# C13 – Modélisation et démarche de détermination des actions mécaniques agissant sur un système matériel



**Compétences attendues :**

- Construire le graphe de structure ;
- Modéliser une action mécanique *quelconque* directement par un torseur dans le cas des actions caractérisées, des actionneurs ou des liaisons (avec point de réduction, éléments de réduction et base d'expression) ou après intégration dans le cas d'une densité d'effort ;
- Torseur glisseur (et son axe central) et torseur couple ;
- Distinguer actions extérieures et intérieures ;
- Distinguer actions de contact et à distance ;
- Développer la démarche statique (choix de l'isolement selon les actions à déterminer, bilan des actions mécaniques extérieures, choix du point de calcul, résoudre).

## 1. SYSTÈMES MATÉRIELS ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

La modélisation proposée dans ce cours vise à faciliter l'intégration des actions mécaniques dans l'écriture des **Lois de l'Equilibre**. En effet, lorsqu'un **système matériel** est en équilibre par rapport à un repère galiléen, alors **deux lois** sont vérifiées :

- La somme vectorielle des forces extérieures appliquées sur le système est nulle ;
- La somme vectorielle des moments extérieurs appliqués sur le système, calculé en un point quelconque, est nulle.

La notion d'actions mécaniques ne se résume donc pas à une force **ou** un moment

mais à **une force ET un moment (qui dépendra du point de calcul)**.

## 1.1.Systèmes matériels

Un système matériel est le nom donné en Mécanique à tous types de structures naturelles ou artificielles (objet technique).

Il peut être constitué d'un fluide (liquide ou gaz), d'un solide (éventuellement déformable comme un ressort) ou d'un ensemble de ces systèmes matériels.

En Statique et en Dynamique, l'interaction entre les systèmes matériels est prise en compte par la modélisation d'actions mécaniques **de contact ou à distance** (on dit aussi **surfacique ou volumique**).

L'étude d'un système matériel mobilise donc, en général, différents domaines de la Mécanique.

Le tableau qui suit propose un cadre de résolution de problèmes de mécanique :

<table>
<tr><td colspan="6">1. Problématique de départ :<br>Calcul d'une action mécanique, d'une pression, d'une température, d'une flèche, d'une vitesse, d'une quantité de chaleur, … en vue de dimensionner une structure ou vérifier ses performances</td></tr>
<tr><td colspan="6">2. En relation avec les données techniques disponibles (valeurs, courbes, diagrammes, abaques, Schéma de fonctionnement, …)<br>→ Mobilisation du ou des champs pertinents par rapport à la problématique</td></tr>
<tr><td colspan="6">3. Application des démarches spécifiques à chaque domaine et modèles de connaissances</td></tr>
<tr><td>Statique<br><br>Equations</td><td>Cinématique<br><br>Equations</td><td>Cinétique<br>Dynamique<br><br>Equations</td><td>Energétique<br>Thermodynamique<br><br>Equations</td><td>RdM<br>MMC<br><br>Equations</td><td>Lois particulières données par le constructeur du ou des composant(s)<br><br>Equations</td></tr>
<tr><td colspan="6">4. Synthèse d'un système d'équations pertinent</td></tr>
<tr><td colspan="6">5. Résolution du problème, vérification des résultats</td></tr>
</table>

Le cœur de la réflexion est le point 2.

Le point 3 suppose l'acquisition de savoirs élaborés en cours et TD.

Les points 4 et 5 sont essentiellement calculatoires (maîtrise des mathématiques).

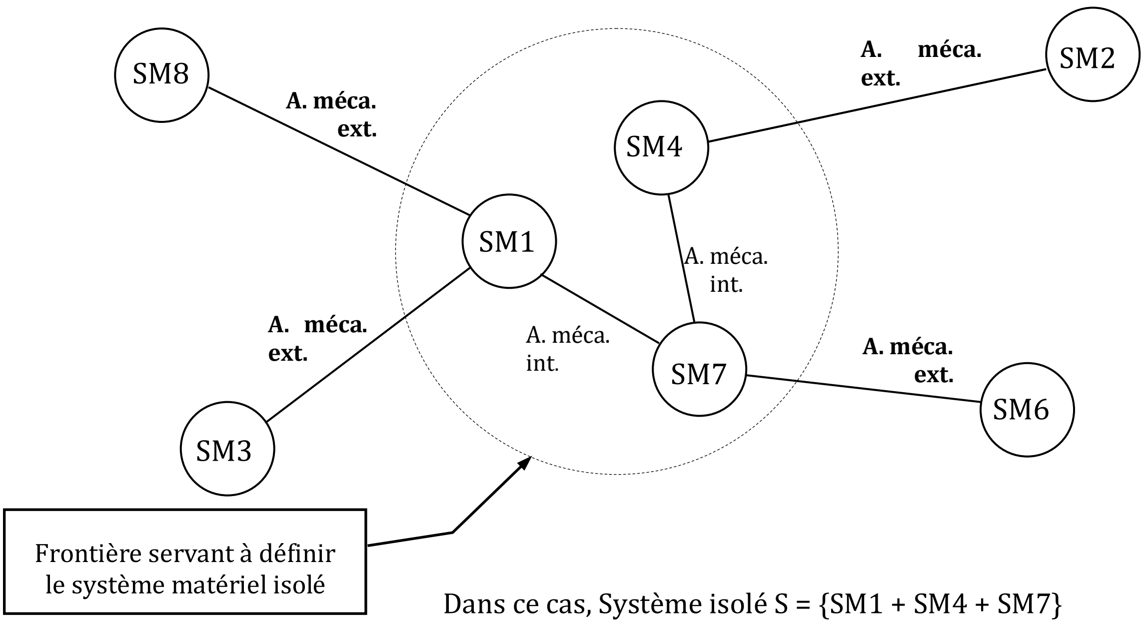
**Calcul de structure et calcul de la pression d'alimentation du vérin actionneur par simulation**

**Schéma du train dans différentes positions**

### 1.2. Actions mécaniques extérieures, intérieures et isolement d'un système matériel en statique

Dans la démarche statique, il est nécessaire de faire la liste (bilan) des **actions mécaniques appliquées de l'extérieur** sur le système matériel étudié.

Pour cela, on tracera sur le **graphe de structure** (graphe des liaisons + actions mécaniques) une frontière séparant le système matériel à étudier des autres systèmes matériels agissant sur lui.




Dans ce cas, Système isolé S = {SM1 + SM4 + SM7}

Seules les **actions mécaniques extérieures** sur S participent au bilan qui vérifient les Lois de l'équilibre :

## 2. ORIGINE DES ACTIONS MÉCANIQUES : DENSITÉ D'EFFORT $\Omega_f(M)$

### 2.1. Description locale (ou mésoscopique) et globale (ou macroscopique)

#### 2.1.1. La force en Newton (N) peut avoir **deux origines** mésoscopiques :

- ***Surfacique*** (ou ***de contact*** $\Omega_f(M)$ *classiquement nommée pression* $p(M)$), on a alors la force résultante $\vec{F}_{i\to j}$ , des forces élémentaires de pression $\overrightarrow{df(M)} = \overrightarrow{\Omega_f(M)}.dS$, égale par intégrale double à :

Vecteur Force élémentaire : **description locale**

$$\vec{F}_{i\to j} = \iint_S \underbrace{\overrightarrow{\Omega_f(M)}}.dS$$

Vecteur Force du $SM_i$ sur le $SM_j$ : **description globale**

Densité surfacique d'effort $\Omega_f(M) = p(M)$ en **N/m²**

- ***Volumique*** (ou ***à distance*** associé en général au champ de pesanteur), on a alors la force résultante $\overrightarrow{F_{i\to j}}$, des forces élémentaires $\overrightarrow{df(M)} = \overrightarrow{\Omega_f(M)}.dV$ , égale par intégrale triple à :

$$\vec{F}_{i\to j} = \iiint_V \underbrace{\overrightarrow{\Omega_f(M)}}_{\text{Densité volumique d'effort en } \mathbf{N/m^3}}.dV$$

Dans le cas du champ de pesanteur $\overrightarrow{\Omega_f(M)} = \overrightarrow{g(M)}.\rho$.

### 2.1.2.Le moment en Newton.mètre (N.m) peut avoir **deux origines** mésoscopiques :

- ***Surfacique*** (ou ***de contact***), on a alors le moment résultant (description globale) en un point A quelconque égal, par intégration, à :

$$\vec{M}_{i\to j}(A) = \iint_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Omega_f(M)}.dS$$

- ***Volumique*** (ou ***à distance*** associé en général au champ de pesanteur), on a alors le moment résultant en un point A quelconque égale par intégration à :

$$\vec{M}_{i\to j}(A) = \iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Omega_f(M)}.dV$$

Remarque : On peut aussi définir une *densité linéique d'effort* $\Omega_f(M)$ *en* $(N/m)$ pour des structures de grande longueur L (pont, flèche de grue, ...).
On a alors une intégrale simple, $\vec{F}_{i\to j} = \int_L \overrightarrow{\Omega_f(M)}.dL$ et $\vec{M}_{i\to j}(A) = \int_L \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Omega_f(M)}.dL$

**En résumé :**

| **Densité d'effort en un point M : $\Omega_f(M)$ et unité** | | **Force : $\vec{F}_{i\to j}$** | **Moment en A : $\vec{M}_{i\to j}(A)$** |
|---|---|---|---|
| Linéique | | $\int_L \overrightarrow{\Omega_f(M)}.dL$ | $\int_L \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Omega_f(M)}.dL$ |
| Surfacique (pression) | | $\iint_S \overrightarrow{\Omega_f(M)}.dS$ | $\iint_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Omega_f(M)}.dS$ |
| Volumique | | $\iiint_V \overrightarrow{\Omega_f(M)}.dV$ | $\iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Omega_f(M)}.dV$ |

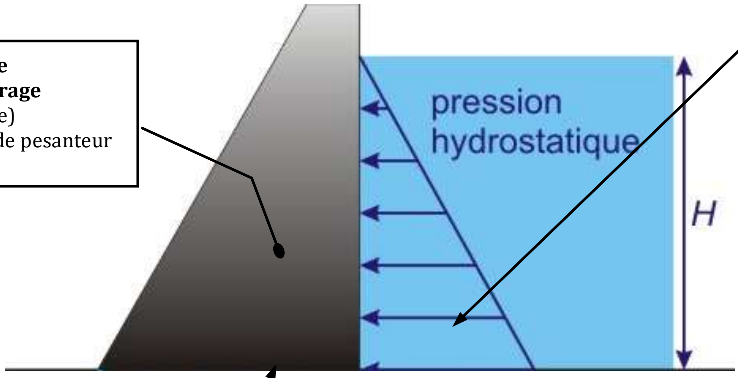
Les Tds associés à ces calculs intégraux se feront un peu plus tard.

### 2.1.3. Exemple : Barrage poids

On **isole** le barrage. Les actions mécaniques extérieures sont alors :

**Action de Terre⟶barrage**
(à distance)
Induit par le champ de pesanteur

**Action de l'eau⟶barrage**
(contact)
Répartition affine




**Action du sol⟶barrage (contact)**
On parle de la sous pression. Sa répartition dépend de la présence d'un mur d'étanchéité et de drainages

Le barrage (système isolé) est en équilibre sous l'action de 3 actions mécaniques extérieures de contact ou à distance. Ces 3 actions mécaniques constituent le **Bilan des Actions Mécaniques Extérieures** (**BAME**) sur le barrage.

# 3. ÉCRITURE GÉNÉRALE DES ACTIONS MÉCANIQUES ET MODÈLE TORSEUR

L'action mécanique d'un système matériel 2 sur un système matériel 3 peut être décrite par un torseur. On donnera les deux vecteurs (force **et** moment(A)), le point de calcul A et la base d'expression $\mathcal{B}$.

Ainsi, l'action mécanique d'un système matériel 2 sur un système matériel 3 écrite en un point A sera :

Ecriture simplifiée signifiant : **Action mécanique du système matériel 2 sur le système matériel 3**

Vecteur **FORCE** de 2 sur 3 (résultante des forces)

$$\{T_{(2\to 3)}\} : {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to 3}} \\ \overrightarrow{M_{2\to 3}(A)} \end{Bmatrix}$$

**Point de réduction** ou de calcul du moment (on prend le plus simple).

Vecteur **MOMENT** calculé au point A des actions de 2 sur 3.

Pour les besoins de nos calculs, nous écrirons aussi les actions mécaniques par leurs **composantes** dans une base $\mathcal{B}$: $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Elles constituent en fait les inconnues d'actions mécaniques que la démarche statique va permettre de déterminer.

$$\{T_{(2\to 3)}\} : \begin{array}{c} \overrightarrow{A_{2\to 3}} \quad \overrightarrow{M_{2\to 3}(A)} \\ {}_A\begin{Bmatrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & N_{23} \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} \end{array}$$

Par ailleurs, les actions mécaniques obéissent aux règles de calculs propres aux torseurs. On pourra écrire :

$$\overrightarrow{M_{2\to 3}(B)} = \underbrace{\overrightarrow{M_{2\to 3}(A)}}_{\substack{Moment\ pré-existant \\ au\ point\ A}} + \underbrace{\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{2\to 3}}}_{\substack{moment\ additionnel\ dû \\ au\ levier\ \overrightarrow{BA} \\ et\ à\ la\ force\ \overrightarrow{R_{2\to 3}}\ entre\ 2\ et\ 3}}$$

Il est important d'avoir à l'esprit qu'un moment est le produit d'un levier par une force, affecté d'un signe selon le sens direct ou indirect. Le levier est la distance perpendiculaire à la force issue du point de calcul du moment et reliant la force.

Vocabulaire : La résultante (force) et le moment constituent les **éléments de réduction** d'un torseur.

# 4. MODÉLISATION D'ACTIONS MÉCANIQUES CLASSIQUES OU CARACTÉRISÉES

La plupart des actions mécaniques s'écrivent directement avec un torseur sans avoir besoin de procéder à des intégrations.

## 4.1.Actions mécaniques dues au champ de gravité

L'action de la Terre sur un système (notons-le **1**) est donc composée d'une force (le poids de norme $P = m.g$) et d'un moment.

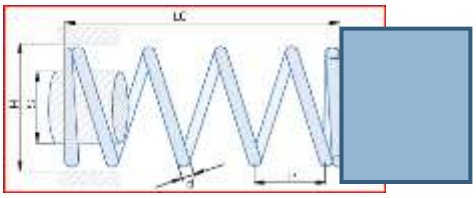
Cependant, il existe un **point particulier** où les actions de pesanteur se limitent à une force (le poids). C'est le **centre de gravité** (habituellement noté **G**).

L'action mécanique due à la Terre sur 1 sera donnée par :

$$\{T_{(Terre\to1)}\} : \left\{\begin{array}{l} \vec{P}_{Terre\to1} = m.\vec{g} \\ \overrightarrow{M_{Terre\to1}(\boldsymbol{G})} = \vec{\mathbf{0}} \end{array}\right._{G}$$

| | |
|---|---|
| En coordonnées, **si $\vec{y}$ est l'axe vertical ascendant** :<br><br>$\{T_{(Terre\to1)}\} : {}_G\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -m.g & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}}$ | Le poids est une action mécanique qui se réduit à une force si elle est modélisée en tout point de l'axe (G, $\vec{y}$).<br><br>$\{T_{(Terre\to1)}\}$ est défini comme un **glisseur** et (G, $\vec{y}$) est son **axe central**.<br><br>En effet,<br><br>$\forall K \in (G,\vec{y}),\quad \overrightarrow{M_{Terre\to1}(K)} = \underbrace{\overrightarrow{M_{Terre\to1}(G)}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{KG}\wedge\overrightarrow{P_1}}_{\substack{=\vec{0} \\ car\ ces\ deux \\ vecteurs\ sont \\ colinéaires}}$<br><br>Le poids est traditionnellement noté avec la lettre P. |

## 4.2.Actions mécaniques dues à un ressort sur un système 1



Différents types de ressorts existent : de compression, de traction, de torsion.

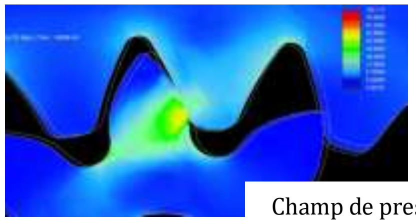
Pour un *ressort de compression*, si $\vec{x}$ est l'axe du ressort et H un point de cet axe :

| | |
|---|---|
| k : raideur du ressort (en N/m)<br><br>$\Delta x = L_0 - L$ (longueur à vide – longueur en charge)<br><br>Le sens de l'effort dépend de $\Delta x$.<br><br>$\Delta x$ peut être décomposé en $\Delta x = (L_0 - L_{monté}) + (L_{monté} - L)$<br><br>et $k.\Delta x = k.(L_0 - L_{monté}) + k.(L_{monté} - L)$<br><br>Alors, $F_{ressort\to1} = T_0 + k.(L_{monté} - L)$ | $\{T_{(ressort\to1)}\} : {}_H\left\{\begin{matrix} k.\Delta x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}}$<br><br>Le signe de l'effort dépend du signe de $\Delta x$.<br><br>$\{T_{(ressort\to1)}\}$ est un glisseur d'axe central $(H,\vec{x})$. |

**$T_0$** est la tension de pose (tarage) du ressort (en Newton)

$(L_{monté} - L)$ est le débattement en fonctionnement

## 4.3.Actions mécaniques dues à l'engrènement de 2 pignons à dentures droites

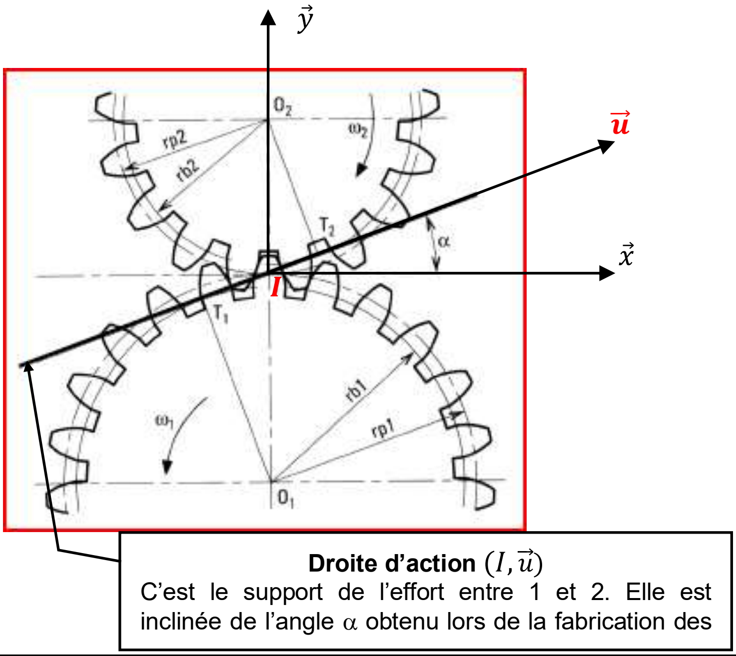


Champ de pression au contact (description locale)

Il existe différents types de composants à dentures : crémaillère, pignon à denture droite, pignon à dentures hélicoïdales, vis.

Nous traitons dans ce cours le cas des engrènements à dentures droites.

Dans le repère $R$ : $(I, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, l'action mécanique du pignon 2 sur le pignon 1 s'exprime par :

<table>
<tr>
<td>
Description globale : Torseur<br><br>
$\{T_{(2\to1)}\} : \begin{Bmatrix} F_{T\,2\to1} & 0 \\ F_{R\,2\to1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{I\ \mathcal{B}}$<br><br>
L'effort de 2 sur 1 est selon $\vec{u}$ et :<br>
$\vec{I}_{2\to1} = F_{T\,2\to1}.\vec{x} + F_{R\,2\to1}.\vec{y}$<br><br>
La position des composantes de la force dans le torseur dépend du repère choisi.<br>
$\{T_{(2\to1)}\}$ est un glisseur d'axe central la droite d'action $(I, \vec{u})$.
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
Cas général<br><br>
$F_{R\,2\to1} = \pm\, tan(\alpha).F_{T\,2\to1}$
</td>
<td>
α est l'angle de pression (typiquement de l'ordre de 20°).<br>
Le signe à s'installer dans cette relation est à choisir selon le repère utilisé et selon le sens du couple du pignon menant.<br>
Le signe + si les deux composantes ont le même signe.<br>
Le signe - si les deux composantes ont des signes opposés.<br>
Dans le schéma ci-dessus, c'est 2 qui est menant et les deux composantes de l'effort ont le même signe (négatif).<br>
Alors, $F_{R\,2\to1} = +\, tan(\alpha).F_{T\,2\to1}$
</td>
</tr>
</table>

## 4.4.Actions mécaniques d'un fluide porteur au repos sur un système matériel 1

L'expression de ces actions mécaniques est simple au centre C du volume immergé (ou **centre de carène** pour les navires). Elle se limite alors à une force nommée Poussée d'Archimède

Si $\vec{y}$ est l'axe vertical ascendant, $\{T_{(fluide\ porteur\to1)}\} : \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ +\rho_{fluide\ porteur}.V_{immerg\acute{e}}.g & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C\ \mathcal{B}}$

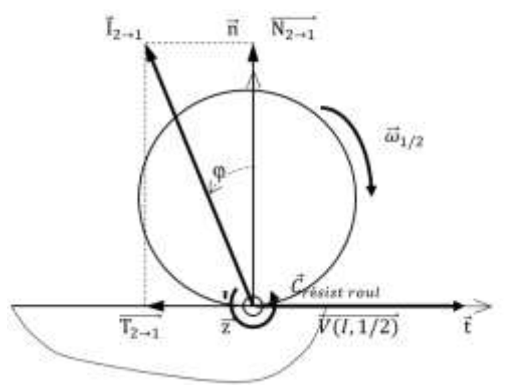
Attention, il faut que le système matériel soit totalement immergé dans le fluide ou que l'on puisse tracer un contour fermé à la surface du fluide porteur.

## 4.5.Actions mécaniques de frottement entre deux solides

Soit deux solides en contact au point I et tel que les vitesses :

$$\overrightarrow{V(I \in 1/2)} \neq \vec{0} \quad et \quad \vec{\omega}_{1/2} = \omega_{r\,1/2}.\vec{z} \neq \vec{0} \;\; (\omega_{p\,1/2} = 0)$$

Le système d'axes est défini par géométrie du contact $(I; \vec{t}; \vec{n}; \vec{z})$

<table>
<tr>
<td rowspan="3">
</td>
<td>$T_{2\to1} = \pm\,\mu.N_{2\to1}$</td>
<td>μ = tg φ est le coefficient de frottement entre les matériaux 1 et 2.</td>
</tr>
<tr>
<td>$C_{rés\ roul} = \pm\,k_r.N_{2\to1}$</td>
<td>$\boldsymbol{k_r}$ (en mètre) est le coefficient de résistance au roulement entre les matériaux 1 et 2.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Les signes sont à choisir pour que ces actions mécaniques s'opposent aux mouvements.</td>
</tr>
</table>

L'effort tangentiel $\overrightarrow{T_{2\to1}}$ au contact en I, s'oppose à $\overrightarrow{V(I \in 1/2)}$.

Le couple de résistance au roulement $\vec{C}_{résist\ roul\ 2\to1}$ s'oppose à $\vec{\omega}_{r\,1/2}$.

$$\{T_{(2\to1)}\} \; {}_I\!\begin{cases} \vec{I}_{2\to1} = \vec{T}_{2\to1} + \vec{N}_{2\to1} = T_{2\to1}.\vec{t} + N_{2\to1}.\vec{n} \\ \overrightarrow{M_{2\to1}(I)} = \vec{C}_{résist\ roul} = C_{résist\ roul}.\vec{z} \end{cases}$$

Il ne peut pas être mis sous la forme d'un glisseur.

Nous reviendrons dans un prochain cours pour formuler plus complètement les lois de l'adhérence (lois de Coulomb cours C 14).

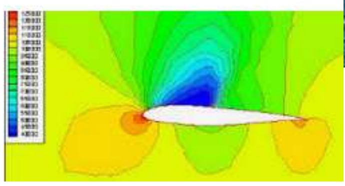
## 4.6.Actions mécaniques de types aérodynamiques (fluide en mouvement)

Lorsqu'un solide se déplace dans un fluide, celui-ci exerce sur le solide des actions mécaniques qui se réduisent à un glisseur au centre **C** du maître couple. Les deux composantes de l'effort se nomment **Portance** et **Trainée**.

Si le solide se déplace selon l'axe $(C, \vec{x})$ alors :

| | |
|---|---|
| Description globale : $\{T_{(fluide\to solide)}\}$: ${}_C\!\begin{Bmatrix} T & 0 \\ P & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}$ | Avec, la **portance** $P = \pm\,\frac{1}{2}.\rho_{fluide}.S.C_y.{V_x}^2$ et la **traînée** $T = -\,\frac{1}{2}.\rho_{fluide}.S.C_x.{V_x}^2$ |

Aile Duotone



Champ de pression autour de l'aile (description locale)

- S : Aire du maître couple (en m²)
- $C_y$ : coefficient de portance (sa valeur dépend du profil du solide)
- $C_x$ : coefficient de traînée (sa valeur dépend du profil du solide)
- $V_x$ : Vitesse du solide par rapport au fluide


## 5. MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES DANS LES LIAISONS D'UN MECANISME

Un mécanisme est composé de pièces reliées entre elles par des liaisons (rotule, pivot, glissière, …) et destiné à produire une cinématique (Loi E/S) répondant à un Cahier des charges (Cdc).

Prenons l'exemple d'une liaison pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$ entre un arbre 1 en un alésage 2. Posons la question des mouvements relatifs possibles entre 1 et 2 ?

Les mouvements relatifs entre ces deux éléments sont :

- une translation possible de l'arbre par rapport à l'alésage (**dégré de liberté en translation**) selon l'axe du vérin. C'est la mobilité fonctionnelle.
- une rotation possible de l'arbre par rapport à l'alésage (**dégré de liberté en rotation**) selon ce même axe.

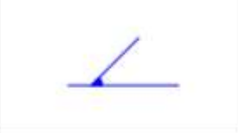
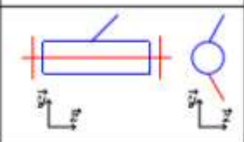
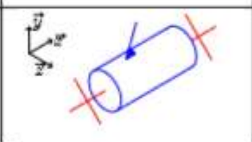
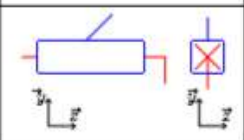
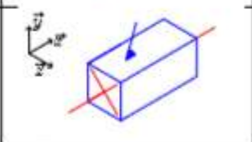
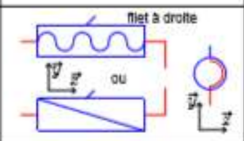
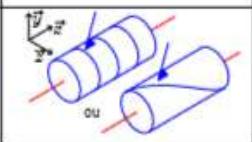
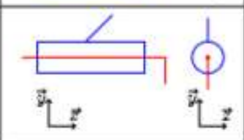
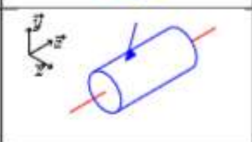
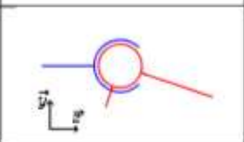
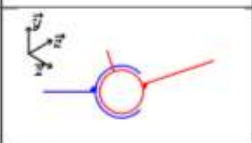
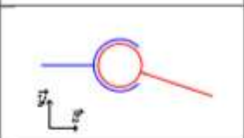
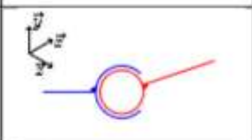
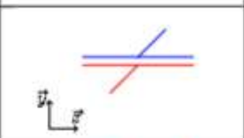
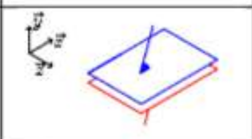
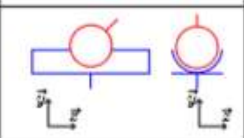
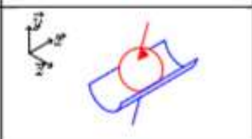
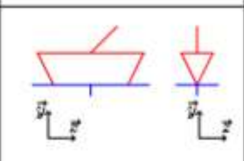
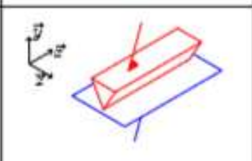
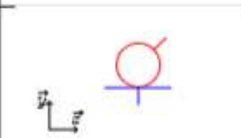
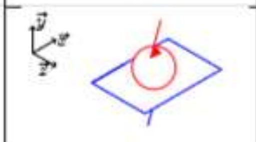
La présence de ces mobilités signifie qu'aucun contact solide/solide ne s'y opposent. En conséquence, aucune action mécanique ne peut être transmise de entre 1 et 2 selon ces mobilités.

L'action mécanique transmissible par cette liaison est inconnue à priori mais on sait qu'elle ne pourra pas transmettre de force ni de moment selon son axe $\vec{x}$. Ainsi, le torseur des actions mécaniques transmissibles par un pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$ s'exprime en un point A quelconque de son axe :

$$\left\{T_{(1\to2)}\right\} : \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \vec{R}_{1\to2} & \vec{M}_{1\to2}(A) \end{array} \\ {}_{A}\begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} \end{array}$$

Attention, pour une liaison pivot glissant d'axe $(B, \vec{z})$, on aura : $\left\{T_{(1\to2)}\right\} : \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \vec{B}_{1\to2} & \vec{M}_{1\to2}(B) \end{array} \\ {}_{B}\begin{Bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} \end{array}$

# 6. LIEN ENTRE LE TORSEUR D'ACTIONS MÉCANIQUES ET LE TORSEUR CINÉMATIQUE D'UNE LIAISON

| Nom | point(s) d'expression | ddl | Représentation plane | Représentation 3D | Torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/1)\}$ | Torseur des AM $\{\mathcal{T}(1\rightarrow 2)\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Encastrement** | tout point de l'espace | 0 |  |  | ${}_A\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ | ${}_A\left\{\begin{matrix}X_{12} & L_{12}\\ Y_{12} & M_{12}\\ Z_{12} & N_{12}\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ |
| **Pivot** d'axe $(A,\vec{x})$ | tout point de l'axe | 1 |  |  | ${}_A\left\{\begin{matrix}\omega_{x21} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ | ${}_A\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\ Y_{12} & M_{12}\\ Z_{12} & N_{12}\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ |
| **Glissière** de direction $\vec{x}$ | tout point de l'espace | 1 |  |  | ${}_A\left\{\begin{matrix}0 & V_{x21}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ | ${}_A\left\{\begin{matrix}0 & L_{12}\\ Y_{12} & M_{12}\\ Z_{12} & N_{12}\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ |
| **Hélicoïdale** d'axe $(A,\vec{x})$ et de pas $p$ | tout point de l'axe | 1 |  |  | ${}_A\left\{\begin{matrix}\omega_{x21} & h\omega_{x21}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ avec $h=\pm\frac{p}{2\pi}$ | ${}_A\left\{\begin{matrix}X_{12} & -hX_{12}\\ Y_{12} & M_{12}\\ Z_{12} & N_{12}\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ avec $h=\pm\frac{p}{2\pi}$ |
| **Pivot glissant** d'axe $(A,\vec{x})$ | tout point de l'axe | 2 |  |  | ${}_A\left\{\begin{matrix}\omega_{x21} & V_{x21}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ | ${}_A\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{12} & M_{12}\\ Z_{12} & N_{12}\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ |
| **Rotule à doigt** de centre $A$ bloquée en $\vec{x}$ | centre de la liaison | 2 |  |  | ${}_A\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ \omega_{y21} & 0\\ \omega_{z21} & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ | ${}_A\left\{\begin{matrix}X_{12} & L_{12}\\ Y_{12} & 0\\ Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ |
| **Rotule** de centre $A$ | centre de la liaison | 3 |  |  | ${}_A\left\{\begin{matrix}\omega_{x21} & 0\\ \omega_{y21} & 0\\ \omega_{z21} & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ | ${}_A\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\ Y_{12} & 0\\ Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ |
| **Appui plan** de normale $\vec{y}$ | tout point de l'espace | 3 |  |  | ${}_A\left\{\begin{matrix}0 & V_{x21}\\ \omega_{y21} & 0\\ 0 & V_{z21}\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ | ${}_A\left\{\begin{matrix}0 & L_{12}\\ Y_{12} & 0\\ 0 & N_{12}\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ |
| **Linéique annulaire** de centre $A$ et de direction $\vec{x}$ | centre de la liaison | 4 |  |  | ${}_A\left\{\begin{matrix}\omega_{x21} & V_{x21}\\ \omega_{y21} & 0\\ \omega_{z21} & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ | ${}_A\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{12} & 0\\ Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ |
| **Linéique rectiligne** de ligne $(A,\vec{x})$ et de normale $\vec{y}$ | tout point du plan $(A,\vec{x},\vec{y})$ | 4 |  |  | ${}_A\left\{\begin{matrix}\omega_{x21} & V_{x21}\\ \omega_{y21} & 0\\ 0 & V_{z21}\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ | ${}_A\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{12} & 0\\ 0 & N_{12}\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ |
| **Ponctuelle** en $A$ de normale $\vec{y}$ | tout point de $(A,\vec{y})$ | 5 |  |  | ${}_A\left\{\begin{matrix}\omega_{x21} & V_{x21}\\ \omega_{y21} & 0\\ \omega_{z21} & V_{z21}\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ | ${}_A\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{12} & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{R}}$ |

# 7. MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES DUES AUX ACTIONNEURS

## 7.1. Cas des actions mécaniques dues à un moteur

Stator 1

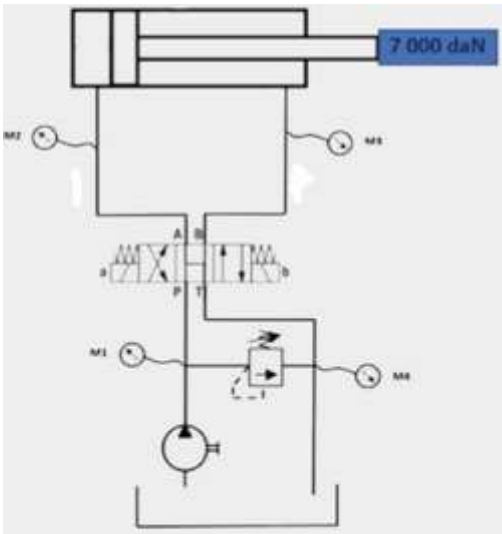
Rotor 2

Charge

Graphe de structure associé à un moteur d'axe $(A,\vec{x})$ :

C'est une liaison pivot **motorisée** $\{T_{(1\to 2)}\}$ : $\begin{Bmatrix} X_{12} & \boldsymbol{C_{mot}} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{A\ \mathcal{B}}$ (dans une liaison pivot d'axe $(A,\vec{x})$, il y a un **0** à la place de $\boldsymbol{C_{mot}}$)

## 7.2. Cas des actions mécaniques dues à un fluide sur la tige d'un vérin




Graphe de structure associé à un vérin d'axe $(A,\vec{x})$ :

Charge

Corps 1

Tige 2

C'est une liaison pivot-glissant **motorisée** $\{T_{(1\to 2)}\}$ : $\begin{Bmatrix} \boldsymbol{F} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{A\ \mathcal{B}}$ (dans une liaison pivot glissant d'axe $(A,\vec{x})$, il y a un **0** à la place de $\boldsymbol{F}$)

Avec GC : Grande Chambre et PC : Petite Chambre.

Il est fréquent de négliger la pression dans la chambre non alimentée.

Calcul de l'aire des surfaces :

$$F = F_{fluide\to tige} = (p_{GC}.S_{GC} - p_{PC}.S_{PC})$$

# 8. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (PFS)

Les mécanismes sont généralement en mouvement et un ingénieur souhaite connaître les actions mécaniques qu'ils subissent pour les dimensionner ou vérifier leurs performances. Ces calculs prennent en compte l'inertie des solides et leurs cinématiques. C'est le programme de seconde année (PFD : Principe fondamental de la dynamique) ou de simulation de calcul en TP. *Si le mécanisme étudié est « immobile », on lui appliquera le Principe fondamental de la statique (PFS).*

**ÉNONCE DU PFS :**

**Si un système matériel S est en équilibre par rapport à un repère galiléen $R_{gal}$ alors la somme des actions mécaniques de l'extérieur sur S et nulle :**

$$\boldsymbol{\Sigma}\,\{\boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{ext} \rightarrow \boldsymbol{S})\} = \{\boldsymbol{\mathcal{T}}(\overline{\boldsymbol{S}} \rightarrow \boldsymbol{S})\} = \{\boldsymbol{0}\}$$

# 9. THÉORÈMES GÉNÉRAUX

Toujours dans le cadre de la maîtrise de la quantité de calculs utiles à détermination de ou des grandeurs recherchées, il n'est pas indispensable d'écrire toutes les équations issues du PFS. On pourra parfois se contenter des « Théorèmes généraux ».

## 9.1. Théorème de la résultante statique

Si un système matériel S est en équilibre par rapport à un repère galiléen $R_{gal}$ alors :

- La résultante des forces, appliquée de l'extérieur sur S, est nulle : $\sum \overrightarrow{R_{ext\rightarrow S}} = \vec{0}$

*Cela conduit à 1 relation vectorielle. On écrira, S est en équilibre par rapport à un repère galiléen. D'après le théorème de la résultante statique :* $\sum \overrightarrow{R_{ext\rightarrow S}} = \vec{0}$.

## 9.2. Théorème du moment statique

Si un système matériel S est en équilibre par rapport à un repère galiléen $R_{gal}$ alors :

- Le moment résultant, appliqué de l'extérieur sur S, calculés en un point A quelconque de $R_{gal}$ est nulle : $\sum \overrightarrow{M_{ext\rightarrow S}(A)} = \vec{0}$.

*Cela conduit à 1 relation vectorielle. On écrira, S est en équilibre par rapport à un repère galiléen. D'après le théorème du moment statique :* $\sum \overrightarrow{M_{ext\rightarrow S}(A)} = \vec{0}$.

**On déduit un système de 6 équations scalaires par système matériel isolé.**

# 10. PRINCIPE DES ACTIONS RÉCIPROQUES

Ce principe déjà utilisé autorise à écrire que les actions mécaniques entre des solides i et j vérifient :

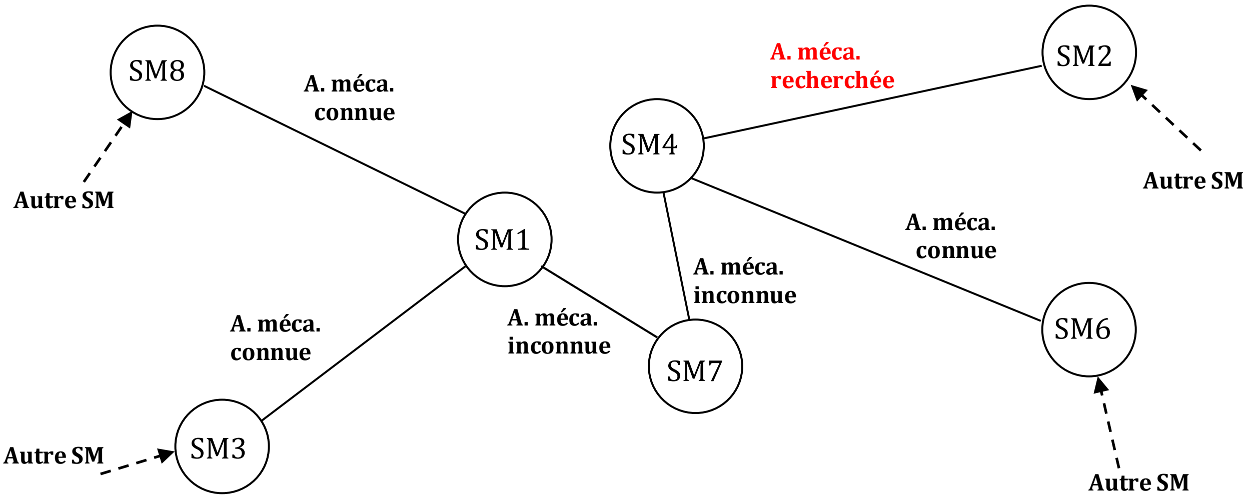
$$\{\boldsymbol{T}_{(j\rightarrow i)}\} = -\{\boldsymbol{T}_{(i\rightarrow j)}\}$$

Concrètement, si dans un isolement vous avez défini $\{\boldsymbol{T}_{(i\rightarrow j)}\}$ : ${}_{P}\begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ 0 & 0 \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{R}$ alors, lorsque vous aurez besoin de $\{\boldsymbol{T}_{(j\rightarrow i)}\}$, il faudra écrire $\{\boldsymbol{T}_{(j\rightarrow i)}\}$ : ${}_{P}\begin{Bmatrix} -X_{ij} & -L_{ij} \\ 0 & 0 \\ -Z_{ij} & -N_{ij} \end{Bmatrix}_{R}$ en reprenant les mêmes inconnues mais affectées du signe $-$.

## 11. DÉMARCHE À CONNAITRE PAR CŒUR

Pour aboutir à des équations dont certaines inconnues sont les composantes des forces et des moments que l'on veut déterminer, on suivra la démarche suivante :

- 1 **Analyser le graphe de structure (complet ou partiel)** afin d'identifier le système matériel à **isoler S** qui permettra d'avoir l'action mécanique à déterminer comme action extérieure.




- Faire le 2 **bilan des actions mécaniques extérieures** (BAME) sur S. Dans cette étape, on modélise les actions mécaniques retenues et on fait des hypothèses qui permettront de simplifier ou négliger certaines actions mécaniques.

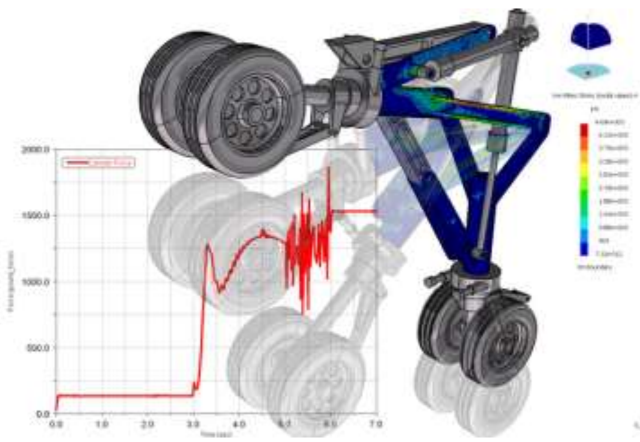
- 3 **Appliquer le PFS** (il s'agit de choisir un point de calcul des moments qui limite le nombre de calculs à réaliser.

- 4 **Résoudre** les équations *nécessaires* aux inconnues visées et **analyser** la cohérence de vos résultats.

*Remarque : Il est parfois nécessaire de réaliser plusieurs isolements.*

## 12. EXERCICE D'APPLICATION (DIMENSIONNEMENT)

On souhaite déterminer la pression p dans le vérin (corps 2 ; tige 1) lors de la levée du train après le décollage. Nous allons nous limiter à une étude statique dans la position du schéma cinématique (en TP, on recherchera cette action mécanique dans le cas où le mécanisme est animé du mouvement de rentrée).



La masse de la jambe de force 3 et de la roue 4 est $m = 320\ kg$.

On donne les vecteurs suivants :

$\overrightarrow{OG} = L.\vec{y}_3$ ($G$ : *centre de gravité de* 3 + 4 )

$\overrightarrow{OB} = b.\vec{y}_3$ ; $\overrightarrow{OC} = c.\vec{y}_3$ ; $\overrightarrow{OA} = a.\vec{z}_0$ ; $\overrightarrow{AB} = \lambda_1.\vec{y}_1$

On définit $\theta_3 = (\widehat{\vec{y}_0, \vec{y}_3})$ *et* $\theta_2 = (\widehat{\vec{y}_0, \vec{y}_2})$.

Par ailleurs, l'étude se fait au cours de la phase de remontée du train. On considère donc que l'action mécanique $T_{sol \to 4}$ *est nulle* et que les actions dans les liaisons des ciseaux de verrouillage sont négligeables.

On souhaite déterminer les actions mécaniques suivantes :

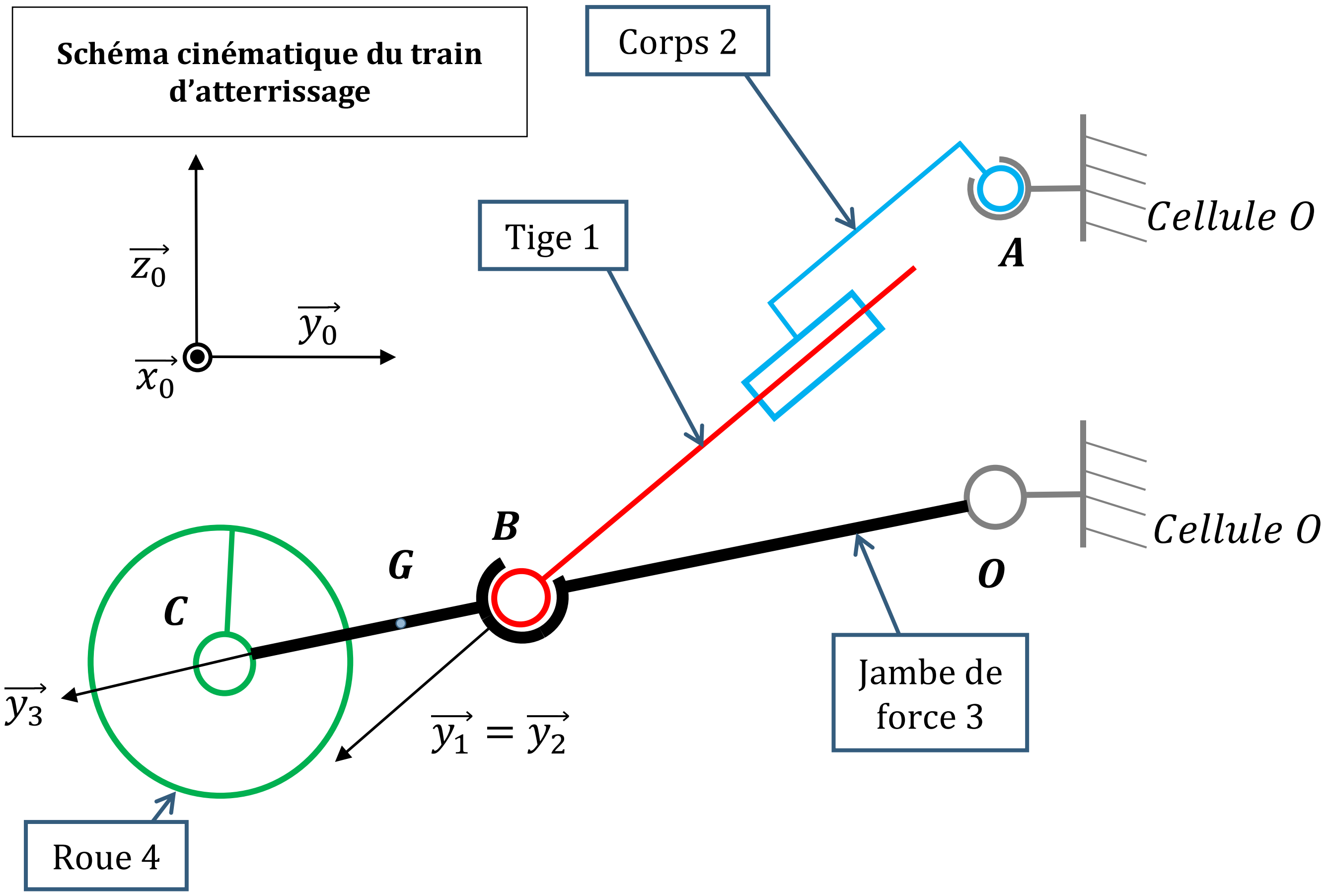
$\{T_{(0\to3)}\}$ : *liaison entre la jambe de force et la structure* 0 ;

$\{T_{(0\to2)}\}$ : *liaison entre le corps du vérin (actionneur) et la structure* 0 ;

$\{T_{(3\to1)}\}$ : *liaison entre la tige du vérin et le train* 3 ;

$\{T_{(2\to1)}\}$ : *Action au sein de l'actionneur et en particulier l'effort* $F_h$ *de relevage.*

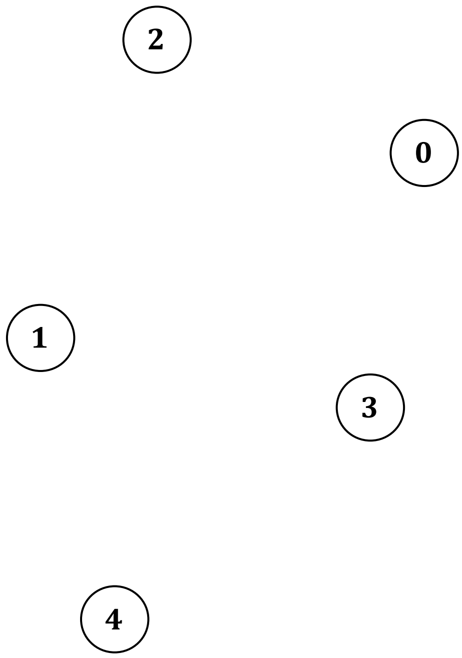
$\{T_{(air\to4)}\}$ : ${}_C\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0}$ *modélise l'action aéronautique de l'air sur le train* ($\left\|\overrightarrow{V(C \in 4/sol)}\right\| = V_y$).




*Q1. Tracer et analyser le graphe de structure (ou d'analyse) du train d'atterrissage.*

*Q2. Calculer le nombre d'inconnues de liaisons de ce mécanisme et le nombre d'équations que l'on pourra écrire.*

*Q3. Développer la démarche statique afin de déterminer les actions mécaniques recherchées.*

| | |
|---|---|
| Q1.   | Q2. |

Q3.

## 13. CAS PARTICULIER … FRÉQUENT : PROBLÈME PLAN

La démarche statique conduit à l'écriture de systèmes d'équations qui, par leur résolution, donnent accès aux actions mécaniques dans les liaisons d'un mécanisme ou/et aux actions extérieures (couple ou force) nécessaires au fonctionnement de ce mécanisme (voir TD 13 : GYROJET). Chaque isolement permet d'écrire 6 équations. Lorsque le système d'équation comporte plus de 6 inconnues, il faut isoler d'autres ensembles jusqu'à obtenir au moins autant d'équations qu'il y a d'inconnues.

*Bien sûr, on cherchera à réduire la quantité de calculs nécessaires à la résolution d'un problème de statique.*

Certains mécanismes présentent justement des particularités qui permettent d'affirmer par avance que certaines inconnues de liaisons seront nulles. On dit alors que le problème est plan.

**Définition et points à vérifier :**

Pour qu'un mécanisme (ou partie de mécanisme) soit un **problème plan**, il doit **présenter un plan de symétrie matérielle $\pi$** qui coupe le mécanisme en deux demi-mécanismes symétriquement semblables.

Par ailleurs, il faut également que les **actions mécaniques extérieures** au système lui soient **symétriquement appliquées**. Autrement dit, il faut que :

- les forces extérieures appliquées au mécanisme soient dans $\pi$ ou symétriques par rapport à ce plan ;
- les moments extérieurs appliqués au mécanisme (couple moteur, …) soient selon un axe perpendiculaire à $\pi$.

*La conséquence est que l'on sait par avance que certaines actions de liaisons seront nulles.*

Dans l'exemple traité dans le cours C13, le train d'atterrissage était un problème plan. En effet, le plan $(G, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est un plan de symétrie matérielle mais aussi pour les actions mécaniques extérieures. Les calculs menés ont montré la nullité d'un grand nombre d'inconnues de liaisons.

**Exemple et conséquences** :

Si un mécanisme S est un problème plan par rapport à un plan $\pi : (O, \vec{z}, \vec{x})$ alors il n'y aura, dans ses liaisons :

- aucune composante de forces selon $\vec{y}$ ;
- aucune composante de moments selon $\vec{z}$ **et** $\vec{x}$.

Si ce mécanisme comporte entre ses éléments i et j, une liaison pivot (par exemple) en un point P d'axe $(P, \vec{y})$, alors le torseur d'action mécanique au lieu d'avoir la forme classique,

$$\{T_{(i\to j)}\} : {}_P\begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & 0 \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_R$$

pourra s'écrire directement dans le bilan $\{T_{(i\to j)}\} : {}_P\begin{Bmatrix} X_{ij} & \emptyset \\ \emptyset & 0 \\ Z_{ij} & \emptyset \end{Bmatrix}_R$ (avec 3 zéros supplémentaires).

Ces 3 zéros, nous pouvons les imposer dans tous les torseurs d'actions de liaisons du mécanisme.

Par contre, il est inutile d'écrire les équations suivantes :

$$\Sigma\overrightarrow{F_{ext\to S}} \cdot \vec{y} = 0$$

$$\Sigma\overrightarrow{M_{ext\to S}(K)} \cdot \vec{z} = 0$$

$$\Sigma\overrightarrow{M_{ext\to S}(K)} \cdot \vec{x} = 0$$

car elles donnent systématiquement les « équations » 0 = 0 (si $(O, \vec{z}, \vec{x})$ est le plan de symétrie bien sûr).

*Attention : chaque isolement ne nous donnera donc que 3 équations.*

## 14. ÉQUILIBRE SOUS L'ACTION DE DEUX GLISSEURS

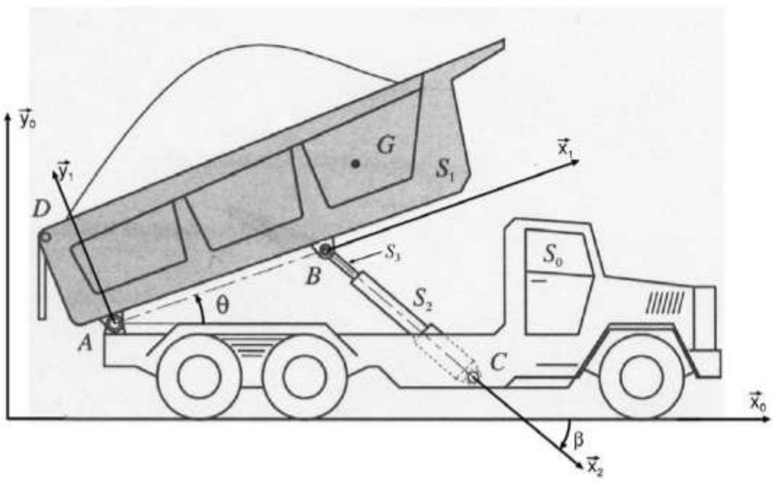
Dans l'exemple traité précédemment, on calcule les efforts encaissés par le vérin de levage afin de déterminer la pression hydraulique dans celui-ci.

C'est un cas de figure courant qui conduit à trouver grâce aux équations de moments des relations classiques.

De façon général,

**Théorème :**

**Si un système est en équilibre sous l'action de deux glisseurs alors leurs forces sont directement opposées et ont la même droite support.**



Exemple : Vérin de bennage

- Isolement du vérin S = {2 ; 3 ; huile}
- Analyse de l'énoncé et des schémas :

Rotules en B et C, Problème plan selon $(G, \overrightarrow{\mathbf{x_0}}, \overrightarrow{\mathbf{y_0}})$, le poids des composants du vérin est négligé, pas de frottement dans les liaisons

- Bilan des AM extérieures sur S :

$$\{T_{(0\to2)}\} : \left\{\begin{matrix} X_{02} & 0 \\ Y_{02} & 0 \\ \emptyset & 0 \end{matrix}\right\}_{C\,R} \quad et\ \{T_{(1\to3)}\} : \left\{\begin{matrix} X_{31} & 0 \\ Y_{31} & 0 \\ \emptyset & 0 \end{matrix}\right\}_{B\,R}$$

- S est en équilibre par rapport à un repère galiléen. D'après le PFS on sait que :

$$\Sigma\{T_{(ext\to S)}\} = \{0\}$$

Relations classiques :

Le **TMS** en B avec $\overrightarrow{BC} = a.\overrightarrow{x_0} - b\,\overrightarrow{y_0}$ donne l'équation :

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{R_{0\to2}} = \vec{0}$$

Ce qui signifie que $\overrightarrow{BC}$ *est colinéaire* à $\overrightarrow{R_{0\to2}}$.

Autrement dit, *les efforts* $\overrightarrow{R_{0\to2}}$ *(comme* $\overrightarrow{R_{1\to3}}$*) sont portés par la même droite (BC).*

Le calcul donne : $a.Y_{02} + b.X_{02} = 0$

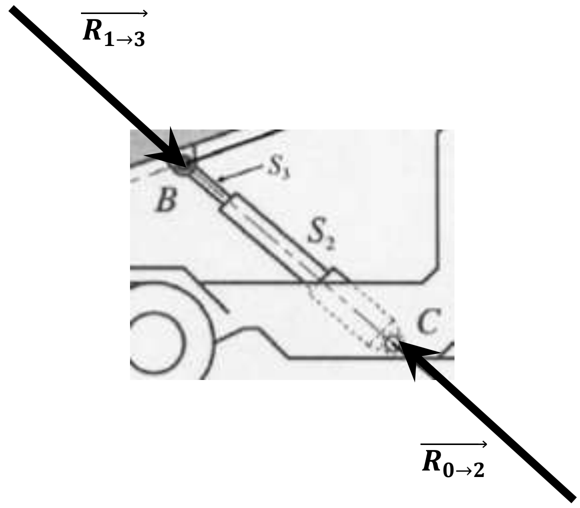
Qui peut s'écrire $\boldsymbol{\frac{Y_{02}}{X_{02}} = -\frac{b}{a} = -tan\ (\beta)}$.

Cette relation est à connaître. Son signe dépendra cependant du sens de $\beta$.

Par ailleurs, le **TRS** donne les 2 équations :

$$\begin{cases} X_{02} + X_{31} = 0 \\ Y_{02} + Y_{31} = 0 \end{cases}$$

Représentation graphique :




Enfin, l'effort du **vérin sur la benne** vaut

$$\overrightarrow{F_{3\to1}} = \overrightarrow{R_{3\to1}} = -\overrightarrow{R_{1\to3}}$$

## 15. ÉCRITURE DES ÉQUATIONS STRICTEMENT NÉCESSAIRES

Pour continuer dans ce sens, il est parfois suffisant d'écrire une ou quelques équations scalaires issues de *la projection sur des axes bien choisis* des équations vectorielles du PFS (ou PFD) issues d'un *isolement pertinent.*

*C'est classiquement une question de concours pour déterminer certaines inconnues ($C_{mot}$, $F$, ...).*

On écrit alors :

*Si on isole S, en équilibre par rapport à un repère galiléen, la projection sur $\vec{u}$ du moment résultant en A donne :*

$$\sum \overrightarrow{M_{ext\to S}(A)}\,.\,\vec{u} = 0 \quad (\vec{u}\ \text{ vecteur unitaire bien choisi}) \ldots$$

$$(\text{de même, pour les efforts } \sum \overrightarrow{F_{ext\to S}}\,.\,\vec{v} = 0 \quad (\vec{v}\ \text{ vecteur unitaire}) \ldots$$

# 16. L'ÉNONCÉ : L'ESSENTIEL DU PROBLÈME À RÉSOUDRE

***L'analyse de l'énoncé (textes et schémas associés) est fondamentale***.

C'est à ce niveau que l'on pourra :

- recenser les informations utiles ;
- poser éventuellement l'hypothèse de problème plan ou/et des sous-systèmes soumis à deux glisseurs
- définir les actions mécaniques à négliger dans les bilans (faute d'informations suffisantes : la masse d'un composant n'est pas donnée ;…) ;
- modéliser les actions mécaniques connues ou caractérisées (pression, poids, ressort, engrenage, …) ;
- repérer les actionneurs ;
- modéliser les torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons.

Il reste à définir un ordonnancement des isolements et les équations à écrire (PFS, théorèmes généraux, projection,…) pour déterminer la ou les grandeurs qui nous intéressent.

En ordre général, on vous demande :

- de **vérifier une performance (conformité à un cahier des charges) ;**
- de calculer une grandeur (couple, effort) pour **dimensionner un actionneur.**

Remarque :

***ON N' ISOLE JAMAIS LE BÂTI.***