo-pulsation et la pseudo-période :

Calculer l'instant et la valeur du premier dépassement :

Calculer le temps de réponse à 5 % (abaque du C11) :

Tracer l'allure de la réponse indicielle :



7. DES DIAGRAMMES DE BODE (GAIN ET PHASE) A H(P)

Déterminer $H(p)$ à partir des diagrammes de Bode est une méthode qui conduit à l'obtention de la forme canonique de $H(p)$:

$$H(j\omega) = \frac{\text{Gain pur} \cdot \prod_m (1 + T_m \cdot j\omega)}{\text{Intégrateurs} \cdot \prod_n (1 + T_n \cdot j\omega)} \cdot \frac{\prod_k \left(1 + 2z_k \frac{j\omega}{\omega_{0k}} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{0k}^2}\right)}{\prod_i \left(1 + 2z_i \frac{j\omega}{\omega_{0i}} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{0i}^2}\right)}$$

Diagramme de Bode structurel avec annotations :

- Gain pur** : K
- Intégrateurs** : $(j\omega)^\alpha$
- 1^{er} ordre inverses** : $\prod_m (1 + T_m \cdot j\omega)$
- Systèmes du 1^{er} ordre** : $\prod_n (1 + T_n \cdot j\omega)$
- 2^{ème} ordre inverse** : $\prod_k \left(1 + 2z_k \frac{j\omega}{\omega_{0k}} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{0k}^2}\right)$
- Systèmes du 2^{ème} ordre** : $\prod_i \left(1 + 2z_i \frac{j\omega}{\omega_{0i}} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{0i}^2}\right)$

C'est un point important à comprendre car pour ω petit (la gauche des diagrammes), $H(j.\omega) \approx \frac{K}{(j.\omega)^\alpha} \cdot 1$

On détecte ainsi la présence d'intégrateurs ($\frac{K}{p^\alpha}$) ou de dérivateur ($K.p^\beta$) ou éventuellement un gain pur (K).

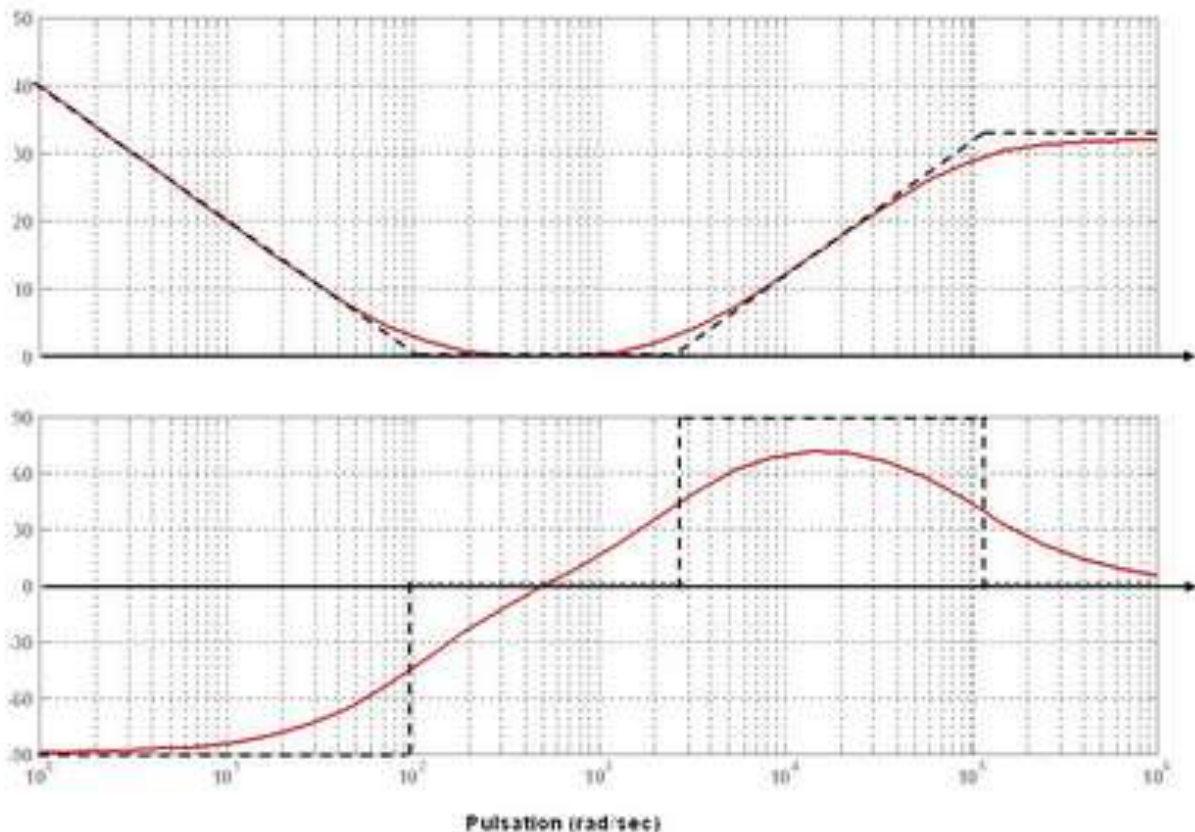
On observe alors :

- les pentes asymptotiques qui sont toujours des multiples de $\mp 20 \text{ dB/déc}$
- les asymptotes horizontales des phases qui sont toujours des multiples de $\mp 90^\circ$.

Ces informations couplées avec la présence de cassure et de résonances nous orientent vers la forme générale de la fonction $H(p)$ recherchée.

EXEMPLE 1 :

Diagrammes de Bode



- Pour les ω petits, le système présente une pente de -20 dB/déc et une phase de -90°, il y a donc 1 intégrateur et $H(p) = \frac{K}{p^1} \dots$ avec K calculé par exemple pour $\omega = 1$ ou l'intersection de l'axe des abscisses

$$\text{On lit } 20 \cdot \log \frac{K}{1} = 40 ;$$

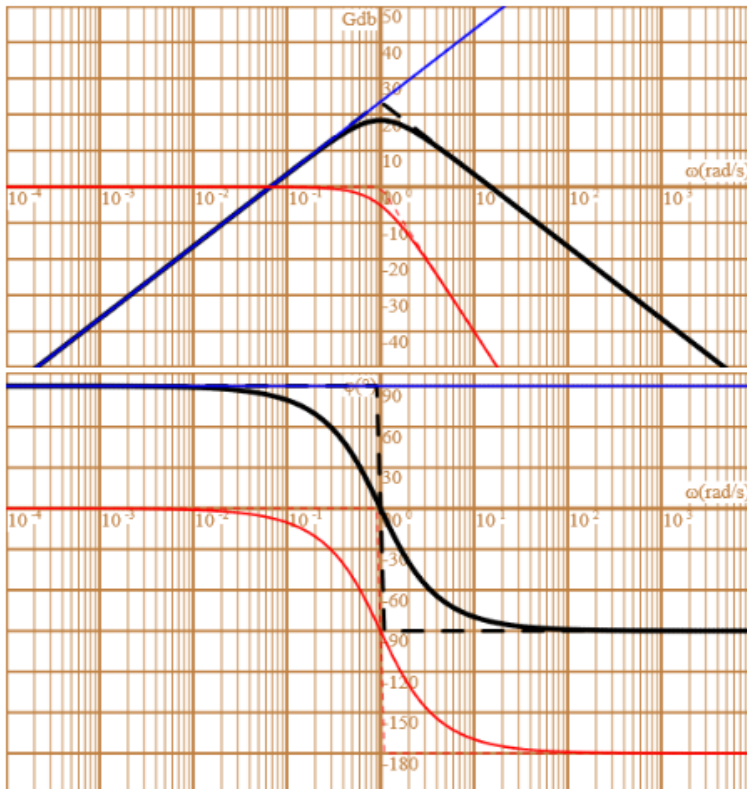
soit $K = 100$ (ou directement à l'intersection)

- Ensuite, pour un certain ω , la pente devient nulle (-20+20) et la phase remonte vers zéro (-90+90). C'est la présence d'un 1^{er} ordre inverse $H(p) = \frac{K}{p} \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) \dots$ Par ailleurs, pour un 1^{er} ordre inverse, la cassure a lieu pour $\varphi = +45^\circ$. Du fait de l'intégrateur, la cassure aura lieu pour $\varphi = +45 - 90 = -45^\circ$. On lit ainsi $\omega_1 = 10^2 \text{ rad/s}$ d'où $\tau_1 = 0,01 \text{ s}$.
- Puis à nouveau une pente à +20 dB et une phase qui monte vers +90°. C'est encore un 1^{er} ordre inverse avec une cassure pour $\varphi = +45^\circ$, on lit ainsi $\omega_2 \approx 2800 \text{ rad/s}$ d'où $\tau_2 = 1/2800 \text{ s}$

$$\text{soit } H(p) = \frac{K}{p} \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p) \dots$$

- Enfin, le plat final ($\omega_3 \approx 10^5 \text{ rad/s}$) indique un 1^{er} ordre, in fine, $H(p) = \frac{K}{p} \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p) \cdot \frac{1}{1 + \tau_3 \cdot p}$.

EXEMPLE 2 :



Les courbes en noire modélisent le système.

- On détecte la présence d'un dérivateur (ω petit) $H(p) \approx K \cdot p$ et pour $\omega = 0,01$ on lit:

$$20 \cdot \log(K \cdot 0,01) \approx -17$$

$$\text{soit } 20 \cdot \log K - 40 \approx -17 \text{ d'où } 20 \cdot \log K \approx 23$$

$$K \approx 10^{\frac{23}{20}} = 14,1$$

(ou intersection à $\frac{1}{K} \approx 0,07 \Leftrightarrow K \approx 14,3$)

- La pente est ensuite de -20 dB/déc (+20-40) et la phase chute vers -90° (90-180). On a donc la manifestation d'un 2nd ordre. Avec une seule cassure $z < 1$ et pas de résonance ($z > \frac{\sqrt{2}}{2}$). ω_0 est déterminée lorsque $\varphi = -90^\circ$ pour un 2nd ordre seul. La présence du dérivateur conduit à chercher ω_0 lorsque $\varphi = 0^\circ$ (-90 + 90).

Donc $\omega_0 =$

$$\text{et, } H(p) = K \cdot p \cdot \frac{1}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} \quad (\text{non résonant}).$$

S'il y a résonance, on peut calculer z en calculant la surtension Q à partir de la lecture de $20 \cdot \log Q$ sur le diagramme et $Q = \frac{1}{2z \cdot \sqrt{1-z^2}}$ avec $z < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque 1 : En l'absence de résonance, mais pas seulement, on calcule le gain de $H(j.\omega)$ pour $\omega = \omega_0$.

Des simplifications s'opèrent (voir en bas de la page 7/16) et on trouve que $20.\log(|H(j.\omega_0)|) = 20.\log\left(K.\omega_0.\frac{1}{2.z}\right)$. En lisant, $20.\log(|H(j.\omega_0)|) \approx 18,4$, on trouve $z = 0,9$ (conforme au pronostic).

Remarque 2 : Vu la composition des fonctions $H(p)$, il faut chercher les cassures pour des phases multiples de $\pm 45^\circ$ soit 0° ; $\pm 45^\circ$; $\pm 90^\circ$; $\pm 135^\circ$ ($-180+45$) ; ...

Remarque 3 : Pour tracer les diagrammes de Bode à partir de $H(p)$ il **faudrait impérativement la mettre sous forme canonique**.

Compétences attendues :

- connaître les diagrammes de Bode de toutes les fonctions de transfert élémentaires ;
- connaître la forme canonique d'un 1^{er} ordre ;
- connaître les constructions graphiques sur les diagrammes de Bode permettant de déterminer K et τ pour un 1^{er} ordre ainsi que ses particularités (pente, valeurs de φ , ...) ;
- connaître les formes canoniques d'un 2nd ordre ;
- connaître le type (réels, complexes) des pôles en fonction de z ;
- connaître les constructions graphiques sur les diagrammes de Bode et les relations permettant de déterminer K , z et ω_0 pour un 2nd ordre ainsi que ses particularités (pente, résonance, valeurs de φ , ...) ;
- connaître les valeurs particulières de z et leur sens ;
- connaître la forme canonique dans le cas générale (page 9/16) ;
- connaître la démarche pour tracer les diagrammes de Bode d'une fonction $H(p)$ quelconque ;
- connaître la démarche pour reconstruire une fonction $H(p)$ à partir de ses diagrammes de Bode.