

TD 13.3 : Intégration

Descriptions locale et globale

Exercice de cours : 1 Basique : 2, 3, 4 et 5
 Concours : 6 et 7 Plus complexes : 8 Plus concret : 9

1. EXPRESSION DE LA SURFACE OU DU VOLUME ELEMENTAIRE (Action mécanique locale)

Cet exercice est en relation avec le cours C7 (Cinématique), paragraphe 1.1 Paramétrage de la position d'un point M dans un espace affine.

Soit un espace affine $E = (O, B) / B: (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ base orthonormée directe.

Q1.1. Donner l'expression de la surface élémentaire dS en un point M d'une surface plane S appartenant au plan $\pi_x : (O, \vec{y}, \vec{z})$ de E .

Q1.2. Donner l'expression de la surface élémentaire dS en un point M d'une surface S appartenant au cylindre de rayon R et d'axe (O, \vec{z}) . Vous préciserez les vecteurs unitaires normal et tangentiel à S au point M .

Q1.3. Idem pour le volume élémentaire dV .

Q1.4. Donner l'expression de la surface élémentaire dS en un point M d'une surface S appartenant au cône d'axe (O, \vec{x}) et de demi-angle au sommet δ tel que $x \in \mathcal{R}^+$ (vous pourrez passer par une base intermédiaire (\vec{u}, \vec{v}) tel que $(\vec{y}, \vec{u}) = \delta$). Vous préciserez les vecteurs unitaires normal et tangentiel à S au point M .

Q1.5. Donner l'expression de dS pour une boule de rayon R et de centre A avec $\overline{OA} = a \cdot \vec{y}$.

Q1.6. Idem pour la surface élémentaire dV .

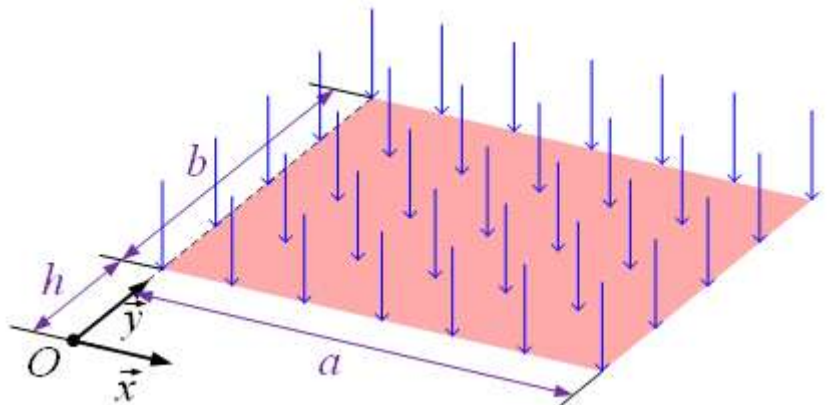
2. Pour se rassurer

Un fluide applique sur la surface S rectangulaire d'un solide 1 (dimensions $a \times b$) une pression uniforme $\overline{\Omega_f(M)} = p \cdot \vec{z}$ (quelque soit $M \in S$).

Q2.1. Calculer, par intégration, l'effort global $\overline{F(\text{fluide} \rightarrow 1)}$.

Q2.2. Calculer par intégration $\overline{M(O, \text{fluide} \rightarrow 1)}$.

Q2.3. Déterminer le point C , centre de poussée de l'action du fluide sur S .



3. Centre international de congrès de Tours

Les structures du bâtiment doivent être dimensionnées. Quelles formes, quels matériaux à utiliser ? Pour cela, il est nécessaire de déterminer les efforts appliqués aux structures.



Centre international de congrès de Tours



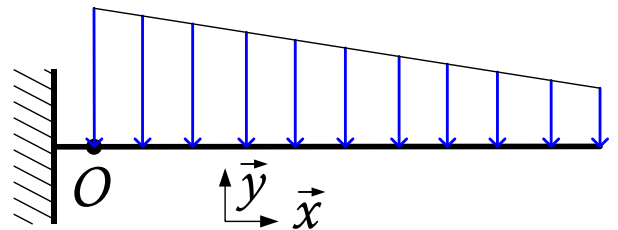
Poutrelles à section variable

On considère ainsi une poutrelle 1 de longueur L en porte-à-faux constituant la structure du centre des congrès. La section de cette poutrelle évolue linéairement sur sa longueur. C'est donc aussi le cas de sa masse linéique λ variant de $\lambda_{min} < 0$ à $\lambda_{max} < 0$. Le modèle local est représenté sur le schéma ci-contre. Les flèches représentent l'effort local $\overrightarrow{dF}(pes \rightarrow 1)$.

Q3.1. Calculer $\overrightarrow{F}(pes \rightarrow 1)$.

Q3.2. Calculer $\overrightarrow{M}(O, pes \rightarrow 1)$.

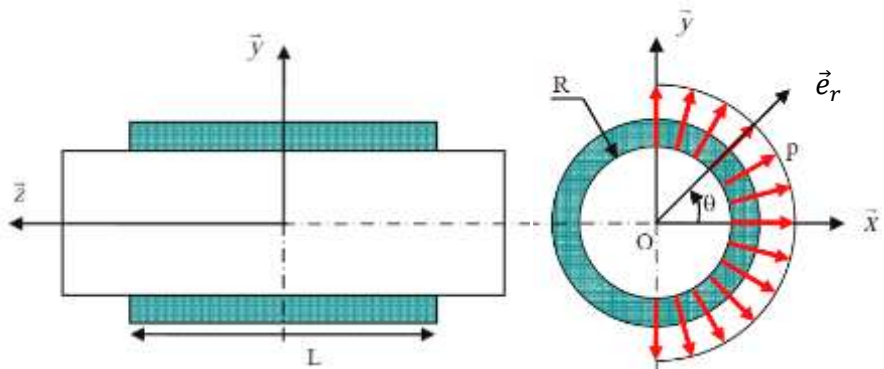
Q3.3. Calculer les coordonnées $C(x_C; y_C)$ du centre de poussée.



4. Modélisation des actions mécaniques de contact sur un palier lisse

On souhaite déterminer le modèle global des actions mécanique de contact sur un palier lisse, composant technologique, encore appelé coussinet, utilisé pour le guidage en rotation d'un arbre dans un alésage. A la suite de cette modélisation, on s'intéresse au dimensionnement de cet élément technologique dans système bielle manivelle.

Après une étude mécanique, l'effort radial global maximal appliqué au coussinet est $F = 3\,000\text{ N}$.



Modèle local avec pression uniforme

On donne le modèle local :

- Les surfaces de contact sont limitées par un $\frac{1}{2}$ cylindre de longueur $L = 20 \text{ mm}$ et de rayon intérieur $R = 8 \text{ mm}$.
- Entre les surfaces de contact, la pression p est uniforme ($p = p_0$) sur chaque élément dS situé autour du point M .

Q4.1. Déterminer le modèle global de l'action mécanique de l'arbre 2 sur le bâti 1 sous la forme d'un torseur exprimé au point O .

Q4.2. Exprimer le lien entre l'effort radial F et la pression p_0 .

Q4.3. Conclure quant au choix du coussinet, d'après l'extrait de catalogue d'un constructeur donné en ANNEXE.

Q4.4. Reprendre cette étude dans le cas où la pression p est supposée uniforme dans le sens de la longueur, mais sinusoidale radialement en prenant la fonction de répartition suivante : $p = p_{max} \cdot \cos \theta$

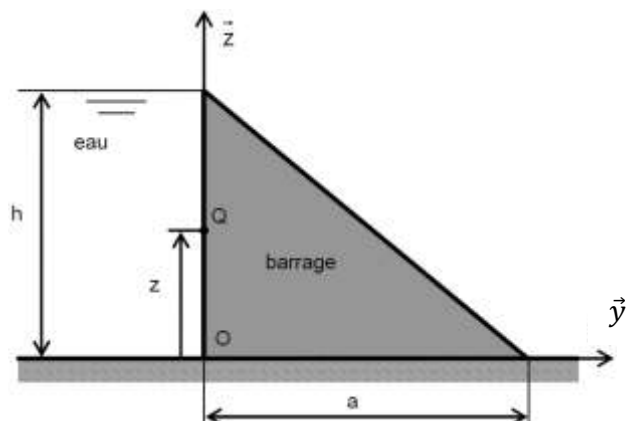
ANNEXE : extrait de catalogue donne pour deux nuances de coussinets :

NUANCES STANDARD	Bronze BP 25	Alliage ferreux FP 20
Equivalent AFNOR	C-T10-K140	F-00C2-K200
SINT A50	A50	A10
Masse volumique (g/cm ³)	6,2	5,6
Pression Maxi (daN/cm ²)	100	225
Vitesse Lineaire Maxi (m/s)	6	4
PV Maxi hydrodynamique (vmini 0,5 m/s) daN/cm ² *m/s	18	18
Plage de température	-5/+90	-5/+90
Huile d'impregnation	MT100	MT100
Porosité ouverte minimale	23	20

5. Modélisation des actions mécaniques agissant sur un barrage poids

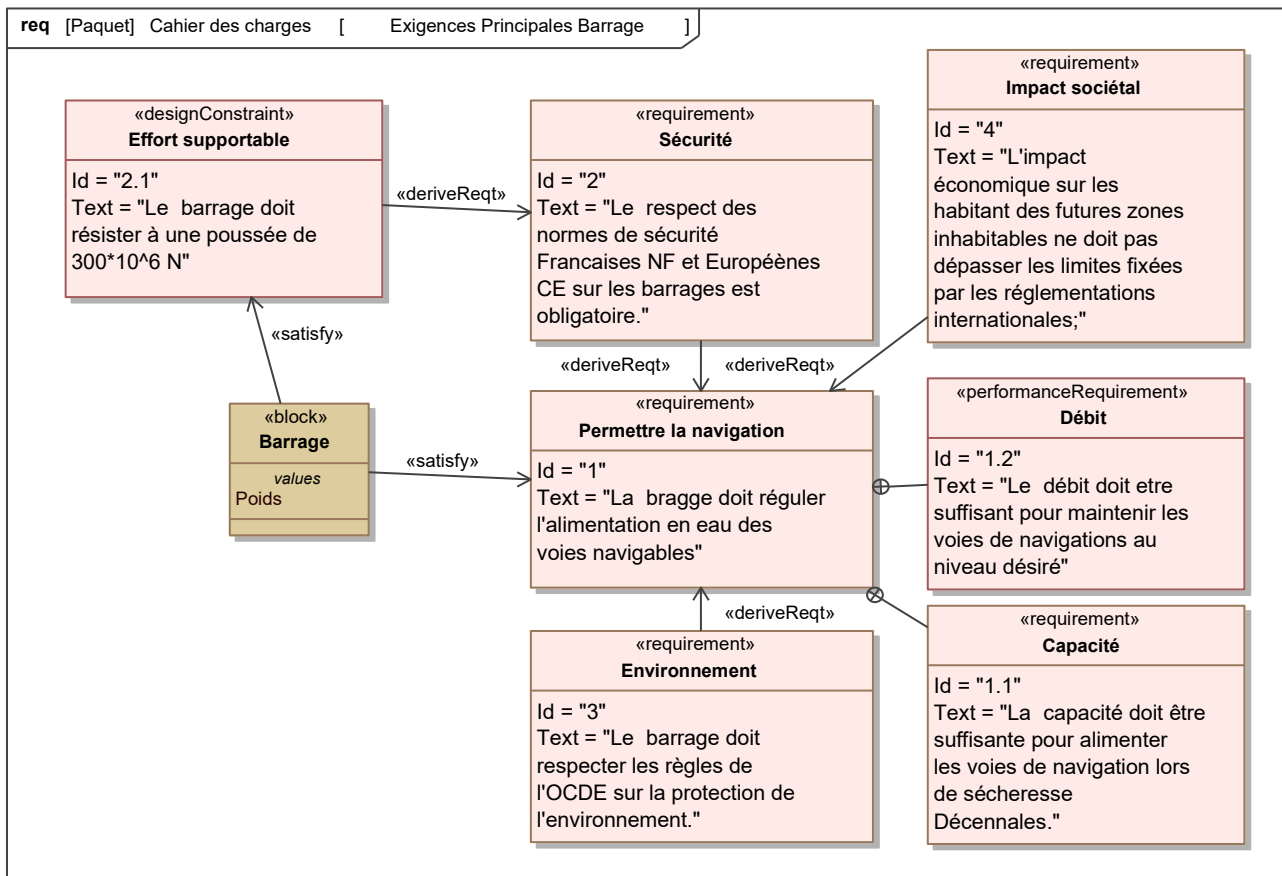


Réel



Modèle

On s'intéresse à un barrage poids en béton de section triangulaire qui repose sur le sol et qui réalise une retenue d'eau de hauteur h pour l'alimentation des voies navigables. Un barrage poids est un barrage dont la propre masse suffit à résister à la pression exercée par l'eau. Le barrage est soumis principalement à l'action mécanique de l'eau (pression hydrostatique) et à l'action mécanique de la pesanteur. Extrait du cahier des charges :



Données :

- M : masse du barrage considéré comme un solide homogène.
- $a = 20 \text{ m}$: assise du barrage.
- $h = 30 \text{ m}$: hauteur d'eau.
- $L = 80 \text{ m}$: largeur du barrage.
- $\rho_{eau} = 1000 \text{ kg/m}^3$: masse volumique de l'eau.

Q5.1. Poser le modèle local de l'action mécanique de l'eau sur le barrage. Déterminer ensuite le modèle global sous forme de torseur exprimé au point pour lequel le moment résultant est nul (centre de poussée C).

Par définition, le centre de gravité (ou barycentre) d'un solide est l'unique point tel que $\iiint_{Solide} \overrightarrow{GM} \cdot dm = \vec{0}$

Q5.2. Déterminer le centre de gravité de la structure.

Q5.3. Déterminer le modèle global de l'action mécanique de la pesanteur sur le barrage sous forme de torseur exprimé au centre de gravité G puis au point O.

Q5.4. Faire les applications numériques et conclure vis-à-vis du Cahier des charges.

6. ROBOT HUMANOÏDE LOLA (concours Mines-Pont 2015 MP)

Le développement de robots à forme humaine est en croissance constante depuis quelques dizaines d'années. En robotique, il est difficile d'affirmer que tous les robots remplaçant l'homme dans ses tâches doivent être de forme humaine. Les véhicules autonomes, par exemple, ne sont pas anthropomorphes. Les tâches auxquelles sont destinées les robots définissent leur forme idéale. Si nous souhaitons un jour que les robots remplacent l'homme dans ses tâches ennuyeuses, ils devront s'intégrer au mieux à notre société, à notre environnement et à notre ergonomie.

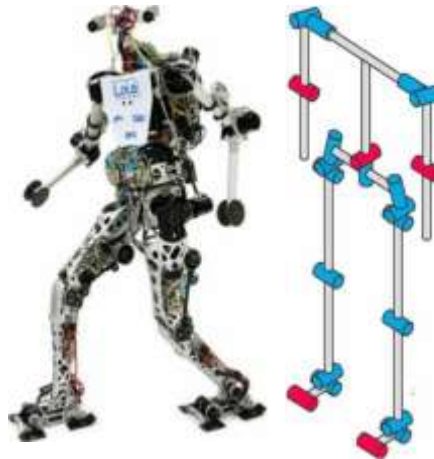


Figure 1 : le robot humanoïde LOLA et sa structure cinématique (sans la tête)

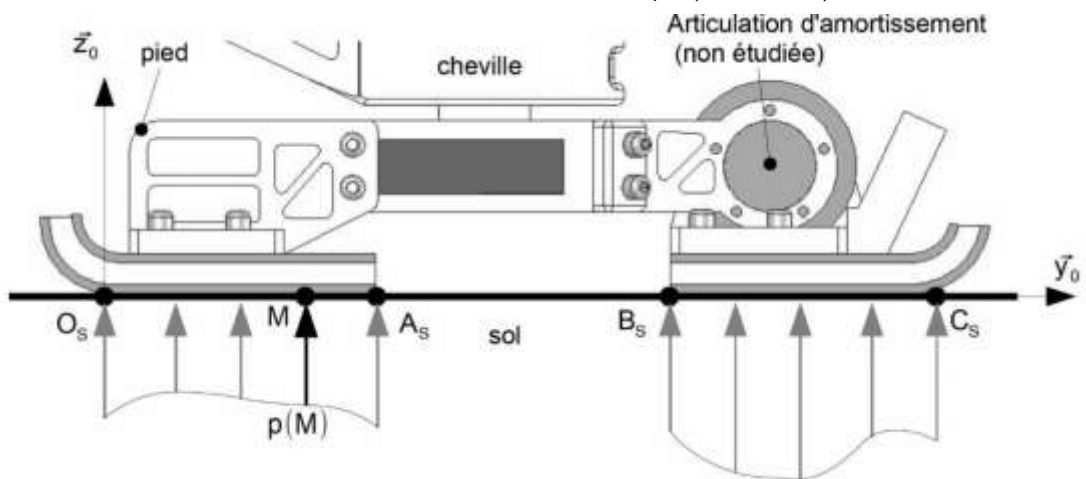


Figure 3 : modélisation du contact entre le pied et le sol

Modélisation de l'effort de contact entre le sol et le robot.

Sous la semelle du robot, la pression de contact avec le sol est supposée répartie de manière uniforme transversalement (suivant la direction \vec{x}_0). Le problème se ramène donc à une répartition linéique de pression sur les deux segments de contact $[O_s; A_s]$ et $[B_s; C_s]$. En chaque point M (d'ordonnée y) de ces segments, la densité d'efforts de contact est $p(M)\vec{z}_0$, avec $p(M)$ en $N.m^{-2}$. On notera que si le robot n'est pas équipé de semelles magnétiques ou adhésives, on a $p(M) > 0$. Ainsi, en notant b la largeur de la semelle suivant \vec{x}_0 et $\Sigma = [O_s; A_s] \cup [B_s; C_s]$, le modèle global d'action mécanique de contact du sol sur le

pied peut être donné par le torseur :
$$\left\{ \begin{aligned} \vec{R}_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} &= b \int_{(M \in \Sigma)} p(M) \vec{z}_0 dy \\ \vec{M}_{(O_s, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} &= b \int_{(M \in \Sigma)} O_s \vec{M} \wedge p(M) \vec{z}_0 dy \end{aligned} \right\}$$

Q6.1. Montrer que $\{T_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}\}$ est un glisseur.

Soit H_s le point de la droite (O_s, \vec{y}_0) tel que $\vec{M}_{(H_s, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = \vec{0}$, on notera $O_s \vec{H}_s = Y_{H_s} \vec{y}_0$. Ce point est fondamental en robotique humanoïde, il prend le nom de Zero Moment Point (ZMP) : de l'anglais « point de moment nul ».

Q6.2. Montrer que $H_S \in [O_S; C_S]$, c'est-à-dire qu'il est situé sous le pied du robot.

Q6.3. Donner la forme du torseur $\{T_{sol \rightarrow pied}\}$ dans le cas d'un contact avec frottement dans le plan sagittal (c'est-à-dire que la densité d'efforts de contact est $p(M)\vec{z}_0 + t(M)\vec{y}_0$). Montrer que les résultats des questions 1 et 2 sont inchangés.

7. Frein de guindeau de bateau de commerce

Lors du mouillage de l'ancre, la chaîne qui y est attachée se met en mouvement à une vitesse qu'il faut contrôler. Sous l'effet de son propre poids (croissant peu à peu avec la longueur déroulée), la chaîne peut prendre une vitesse considérable.

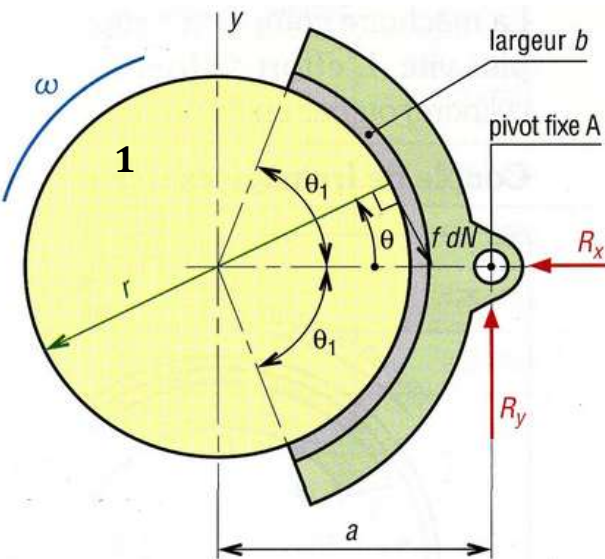
Le freinage est assuré par le frottement de garnitures spéciales, de coefficient de frottement f , fixées sur les mâchoires, sur le tambour **1** de dévidement de la chaîne.

On peut considérer que si pour des garnitures neuves la répartition de la pression du tambour sur les garnitures est sinusoïdale, après quelques manœuvres, l'usure conduira à une répartition affine de la pression de contact définie par une fonction de \mathcal{R} dans \mathcal{R}^+ tel que $p : \theta \rightarrow p(\theta)$,

avec $p_{max} = p(\theta_1)$ et $p_{min} = p(-\theta_1)$.

Et $\overrightarrow{p(M)}.dS = dN.\vec{u}_r - f.dN.\vec{u}_\theta$ avec $dN = p(\theta).dS$ (effort élémentaire normal au contact).

Le tambour de centre O a un rayon $r = 0,6 m$ et une largeur b .



On donne $a = 0,8 m$, $\theta_1 = 60^\circ$ et $f = 0,4$.

L'action mécanique du dispositif (non représenté) de freinage sur la mâchoire se réduit en A à un glisseur.

Le cahier des charges impose :

- **Exigence 1 :** un couple de freinage mâchoire/tambour en O , $C_{m \rightarrow t}(O) = 10000 daN.m$ afin de limiter la vitesse de la chaîne à $V_{max_{ch/0}} = 1,5 m/s$.
- **Exigence 2 :** pour éviter le phénomène de fading (frein chaud entraînant une chute du coefficient f rendant le système de freinage inopérant), on impose au contact $p_{max} = 12 bar$.

(Voir vidéo Guindeau fading)

Q7.1. Développer une démarche pour déterminer les expressions de l'action mécanique $\overrightarrow{R_{disp \rightarrow mâch}}$ et du moment $C_{m \rightarrow t}(O)$ nécessaire pour actionner la mâchoire conformément à l'exigence 1.



Q7.2. Montrer que par un choix astucieux de a, R et θ_1 , on aura une pression de contact uniforme p_u entre la mâchoire et la garniture. On fera ce choix pour la suite.

Q7.3. Dimensionner une largeur b de la mâchoire conforme aux exigences.

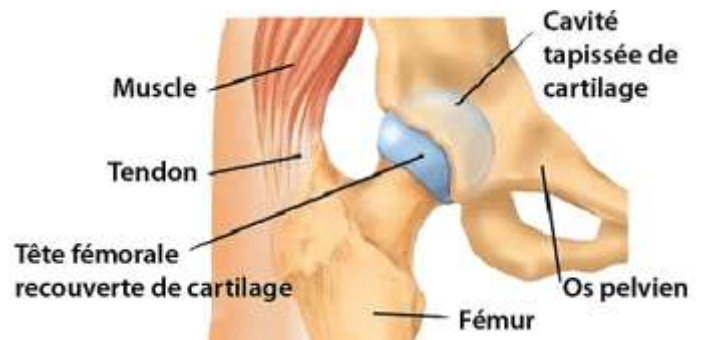
Dimensionnement de la liaison pivot en A. Choix du palier lisse.

Q7.4. Calculer la norme de l'effort supporté par la liaison pivot.

Q7.5. On suppose, conformément aux résultats de l'exercice 4, que $F = p_0 \cdot D \cdot L$. Choisir un palier lisse.

8. Biomécanique : Evaluation de la pression maxi sur la tête fémorale lors de la course à pied.

La course à pied, pratiquée pendant une durée et avec une intensité raisonnable, est bénéfique pour la santé. Cependant, à chaque foulée, le coureur fait subir une charge dynamique F_d à ses têtes fémorales de l'ordre de 5 fois son poids. Cette charge est le résultat de l'accélération (algébrique) des différentes parties de son corps.



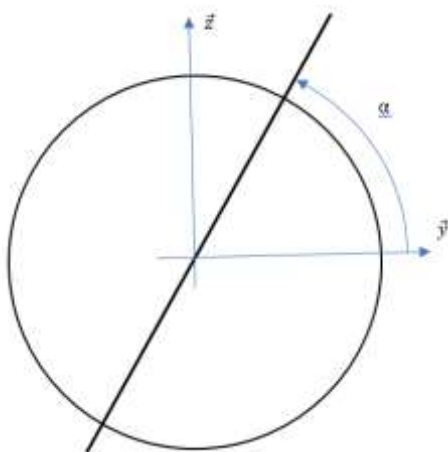
Par ailleurs, évidemment indépendamment d'une bonne pratique sportive, cette articulation peut se détériorer. Les progrès médicaux font de la **prothèse totale de hanche (PTH)** une opération courante.

Les derniers matériaux développés ont pour objectif de limiter l'usure progressive de la prothèse (Méталsul® ou Céramique), d'améliorer la fixation à l'os (Titane ou Hydroxyapatite) et d'éviter la luxation (cupule double mobilité).

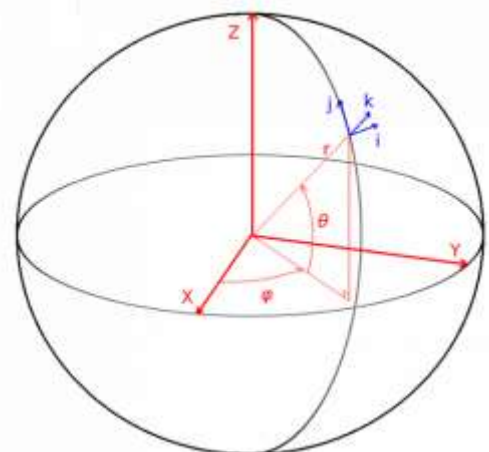
On se propose dans ce TD de déterminer, sous quelques hypothèses, la pression maxi sur la tête fémorale. Cette grandeur participe à la conception et aux choix technologiques.

Données et hypothèses :

- Surface de contact S : hémisphérique de rayon R



L'angle α délimite l'hémisphère de contact.



Coordonnées sphériques

- Pression de contact :

Pour $C \in S$, $\overrightarrow{p(C)} = \overrightarrow{p(R, \theta, \varphi)} = p_{max} \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{z}$ si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $\overrightarrow{p(C)} = \vec{0}$ sinon.

Q8.1. Représenter graphiquement la fonction $p, \forall C \in S$.

Q8.2. Déterminer l'expression de l'effort local du fémur sur le bassin $\overrightarrow{dF_{f \rightarrow b}(C)}, \forall C \in S$.

Q8.3. Définir les bornes d'intégration.

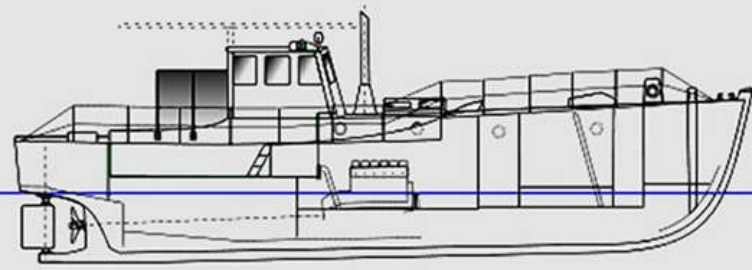
Q8.4. Calculer l'effort $\overrightarrow{F_{f \rightarrow b}}$ pour $\alpha = 60^\circ$ en fonction de R et p_{max} .

Q8.5. Calculer p_{max} dans le cas de la course à pied pour $R=25$ mm.

On donne : $\int_0^\alpha \left(\pi + 2 \cdot a \sin\left(\frac{\tan(\theta)}{\tan(\alpha)}\right) \right) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta = 1,57$ pour $\alpha = 1,0472$ rad (soit 60°).

9. PROPULSION D'UN NAVIRE

Longueur hors tout	15M. 60
Maître bau	4M. 06
Tirant d'eau	1M. 45
Déplacement	20 T.
Propulsion	1 hélice sur réducteur Diesel Baudoin DK6
Puissance	1 x 88 Kw
Vitesse	12 n



La chaîne cinématique (propulsion du navire) dans l'industrie nautique est classiquement constituée du **moteur, d'un réducteur-inverseur (marche avant et marche arrière), d'un arbre de transmission et de l'hélice.**

Le but de ce TD est de vérifier le choix de la motorisation. Nous allons faire, cependant, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices.

Le déplacement est la masse du volume immergé d'eau immergé du le navire.

Une vitesse de 1 nœud vaut $\frac{1852}{3600}$ m/s.

La puissance de 88 kW du moteur est atteinte à $N_{1/0} = 1000$ tr/min et correspond à la vitesse d'avancement de 12 n. Ce point de fonctionnement constituera notre point d'étude.

Détermination des actions mécaniques de l'eau sur l'hélice

Hypothèses : (voir aussi le plan et le schéma cinématique du réducteur)

L'avancement du navire se fait selon le sens et la direction de l'axe (O, \vec{x}) .

L'ensemble formé par le pignon 2, l'arbre de transmission (de la sortie du réducteur à l'hélice) et l'hélice, cinématiquement équivalents, est noté Σ_3 .

L'ensemble composé de l'arbre moteur et le pignon 1, cinématiquement équivalents, est noté Σ_1 .

On modélise l'action de l'eau sur une portion de longueur dr d'une pale d'hélice par une densité linéique d'effort $\overrightarrow{\Omega_f(M)} = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot b_h \cdot c_v \cdot V(r)^2 \cdot \vec{v}_i + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot b_h \cdot c_x \cdot V(r)^2 \cdot \vec{x}$ $i \in \{1; 2; 3\}$

On suppose que $V(r) \approx r \cdot \omega_{3/0}$ (c'est-à-dire qu'on néglige la vitesse d'avancement du bateau par rapport à l'eau) et on pose $\omega_{3/0} > 0$.

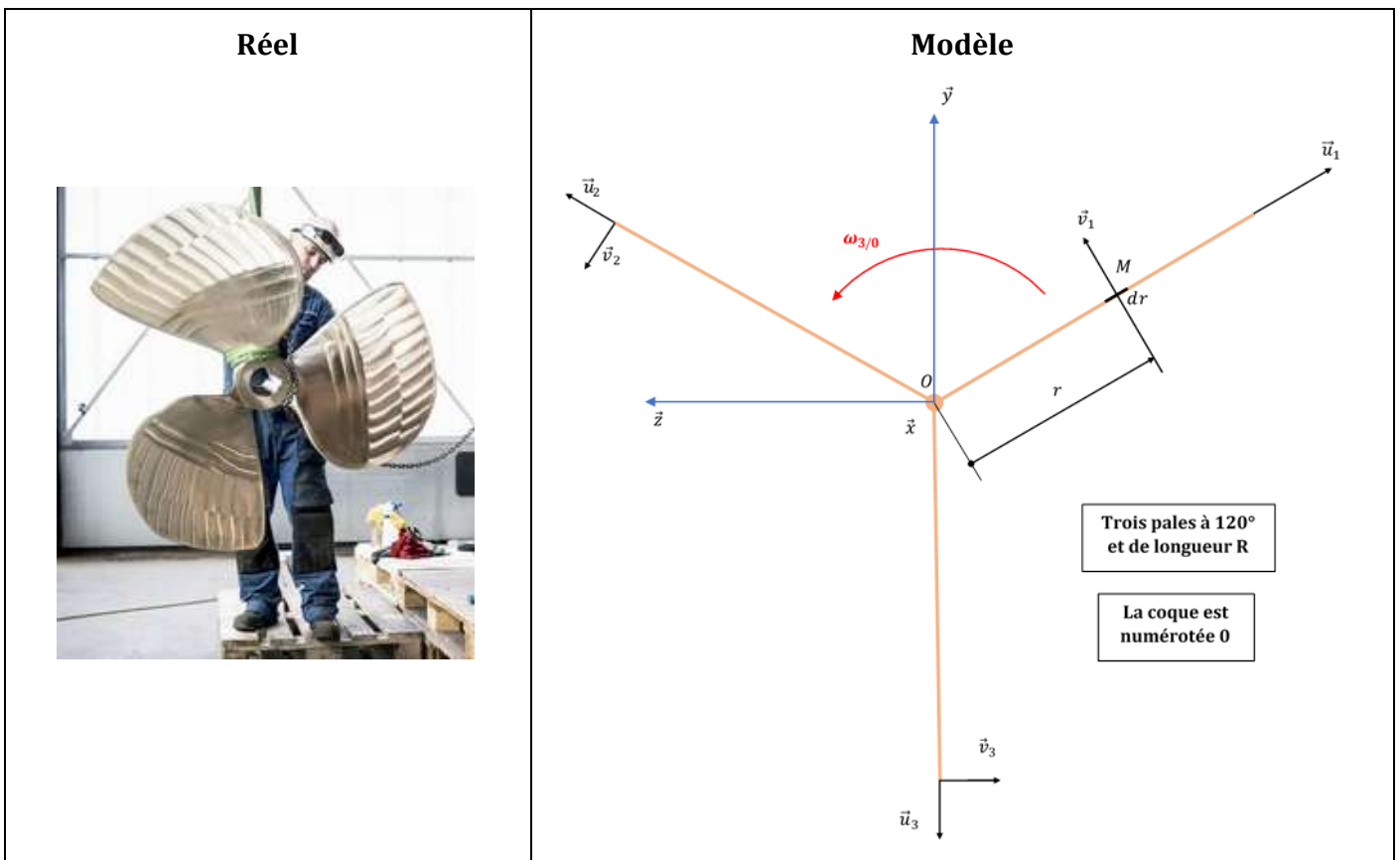
ρ : masse volumique de l'eau de mer

b_h : grandeur caractéristique de la pale (diamètre, pas, forme ...)

c_v : coefficient hydrodynamique de traînée

c_x : coefficient hydrodynamique de poussée (équivalent à la portance)

$V(r)$: vitesse du point M d'abscisse r de l'hélice/l'eau.



Q9.1. Calculer le torseur d'action mécanique au point O de l'eau sur la pale 1.

Q9.2. L'hélice est constituée de 3 pales à 120° selon les droites (O, \vec{u}_i) . En déduire le torseur d'actions mécaniques $\{\mathbf{T}_{(eau \rightarrow hélice)}\}$ au point O de l'eau sur l'hélice.

Estimation de R_T la résistance à l'avancement du navire

Le rendement d'hélice η_h , ou rendement propre, est le rapport entre la puissance propulsive P_{prop} de l'hélice (produit de la poussée par la vitesse d'avancement du bateau $V_{bat/eau}$) et la puissance mécanique P_h fournie à l'hélice par la chaîne cinématique. Cette puissance s'exprimerait par $P_h = -C_{e \rightarrow h}(O) \cdot \omega_{3/0}$ (voir plus loin produit du couple par la vitesse de rotation).

Le rendement propre de l'hélice de ce navire est $\eta_h \approx 0,68$ (ce rendement est classiquement compris entre 0,3 et 0,8).

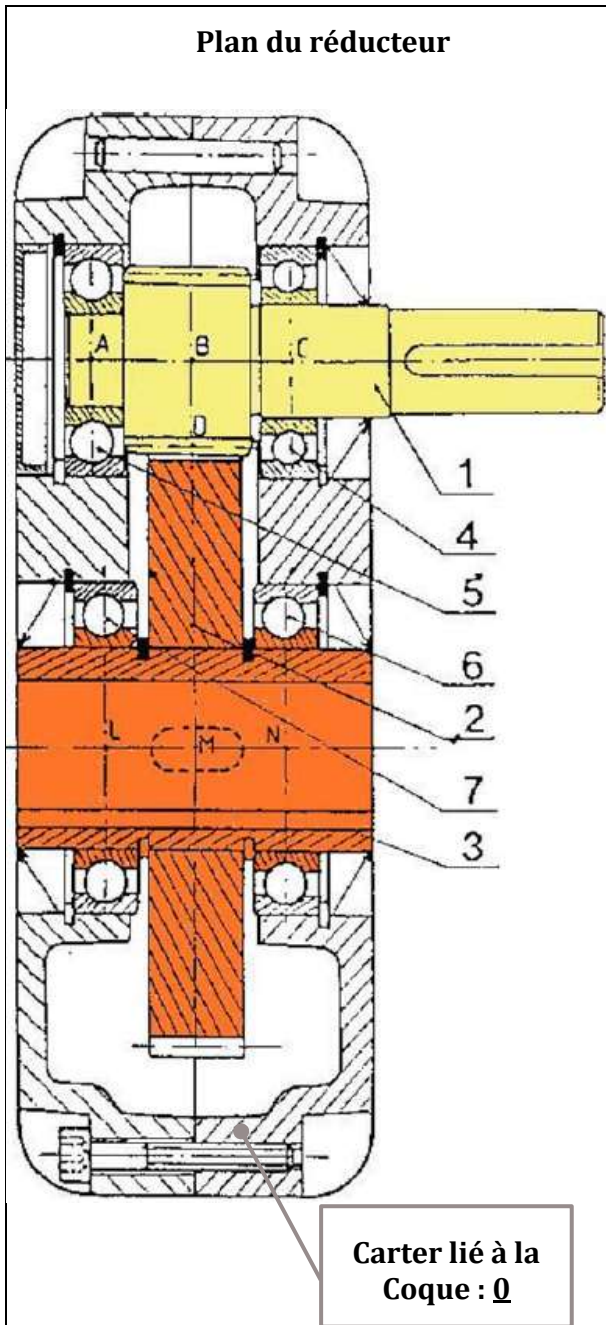
A vitesse constante du bateau, la poussée de l'hélice compense la résistance à l'avancement R_T .

Le rendement de la chaîne cinématique est le rendement mécanique η_m (frottements divers $\eta_m \approx 0,95$).

Q9.3. Calculer la puissance à l'hélice.

Q9.4. Calculer la résistance à l'avancement R_T .

Détermination du couple moteur sur 1



Ne pas tenir compte des points indiqués sur le plan. Se référer au schéma cinématique.

Données

Le pignon 1 de rayon r_1 , solidaire de l'arbre moteur, possède $Z_1 = 50$ dents.

Le pignon 2 de rayon r_2 , solidaire de l'arbre de transmission vers l'hélice, possède $Z_2 = 125$ dents.

Q9.5. Quel est le sens de rotation de 1/0 (signe de $\omega_{1/0}$) ?

On note les couples suivants :

$$C_{e \rightarrow h}(O) = \overrightarrow{M_{eau \rightarrow hélice}(O)} \cdot \vec{x}$$

$$C_{mot}(B) = \overrightarrow{M_{moteur \rightarrow 1}(B)} \cdot \vec{x}$$

Q9.6. En déduire le signe de $C_{mot}(B)$.

Q9.7. Exprimer le rapport des couples précédents en fonction des nombres de dents des pignons.

On rappelle que $\eta_m = \frac{P_s}{P_e} = \left| \frac{C_{e \rightarrow h}(O) \cdot \omega_{3/0}}{C_{mot}(B) \cdot \omega_{1/0}} \right|$

Q9.8. Le moteur ne génère qu'un couple sur 1. Donner $\{T_{(mot \rightarrow 1)}\}$ en B.

Q9.9. Donner le torseur cinématique $\{V_{(mot/0)}\}$ en B.

Q9.10. Exprimer la puissance mécanique que le moteur devra fournir pour la propulsion du navire.

Détermination des actions mécaniques dans les liaisons

Hypothèses complémentaires :

Les poids des solides sont négligés devant les autres actions mécaniques.

Les liaisons sont parfaites.

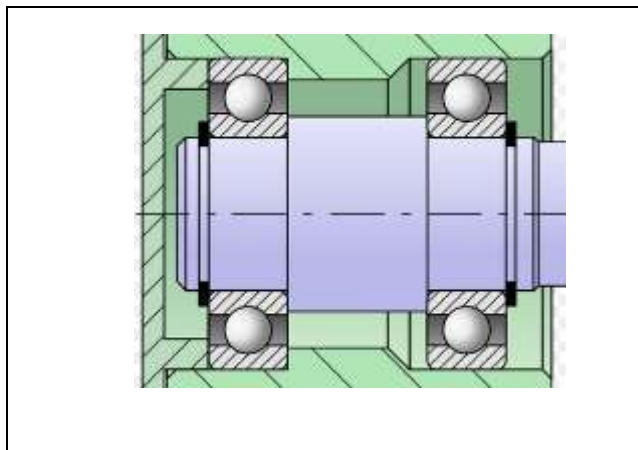
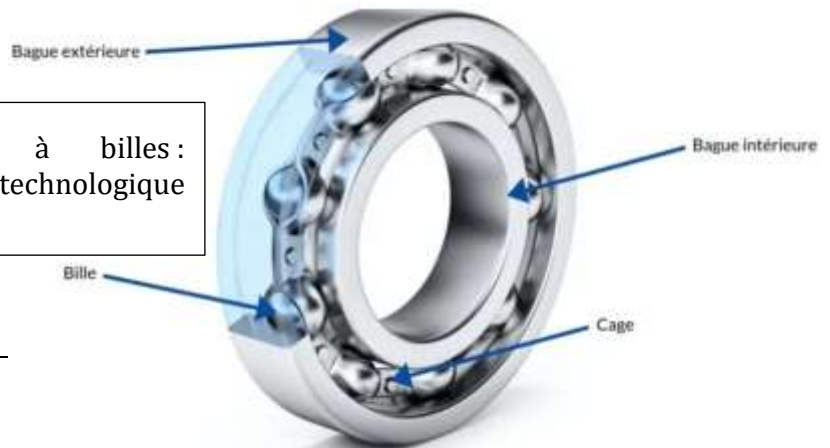
Les pignons 1 et 2 sont à dentures droites avec un angle de pression $\alpha = 20^\circ$.

Q9.11. On sait que $C_{mot}(B)$ et $\omega_{1/0}$ sont de même signe puisque 1 est l'arbre moteur. Réaliser une figure avec les deux pignons et tracer la résultante des forces de 2 sur 1 au point I (voir le cours C13).

Q9.12. Donner la forme du torseur $\{T_{(2 \rightarrow 1)}\}$ en I (voir C13). Vous utiliserez les mêmes notations que le cours.

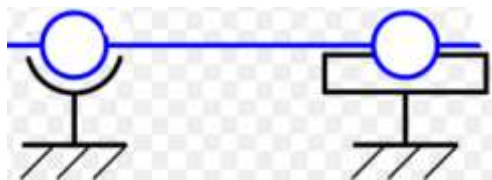
Données complémentaires sur les liaisons mécaniques

Roulement à billes : Composant technologique réel

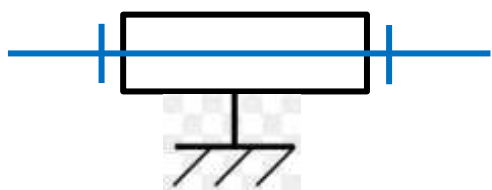


Plan technique pour la réalisation d'une liaison pivot à partir de 2 roulement à billes.

Schématisations cinématiques



Ou bien, simplement,



Association classique :

Une rotule en parallèle avec une linéaire annulaire formant une liaison pivot (voir cours C8) comme **liaison équivalente**.

Q9.13. Construire le graphe de structure de l'ensemble composé du réducteur avec son arbre de transmission et de l'hélice.

Q9.14. Isoler Σ_1 et déterminer tous les torseurs d'actions mécaniques agissant sur Σ_1 en fonction de $C_{mot}(B)$.

Q9.15. Isoler Σ_3 et déterminer tous les torseurs d'actions mécaniques agissant sur Σ_3 en fonction de $C_{e \rightarrow h}(O)$.

Schéma cinématique

