1/

# TD13bis Intégration

Le but de ce TD est de mettre en relation approche locale (avec sa densité d'effort) et l'approche globale (avec les torseurs).

Dans la démarche statique, on privilégie l'approche globale.

Pour calculer effort et moment, on a besoin de 3 données

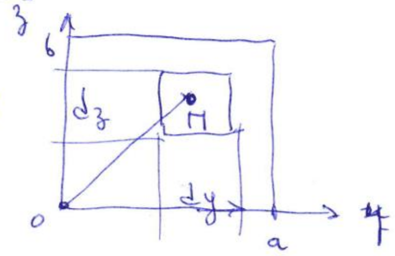
- la densité d'effort $\overrightarrow{\Omega_f}(M)$
- l'élément d'intégration $dL$ ; $dS$ ou $dV$
- le levier $\overrightarrow{OM}$

(Voir C13 p3/16 et 4/16)

## Exercice 1 (Voir cours C7 parag 1.1.)

$\boxed{Q1.1}$ Surface plane

$M \in S$




- $\overrightarrow{OM} = y.\vec{y} + z.\vec{z}$

  $0 \leq y \leq a$ et $0 \leq z \leq b$

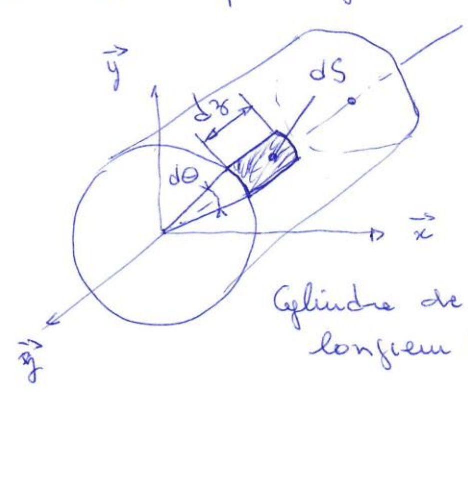
- $dS = \underbrace{dy.dz}_{\text{2 variables intégration}}$ $(m^2)$

et $\iint_S \rightarrow \int_0^a \int_0^b \text{---} \, .dy.dz.$

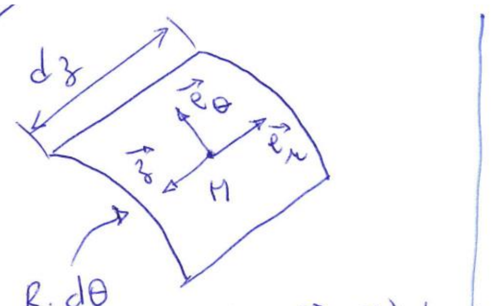
On intègre par rapport à y puis par rapport à z.

Ce n'est pas plus compliqué que cela.

$\boxed{Q1.2}$ Surface cylindrique



2/



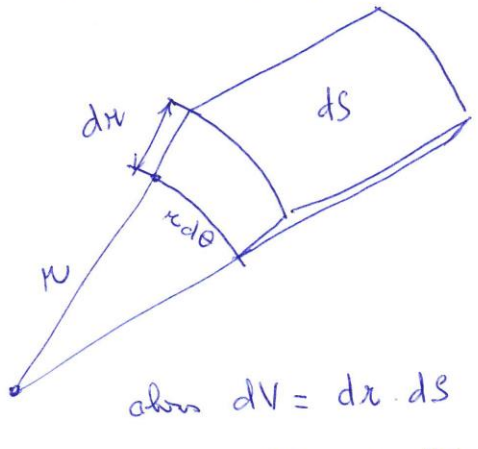

On a alors

$$\boxed{dS = R.d\theta.dz}$$

On intégrera par rapport à θ et à z.

$\boxed{\text{Q1.3}}$ Volume cylindrique

Il faut ajouter une dimension pour avoir dV.
On fait varier le rayon de dr et $0 \leq r \leq R$.



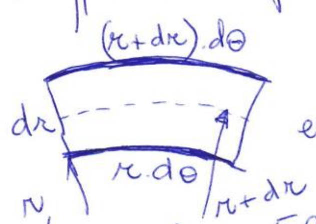

alors $dV = dr.dS$

avec $dS = \underset{\neq R}{r}.d\theta.dz$

soit $dV = \underbrace{r.dr.d\theta.dz}_{\text{3 variables d'intég.}}$ ($m^3$)

~~Q1.4~~ ~~Surface~~

Remarque : on assimile dV à un parallélépipède.
Cela se justifie en négligeant les infiniments petits du 2nd ordre ou du 3nd ordre.
En effet la surface latérale

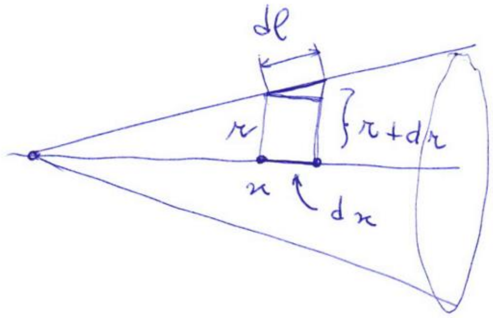


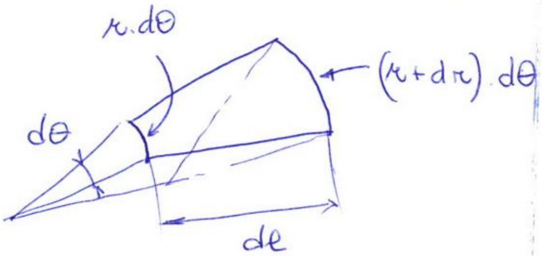

est assimilée à $dr.r.d\theta$. Elle est plus proche de $\left(dr.\left(r+\frac{dr}{2}\right).d\theta\right)$
qui vaut $dr.r.d\theta + \underbrace{\frac{dr^2}{2}d\theta}_{\ll dr.r.d\theta}$

car $r \gg \frac{dr}{2}$

Le passage à la limite pour le calcul intégral ~~donc~~ justifie
$dS = (dr.r.d\theta).dz$

## Q1.4 Surface conique

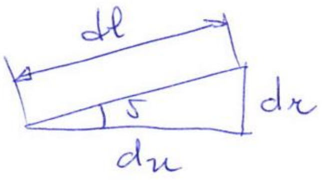



On a $dS = r.d\theta.dl$

(voir remarque Q1.3) et les infiniments petits.

or $dl$ n'est pas une variable seules $\theta$ et $r$ le sont pour un cône. On écrit



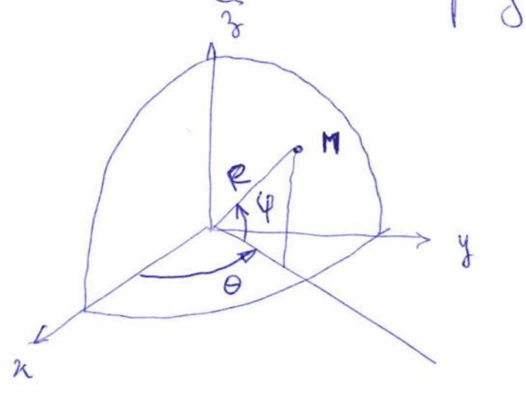

$dl.\sin\delta = dr$

d'où $\boxed{dS = \dfrac{r.dr.d\theta}{\sin\delta}}$

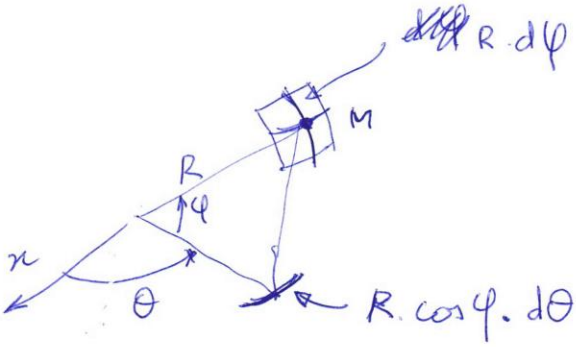
Cône

## Q 1.5 Surface sphérique

(Voir cours C7 parag 1.




Une petite surface autour de M est :




$dS = R.d\varphi \cdot R.\cos\varphi.d\theta$

$\boxed{dS = R^2.\cos\varphi.d\varphi.d\theta}$ $(m^2)$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ pour parcourir toute la sphère

## Q16 Boule : R varie


$dV = dS.dr$

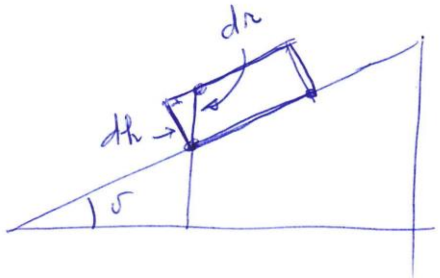
$\boxed{dV = r^2.\cos\varphi.d\varphi.d\theta.dr}$

$0 \leq r \leq R$

3'

$\boxed{Q\,1.4}$ Volume élémentaire d'un cône.

Il faut rajouter une dimension $dh$




On a $dV = dh \cdot dS$

$$= dh \cdot \left( \frac{r \cdot dr \cdot d\theta}{\sin\delta} \right)$$

et $dh = dr \cdot \cos\delta$

$$dV = r \cdot dr^2 \cdot d\theta \cdot \frac{\cos\delta}{\sin\delta}$$

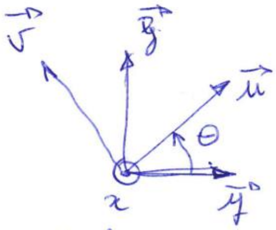
$$dV = \frac{r \cdot dr^2 \cdot d\theta}{\tan\delta} \quad (m^3)$$

Il faut intégrer <u>2 fois</u> les fonctions de $r$.

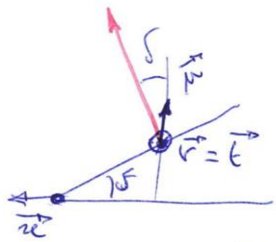
<u>Ex</u> : $r \rightsquigarrow \frac{r^2}{2} \rightsquigarrow \frac{r^3}{6}$

pour avoir la primitive

Vecteurs normal $\vec{n}$ et tangentiel $\vec{t}$ à $dS$.




de face




de profil dans le plan $(0, \vec{x}, \vec{u})$

$\vec{n} = \cos\delta \cdot \vec{u} + \sin\delta \cdot \vec{x}$

$\vec{t} = \vec{v}$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{n} = \cos\delta \left( \cos\theta \cdot \vec{y} + \sin\theta\, \vec{z} \right) \\ \qquad + \sin\delta \cdot \vec{x} \\ \vec{t} = -\sin\theta \cdot \vec{y} + \cos\theta \cdot \vec{z} \end{array} \right.$$

4/ Exercice 2 :

$\boxed{Q21}$

Par définition

$$\overrightarrow{F}(\text{fluide} \to 1) = \iint_S \overrightarrow{\Omega}_f(M) \cdot dS$$

$$= \int_0^a \int_h^{h+b} p \cdot \vec{z} \cdot dx \cdot dy$$

$$= p \cdot \vec{z} \int_h^{h+b} [x]_0^a \cdot dy$$

$$= p \cdot a \cdot \vec{z} \int_h^{h+b} dy$$

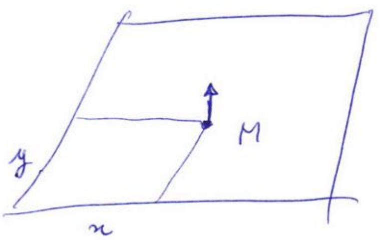
$$= p a \vec{z} \cdot [y]_h^{h+b}$$

$$\overrightarrow{F}(\text{fluide} \to 1) = p \cdot ab \cdot \vec{z} = F \cdot \vec{z}$$

$\boxed{Q22}$ Par définition,

$$\overrightarrow{M}(O, \text{fluide} \to 1) = \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\Omega}_f(M) \cdot dS$$

avec $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y}$




$$\overrightarrow{M}(O, \text{fluide} \to 1) = \int_0^a \int_h^{h+b} (-p x \cdot \vec{y} + p y \cdot \vec{x}) \cdot dx \cdot dy$$

$$= p \int_h^{h+b} \left[ -\frac{x^2}{2} \cdot \vec{y} + x y \cdot \vec{x} \right]_0^a \cdot dy$$

$$= p \cdot \int_h^{h+b} \left( -\frac{a^2}{2} \cdot \vec{y} + a \cdot y \cdot \vec{x} \right) \cdot dy$$

$$= p \cdot \left[ -\frac{a^2}{2} \cdot y \cdot \vec{y} + a \cdot \frac{y^2}{2} \cdot \vec{x} \right]_h^{h+b}$$

$$= p \cdot \left[ -\frac{a^2}{2} \cdot b \cdot \vec{y} + \frac{a}{2}\left[(h+b)^2 - h^2\right] \vec{x} \right]$$

$$= p \cdot ab \cdot \vec{y} \cdot \left(-\frac{a}{2}\right)$$

$$+ p \cdot \frac{a}{2} (2hb + b^2) \cdot \vec{x}$$

$$= -F \cdot \frac{a}{2} \cdot \vec{y} + F \cdot \left(h + \frac{b}{2}\right) \cdot \vec{x}$$

$\boxed{Q2.3}$ Le centre de poussée C est l'unique point tel que $\overrightarrow{M}(C, \text{fluide} \to 1) = \vec{0}$

Posons $\overrightarrow{OC} = x_c \cdot \vec{x} + y_c \cdot \vec{y}$

D'après Varignon,

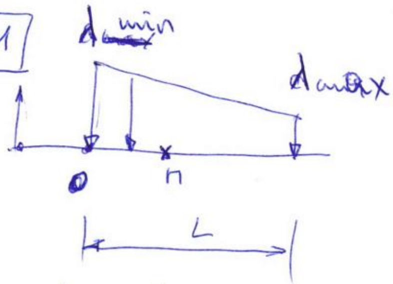
$$\overrightarrow{M}(O, \text{fluide} \to 1) = \overrightarrow{M}(C, \text{fluide} \to 1) + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{F}(\text{fluide} \to 1)$$

$$= (x_c \cdot \vec{x} + y_c \cdot \vec{y}) \wedge F \cdot \vec{z}$$

d'où
$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= \frac{a}{2} \\ y_c &= h + \frac{b}{2} \end{aligned}}$$

2/ Exercice 3 :

$\boxed{Q3.1}$




La densité d'effort en M est $\vec{\Omega}_f(M) = \underbrace{\underbrace{\lambda(x)}_{kg/m}.g}_{N/m}.\vec{y}$

et $\lambda(x) = \left[\frac{d_{max}-d_{mini}}{L}.x + d_{mini}\right]$

$(\lambda(x) \in \mathbb{R}^-)$

Evidemment, la densité étant affine, on a :

$$\vec{F}_{(pes\to1)} = \|\vec{\Omega}_{f_{moy}}\| L.\vec{y}$$

$$\vec{F}_{(pes\to1)} = +\left(\frac{d_{max}+d_{min}}{2}\right).g.L.\vec{y}$$

ou par intégration

$$\vec{F}_{(pes\to1)} = \int_0^L \vec{\Omega}_f(M).dx$$

$$= \int_0^L d(x).g.\vec{y}.dx$$

$$= \ldots$$

$\boxed{Q3.2}$

On pose $\vec{OM} = x.\vec{x}$

$$\vec{M}(O,pes\to1) = \int_0^L \vec{OM}\wedge\vec{\Omega}_f(M).dx$$

$$= \int_0^L x.\vec{x}\wedge(\lambda(x).g.\vec{y})\,dx$$

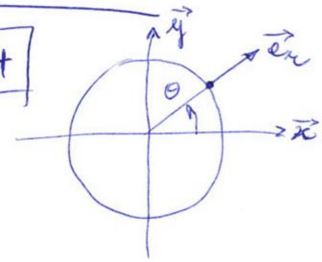
$$= g.\vec{z}.\int_0^L x.\lambda(x).dx$$

$$= g.\vec{z}\left[\frac{-d_{min}+d_{max}}{L}.\frac{x^3}{3} + d_{mini}.\frac{x^2}{2}\right]_0^L$$

$$\vec{M}(O,pes\to1) = g.\frac{d_{min}+d_{max}}{3}.L^2.\vec{z}$$

Exercice 4 :

$\boxed{Q1.4}$




$\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ sont des fonctions de θ

On a $\vec{\Omega}_f(M) = p_0.\vec{e}_r(\theta)$

Par définition,

$$\vec{F}_{1\to2} = \int_{-L/2}^{L/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_0.\vec{e}_r.\underbrace{R.d\theta.dz}_{dS}$$

avec $\vec{e}_r = \underbrace{\cos\theta}_{paire}.\vec{x} + \underbrace{\sin\theta}_{impaire}.\vec{y}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

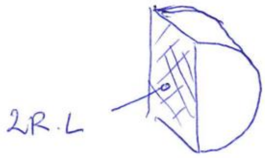
$$\vec{F}_{1\to2} = p_0.R.L.\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos\theta.\vec{x}+\sin\theta.\vec{y}).d\theta$$

$$= p_0.R.L\left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}.\vec{x}$$

6/ $\vec{F}_{1\to2} = p_0 \cdot R \cdot L \cdot 2 \cdot \vec{x}$

$$= p_0 \cdot \underbrace{(2R \cdot L)}_{\text{surface rectangulaire projetée}} \cdot \vec{x}$$

surface rectangu-
-laire projetée.



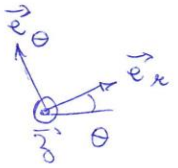

Pour le moment en O, on a par définition

$$\overrightarrow{M_{1\to2}}(O) = \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\Omega_f}(M) \cdot dS$$

avec $\overrightarrow{OM} = R \cdot \vec{e_r} + z \cdot \vec{z}$

et $-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\Omega_f}(M) = \left(R\vec{e_r} + z \cdot \vec{z}\right) \wedge \left(p_0 \, \vec{e_r}\right)$$




$$= p_0 \cdot z \cdot \vec{e_\theta}$$

donc

$$\overrightarrow{M_{1\to2}}(O) = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p_0 \cdot z \cdot R \cdot \underbrace{\vec{e_\theta}}_{\text{fonction de } \theta} \cdot d\theta \cdot dz$$

⚠ fonction de $\theta$

Or la fonction $f(z) = z$ est impaire sur $\left[-\frac{L}{2} ; \frac{L}{2}\right]$ donc, l'intégration par rapport à $z$ donne :

$$\overrightarrow{M_{1\to2}}(O) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p_0 R \underbrace{\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}}_{0} \cdot \vec{e_\theta} \, d\theta$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_{1\to2}}(O) = \vec{0}$$

La description globale donne le torseur :

$$\boxed{\left\{T_{(1\to2)}\right\} : \begin{cases} \vec{F}_{1\to2} = p_0 2RL \cdot \vec{x} \\ \vec{M}_{1\to2}(O) = \vec{0} \end{cases}}$$

$\boxed{\text{Q4.2}}$ On a $F = \|\vec{F}_{1\to2}\|$

d'où $F = 2p_0 \cdot R \cdot L$

ou encore,

$$p_0 = \frac{F}{2 \cdot R \cdot L}$$

Ici, on peut remonter du global ($F$) au local ($p_0$)

7/

**Q4.3**

On calcule $p_0 = \frac{F}{2RL}$

$$p_0 = \frac{3000}{2 \times 8.10^{-3} \times 20.10^{-3}}$$

$$p_0 = 93{,}75\,10^5 \text{ Pa}$$

soit $\boxed{93{,}75 \text{ bar}}$

A priori, pour le palier lisse en bronze BP25 la pression maxi de contact est de 100 daN/cm²

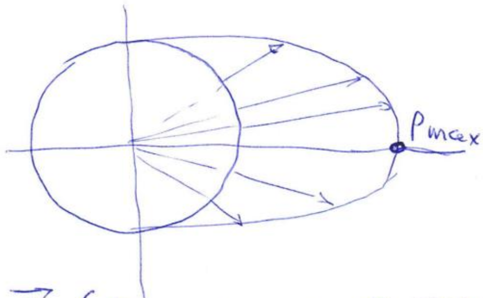
or 1 daN/cm² = 1 bar

donc $p_0 < P_{maxi\,BP25}$

Ce palier pourrait convenir.

Le palier en Alliage ferreux FP20 (225 bar) aussi.

**Q4.4** Une répartition en cosinus de la pression est plus réaliste.




$$\vec{\Omega}_f(M) = p_{max} \cdot \cos\theta \cdot \vec{e_r}(\theta)$$

Le calcul est un peu plus long.

$$\vec{F}_{1\to2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-L/2}^{L/2} p_{max} \cdot \cos\theta \cdot \vec{e_r}(\theta) \cdot R\, d\theta \cdot dz$$

$$= p_{max} RL \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta^2 \cdot \vec{x} + \underbrace{\sin\theta \cdot \cos\theta}_{\text{impaire sur } [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]} \cdot \vec{y})\, d\theta$$

$$= p_{max} \cdot L \cdot R \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta^2 \cdot d\theta \cdot \vec{x}$$

$$= p_{max} \cdot L \cdot R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \underbrace{\cos 2\theta}_{\int \text{nulle sur } [-\pi/2;\pi/2]}) \cdot d\theta \cdot \vec{x}$$

$$= p_{max} \cdot L \cdot R \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \vec{x}$$

$$\boxed{\vec{F}_{1\to2} = p_{max} \cdot L\, R \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \vec{x}}$$

7/ Pour le moment,

$$\cancel{\overrightarrow{M_{1\to 2}(O)} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-L/2}^{L/2} p_{max} \cos\theta\, \vec{e}_r(\theta) \wedge}$$

$$\overrightarrow{M_{1\to 2}}(O) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-L/2}^{L/2} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Omega}\, p(M)\, dS$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-L/2}^{L/2} p_{max} \cdot \cos\theta \cdot \underbrace{z}_{\text{impaire sur } [-\frac{L}{2};\frac{L}{2}]} \cdot \vec{e}_\theta(\theta) \cdot R \cdot d\theta \cdot dz$$

donc

$$\overrightarrow{M_{1\to 2}}(O) = \vec{0}$$

$$\left\{ T_{(1\to 2)} \right\}_O : \begin{cases} \vec{F}_{1\to 2} = p_{max} \cdot \dfrac{LD\pi}{2} \cdot \vec{x} \\ \overrightarrow{M_{1\to 2}}(O) = \vec{0} \end{cases}$$

et $p_{max} = \dfrac{2F}{LD\pi} \simeq 119{,}4 \cdot 10^5\, Pa$

$$\boxed{p_{max} = 119{,}4 \text{ bar}}$$

Evidemment, la pression $p_{max}$ est > à $p_0$

Seul le palier lisse en Alliage ferreux convient.