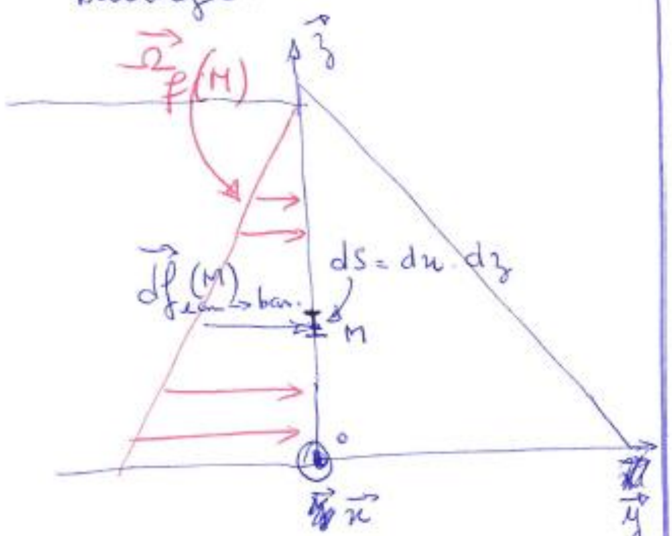
8/ Exercice 5. Barrage

$\boxed{Q51}$ Modèle local de l'action de l'eau sur le barrage.



l'effort élémentaire

$$\overrightarrow{df}_{eau \to bar.}(M) = \vec{\Omega}_f(M) \cdot dS$$

or $\vec{\Omega}_f(M)$ est la pression dite hydrostatique et elle augmente avec la profondeur de manière affine.

On a $\vec{\Omega}_f(M) = g \cdot \rho \cdot (h - z) \vec{y}$

car elle est toujours normale à la surface.

Modèle global :

$$\vec{R}_{eau \to bar.} = \int_0^h \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \vec{\Omega}_f(M) \cdot dS$$

$$= \underbrace{\int_0^h}_{z} \underbrace{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}}_{x} \rho \cdot g (h - z) \cdot dz \cdot dx \cdot \vec{y}$$

en intégrant / x.

$$= \rho \cdot g \cdot L \int_0^h (h - z) \cdot dz \cdot \vec{y}$$

$$= \rho \cdot g L \left[zh - \frac{z^2}{2} \right]_0^h \cdot \vec{y}$$

$$\vec{R}_{eau \to bar.} = \rho \cdot g \cdot L \frac{h^2}{2} \cdot \vec{y}$$

et,

$$\overrightarrow{M}_{eau \to bar}(O) = \int_0^h \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Omega}_f(M) \cdot dS$$

avec $\overrightarrow{OM} = x \vec{x} + z \cdot \vec{z}$

(le point O est au centre de la partie basse du barrage).

impaire sur $[-\frac{L}{2} ; \frac{L}{2}]$

$$= \rho \cdot g \int_0^h \int_{-L/2}^{L/2} \left[x (h - z) \cdot \vec{z} - z (h - z) \cdot \vec{x} \right] dx \cdot dz$$

$$= \rho \cdot g \int_0^h - z \cdot (h - z) \cdot [x]_{-L/2}^{L/2} \cdot dz \, \vec{x}$$

$$= \rho \cdot g \cdot L \left[-\frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} h \right]_0^h \cdot \vec{x}$$

9/

$\overrightarrow{M_{eau \to ban}(O)} = -\rho . g . L . \frac{h^3}{6} . \vec{x}$

Finalement, le modèle global s'écrit :

$$\{T_{eau \to ban}\} : \begin{cases} \vec{R}_{eau \to ban} = \rho . g . L \frac{h^2}{2} . \vec{y} \\ \overrightarrow{M(O)}_{eau \to ban} = -\rho . g . L \frac{h^3}{6} . \vec{x} \end{cases}$$

Le centre de poussée C est défini par $\overrightarrow{M(C)}_{eau \to ban} = \vec{0}$

Comme en Q2.3, on pose $\overrightarrow{OC} = x_c . \vec{x} + z_c . \vec{z}$

et d'après Varignon,

$$\overrightarrow{M(O)}_{eau \to ban} = \cancel{\overrightarrow{M}_{eau \to ban}(C)} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{R}_{eau \to ban}$$

$$= \rho . g . L . \frac{h^2}{2} \left[+ x_c . \vec{z} - z_c . \vec{x} \right]$$

On en déduit

$$\begin{cases} x_c = 0 \\ z_c = \frac{h}{3} \end{cases}$$

$\boxed{Q5.2}$ Le centre de gravité est l'unique point G tel que

$$\iiint_V \overrightarrow{GM} . dm = \vec{0}$$ (Barycentre)

$$\Leftrightarrow \iiint_V (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}) . dm = \vec{0}$$

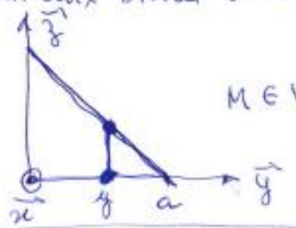
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GO} \iiint_V dm + \iiint_V \overrightarrow{OM} \, dm = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} . M = \iiint_V \overrightarrow{OM} . dm$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} . \iiint_V \overrightarrow{OM} . dm$$

avec $\boxed{dm = \rho . dV}$ et $M = \rho . a L \frac{h}{2}$

Attention aux bornes d'intégration



$$\boxed{\begin{array}{c} -\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2} \\ 0 \le y \le a \\ 0 \le z \le -\frac{h}{a} . y + h \end{array}}$$

et $\overrightarrow{OM} = x . \vec{x} + y . \vec{y} + z . \vec{z}$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2}}_{x} \underbrace{\int_{0}^{a}}_{y} \underbrace{\int_{0}^{-\frac{h}{a} y + h}}_{z} (\underbrace{x . \vec{x}}_{\text{impaire } [-\frac{L}{2} ; \frac{L}{2}]} + y . \vec{y} + z . \vec{z}) . \rho \; dx . dz . dy$$

$$= \frac{1}{M} . L \rho \int_0^a \left[y . z . \vec{y} + \frac{z^2}{2} \vec{z} \right]_0^{-\frac{h}{a} y + h} . dy$$

$$= \frac{1}{M} . L \rho \int_0^a \left(y . \left(h - \frac{h}{a} y \right) . \vec{y} + \frac{1}{2} \left(h - \frac{h}{a} y \right)^2 \vec{z} \right) dy$$

$$\vec{OG} = \frac{L}{M}\rho\left[\left(\frac{a^2}{2}h - h\frac{a^3}{3a}\right)\cdot\vec{y}\right.$$
$$+\cancel{\left[\frac{1}{6}\left(h-\frac{h}{a}a\right)^3\cdot\left(-\frac{a}{h}\right)\vec{z}\right]}$$
$$\vec{OG} \neq \frac{L}{M} \qquad \left.-\frac{1}{6}h^3\cdot\left(-\frac{a}{h}\right)\right]\cdot\vec{z}$$

$$\vec{OG} = \frac{L\cdot\rho\, h\, a}{\rho\cdot a\, L\cdot\frac{h}{2}}\left[+\frac{a}{6}\,\vec{y} + \frac{1}{6}\,h\cdot\vec{z}\right]$$

$$\boxed{\vec{OG} = +\frac{a}{3}\,\vec{y} + \frac{1}{3}h\cdot\vec{z}}$$
(et $x_G = 0$)

Q5.3

On a $\{T_{(pes\to bar)}\}$ en G qui se réduit à un glisseur.
Sa résultante est $\vec{P} = -M\cdot g\cdot\vec{z}$
avec $M = \rho\cdot L\cdot a\cdot\frac{h}{2}$

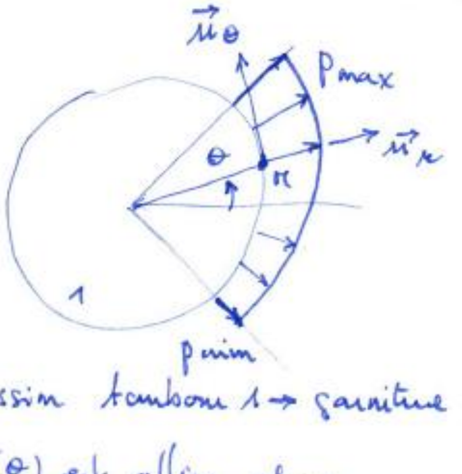
$$\{T_{(pes\to bar)}\}: \left\{\begin{matrix}\vec{P} = -M\cdot g\cdot\vec{z}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_G$$

Q5.4

$$\vec{R}_{eau\to bar} = \rho\cdot g\cdot L\cdot\frac{h^2}{2}\cdot\vec{y}$$
$$= \underbrace{353160000}_{N}\cdot\vec{y}$$
$$= 353{,}16\cdot 10^6\cdot\vec{y}$$

La poussée de l'eau sur le barrage est supérieure à la poussée maxi du CdCharge.

7: Guindeau de navire



pression tambour 1 → garniture

$p(\theta)$ est affine donc,

$$p(\theta) = \frac{p_{max}-p_{min}}{2\theta_1}\cdot\theta + \frac{p_{max}+p_{min}}{2}$$