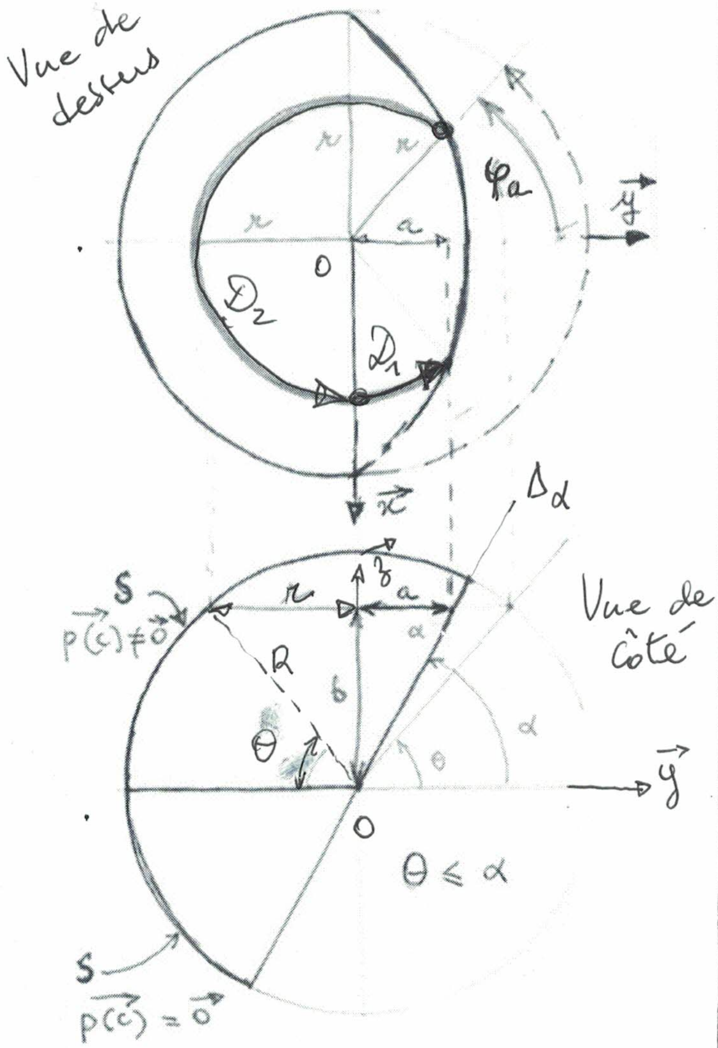
Corrigé du TD 8 : Prothèse totale de hanche



r est le rayon du méridien associé à θ

Δ_α : droite dans le plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$ correspond à l'intersection avec le plan d'inclinaison α

R : rayon de la sphère

On a $a = r \cdot \cos\varphi_a$

$b = R \cdot \sin\theta$

$r = R \cdot \cos\theta$

et $\dfrac{b}{a} = \tan\alpha$

d'où $\cos\varphi_a = \dfrac{\tan\theta}{\tan\alpha}$

et comme $\varphi_a \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$

$$\varphi_a = \mathrm{Arccos}\left(\frac{\tan\theta}{\tan\alpha}\right)$$

· φ_a va nous servir à déterminer les bornes d'intégration

L'angle θ varie de $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ car sur $[-\pi/2 ; 0]$, $\vec{p(c)} = \vec{0}$

mais il faut fractionner cet ~~dom~~ intervalle :

$\theta \in [\alpha ; \pi/2] \rightarrow \varphi \in [0, 2\pi]$

$\theta \in [0 ; \alpha] \rightarrow \varphi$ à fractionner en $[0 ; \pi/2 - \varphi_a] \rightarrow \mathcal{D}_1$

et $[\pi/2 + \varphi_a ; 2\pi] \rightarrow \mathcal{D}_2$

ainsi, on a bien φ contenu ~~entre~~ dans $[0 ; 2\pi]$.

On peut imaginer un ~~de~~ autre découpage astucieux car $\overrightarrow{p(C)}$ n'est pas fonction de φ mais le découpage proposé de φ est le seul rigoureux dans un cas général.

Finalement,

$$\vec{F}_{f\to b} = \int_{\alpha}^{\pi/2}\int_{0}^{2\pi} \overrightarrow{dF}_{f\to p}(C)$$

$$+\int_0^{\alpha}\left[\int_0^{\pi/2-\varphi_a}\overrightarrow{dF}_{f\to b}(C) + \int_{\pi/2+\varphi_a}^{2\pi}\overrightarrow{dF}_{f\to b}(C)\right]$$

$$\vec{F}_{f\to b} = \pi\, p_{max}\, R^2 .\cos^2\alpha .\vec{z}$$

$$\boxed{+\int_0^{\alpha} p_{max}\, R^2\left[\left[\frac{\pi}{2}-\varphi_a\right]+\left[2\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_a\right)\right]\right] \sin\theta .\cos\theta .d\theta .\vec{z}}$$

$$\vec{F}_{f\to b} = \pi . p_{max} . R^2 . \cos^2\alpha . \vec{z}$$

$$+ p_{max} . R^2 . \int_0^{\alpha} (2\pi - 2\varphi_a)\cos\theta .\sin\theta .d\theta .\vec{z}$$

OR $\varphi_a = \text{Arccos}\left(\dfrac{\tan\theta}{\tan\alpha}\right)$

$$= \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\left(\frac{\tan\theta}{\tan\alpha}\right)$$

Alors,

$$\vec{F}_{f\to b} = p_{max} . R^2 \vec{z}\left[\pi . \cos^2\alpha + \int_0^{\alpha}\left(\pi + \text{Arcsin}\left(\frac{\tan\theta}{\tan\alpha}\right)\right)\cos\theta \sin\theta\, d\theta\right]$$

$\boxed{Q\,8.4}$ Pour $\alpha = 60°$,

on a

$$\overrightarrow{F_{f\to b}} = 2{,}36 . p_{max} . R^2 . \vec{z}$$

$\boxed{Q\,8.5}$ Pour une personne de poids $P = 75\ daN \Rightarrow F_d = 5.P$

$$\Rightarrow p_{max} = \frac{5.P}{2{,}36 . R^2} = 25\ \text{bar}$$