



# C14 – Frottement (Lois de Coulomb) et Arc-boutement

1. CINÉMATIQUE DU CONTACT PONCTUEL.....	1
2. LOIS DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT (LOIS DE COULOMB).....	2
3. GÉNÉRALISATION : UTILISATION DES LOIS DE COULOMB DANS LE CAS DE CONTACTS SURFACIQUES.....	4
4. ARC-BOUEMENT.....	5
5. AUTRES SYSTEMES FONCTIONNANT SUR L'ARC-BOUEMENT.....	8

Le modèle liaison parfaite est une modélisation simplifiée des actions mécaniques de contact entre solides. Cette modélisation est souvent suffisante pour les problèmes de statique mais il ne tient pas compte du frottement qui a un rôle primordial pour assurer les fonctions attendues par un système technologique.

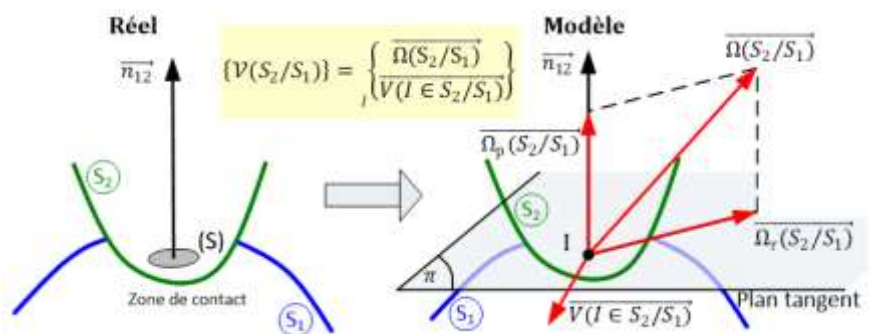


Ce cours présente le modèle et les lois de Coulomb qui, dans bon nombre de cas, sont suffisantes pour étudier le frottement entre deux solides en contact.

## 1. CINÉMATIQUE DU CONTACT PONCTUEL

On considère un solide  $S_2$  en mouvement relatif et en contact par rapport à un solide  $S_1$ .

**Il faut définir au point de contact  $I$ , un plan tangent au contact ( $\pi$ ) et une normale au contact  $\vec{n}_{12}$  et entre les deux solides ( $S_1$  est en dessous de ( $\pi$ ),  $S_2$  est au-dessus de ( $\pi$ )). Au cours du mouvement relatif de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ , on suppose qu'il existe toujours un point de contact (non rupture du contact).**



Le mouvement relatif de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  peut être caractérisé cinématiquement par le torseur  $\{V(S_2/S_1)\}$  exprimé au point  $I$  :

$$\{V(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega(S_2/S_1)} = \overline{\Omega_p(S_2/S_1)} + \overline{\Omega_r(S_2/S_1)} \\ \overline{V(I, S_2/S_1)} \end{array} \right\}$$

On appelle le vecteur vitesse de glissement en  $I$  de  $S_2/S_1$ , le vecteur vitesse  $\overline{V(I, S_2/S_1)}$  (qui est nécessairement contenu dans le plan ( $\pi$ )) et on considère que le vecteur  $\overline{\Omega(S_2/S_1)}$  peut se décomposer en la somme de deux vecteurs :

- $\overline{\Omega_p(S_2/S_1)}$  vecteur vitesse de rotation de pivotement de  $S_2/S_1$  normal au plan ( $\pi$ ),
- $\overline{\Omega_r(S_2/S_1)}$  vecteur vitesse de rotation de roulement de  $S_2/S_1$  contenu dans le plan ( $\pi$ ).

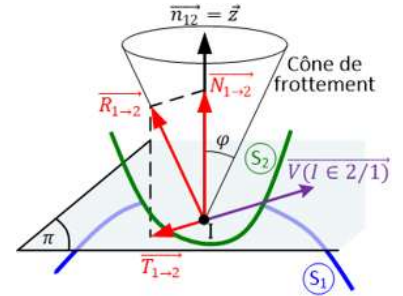
On a vu que les actions mécaniques de frottements s'opposent aux mouvements  $S_2/S_1$  (Cours C13 page 8).

## 2. LOIS DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT (LOIS DE COULOMB)

### 2.1. Lois de Coulomb associées avec les composantes de force

Si le frottement n'est pas négligeable, il existe une composante tangentielle d'action mécanique.

(2)/(1) : Liaison ponctuelle en  $I$  de normale  $(I ; \vec{n}_{12})$  avec frottement entre les solide  $S_2$  et  $S_1$  :



Les lois (expérimentales) de Coulomb permettent de relier les composantes de  $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$  à la composante normale  $Z_{12}$ . Il existe deux cas de figure, que l'on nomme usuellement 1<sup>ère</sup> loi et 2<sup>ème</sup> loi de Coulomb :



#### Première loi de Coulomb : Glissement en I $\overline{V(I \in S_2/S_1)} \neq \vec{0}$

On définit un coefficient de frottement  $f$  tel que  $f = \tan \varphi$  où  $\varphi$  est le demi angle au sommet du cône de frottement.

- La composante tangentielle  $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$  est opposée à la vitesse de glissement  $\overline{V(I \in S_2/S_1)}$ , soit :  $\overline{V(I \in S_2/S_1)} \wedge \vec{T}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}$  et  $\overline{V(I \in S_2/S_1)} \cdot \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \leq 0$
- $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$  est toujours sur le cône de frottement,
- On connaît exactement  $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| : \|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| = f \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$ .

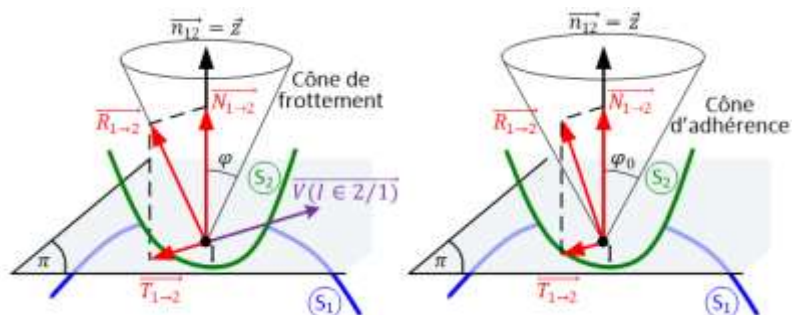
#### Seconde loi de Coulomb : Non glissement en I $\overline{V(I \in S_2/S_1)} = \vec{0}$

On définit un coefficient d'adhérence  $f_0$  tel que  $f_0 = \tan \varphi_0$  où  $\varphi_0$  est le demi-angle au sommet du cône d'adhérence.

- $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$  est toujours dans le cône d'adhérence,
- On ne connaît pas exactement  $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\|$ . Mais on sait que :  $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq f_0 \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$ .

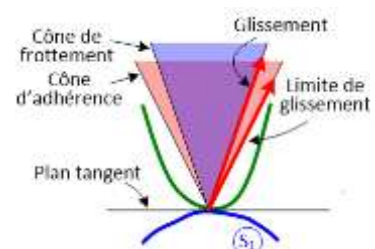
Modèles correspondants aux lois de Coulomb

(à gauche : 1<sup>ère</sup> loi ; à droite : 2<sup>ème</sup> loi)



**Attention aux indices pour la 1<sup>ère</sup> loi de Coulomb :** La composante tangentielle  $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$  (1→2) est opposée à la vitesse de glissement  $\overline{V(I, S_2/S_1)}$  (2/1).

Le coefficient de frottement  $f$  est en général inférieur au coefficient d'adhérence  $f_0$ ,  $f_0 > f$  mais dans la pratique, les 2 coefficients ayant des valeurs proches, on confond  $f$  et  $f_0$  et on utilise uniquement le coefficient de frottement  $f$ .



Pour étudier l'équilibre d'un solide lorsque celui-ci adhère (non glissement en I), on peut se placer à la **limite du glissement**. Il n'y a donc pas encore de mouvement relatif mais on peut appliquer la première loi de Coulomb  $\Rightarrow \vec{R}_{1 \rightarrow 2}$  **est sur le cône de frottement**.

Expérimentalement, on constate que le coefficient de frottement  $f$  dépend de la nature des surfaces de contact (matériaux en contact, état de la surface de contact, présence ou non de lubrifiant, ...).

Matériaux en contact	Coefficient de frottement
Acier sur acier	De 0,1 à 0,2
Acier sur bronze	De 0,12 à 0,2
Acier sur PTFE	De 0,02 à 0,08
Acier sur garniture de friction	De 0,25 à 0,4
Pneu neuf sur chaussée	De 0,3 à 0,8

Exemples de valeurs de coefficients de frottement



**Le coefficient de frottement  $f$  est un coefficient adimensionnel qui ne dépend pas de l'effort normal appliqué**

## 2.2. Lois de Coulomb associées au roulement et pivotement

Si le roulement n'est pas négligeable, il existe deux composantes de moment dans le plan tangent.

(2)/(1) : Liaison ponctuelle en I de normale (I ;  $\vec{z}$ ) avec frottement et roulement entre les solide  $S_2$  et  $S_1$  :

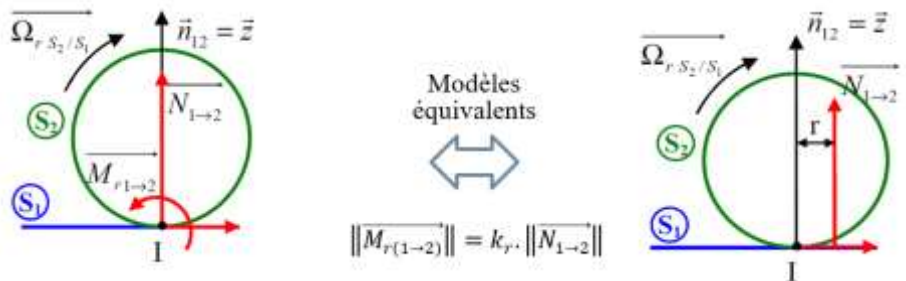
**Roulement en I** :  $\overrightarrow{\Omega_r(S_2/S_1)} \neq \vec{0}$

On définit un coefficient de résistance au roulement  $k_r$  :

- *Moment de résistance au roulement*  $\|\overrightarrow{M_{r(1 \rightarrow 2)}}\| = k_r \cdot \|\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}\|$
- $\overrightarrow{M_{r(1 \rightarrow 2)}}$  s'oppose à  $\overrightarrow{\Omega_r(S_2/S_1)}$

Ainsi deux modélisations équivalentes peuvent être adoptées :

Modèles associés à la résistance au roulement

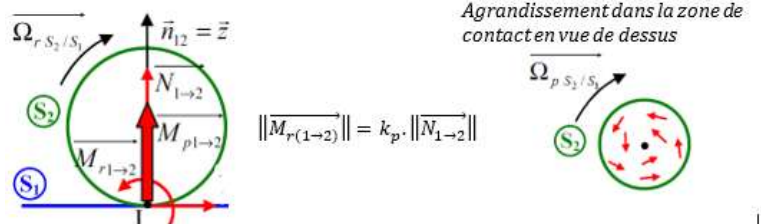


Le frottement de roulement est dû à la déformation des surfaces en contact. Expérimentalement, on constate que le coefficient de résistance au roulement  $r$  **dépend de la nature de surfaces de contact** (matériaux en contact, état de la surface de contact, présence ou non de lubrifiant,...).

**Pivotement en I** :  $\overrightarrow{\Omega_p(S_2/S_1)} \neq \vec{0}$

On définit un coefficient de résistance au pivotement  $k_p$  :

Modèle associé à la résistance au pivotement



- *Moment de résistance au pivotement*  $\|\overrightarrow{M_{p(1 \rightarrow 2)}}\| = k_p \cdot \|\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}\|$
- $\overrightarrow{M_{p(1 \rightarrow 2)}}$  s'oppose à  $\overrightarrow{\Omega_p(S_2/S_1)}$



Le frottement de pivotement est dû à la déformation des surfaces en contact. Expérimentalement, on constate que le coefficient de résistance au pivotement  $p$  **dépend de la nature de surfaces de contact** (matériaux en contact, état de la surface de contact, présence ou non de lubrifiant,...).



**Les coefficients de résistance au roulement  $k_r$  et au pivotement  $k_p$  sont homogènes à une longueur !**

### 2.3. Ecriture du torseur d'actions mécaniques : SYNTHÈSE

Pour un contact ponctuel en  $I$  de normale  $\vec{z}$  :

$$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{1 \rightarrow 2}(I) = \vec{M}_{r(1 \rightarrow 2)}(I) + \vec{M}_{p(1 \rightarrow 2)}(I) \end{array} \right\}$$

$\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$  est selon  $\vec{z}$   
 $\vec{M}_{p(1 \rightarrow 2)}(I)$  est selon  $\vec{z}$

$$\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq f \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\| \quad \text{opposé à } \vec{V}(I \in S_2/S_1)$$

$$\|\vec{M}_{r(1 \rightarrow 2)}\| \leq k_r \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\| \quad \text{opposé à } \vec{\Omega}_r(S_2/S_1)$$

$$\|\vec{M}_{p(1 \rightarrow 2)}\| \leq k_p \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\| \quad \text{opposé à } \vec{\Omega}_p(S_2/S_1)$$

(égalité si glissement ou limite du glissement)  
Cette hypothèse est classiquement posée

## 3. GÉNÉRALISATION : UTILISATION DES LOIS DE COULOMB DANS LE CAS DE CONTACTS SURFACIQUES

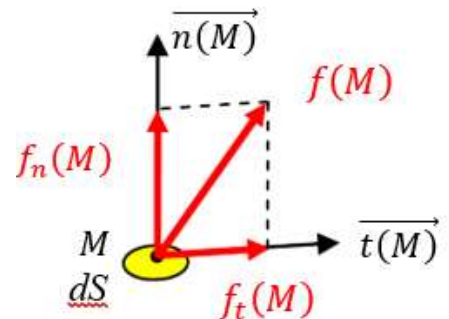
Les lois de Coulomb concernant le frottement de glissement pour un contact ponctuel peuvent être appliquées sur une surface entière. Pour déterminer les actions mécaniques de contact dans ce cas de figure, on considère alors de petites zones  $dS$  « quasi ponctuelles » autour de chaque point  $M$  de la zone de contact et on écrit les lois de Coulomb sur des densités surfaciques d'effort.

### 3.1. Définition du modèle local avec frottement

On définit l'action mécanique élémentaire de l'élément de surface  $dS$  :

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{f}(M) dS \quad \text{avec } \vec{f}(M) = f_n(M) \vec{n}(M) + f_t(M) \vec{t}(M), \text{ où :}$$

- $f_n(M)$  : densité surfacique normale d'effort en  $M$  ( $f_n(M) = -p(M)$  dans le cas de pression de contact sur une surface)
- $\vec{n}(M)$  : vecteur unitaire normal au plan tangent de la surface
- $f_t(M)$  : densité surfacique tangentielle d'effort en  $M$
- $\vec{t}(M)$  : vecteur unitaire d'une direction du plan tangent de la surface



On applique ensuite les lois de Coulomb sur l'action mécanique élémentaire et on considère que l'on a une infinité d'actions mécaniques élémentaires sur la surface étudiée. La répartition de ces actions mécaniques élémentaires permet d'obtenir un champ vectoriel qui correspond à la modélisation locale des actions mécaniques.



Les lois de Coulomb pour le modèle local sont les mêmes que celles présentées pour le contact ponctuel mais elles portent cette fois-ci sur les densités d'effort.

### 3.2. Définition du modèle global avec frottement

On note  $\{1 \rightarrow 2\}$  l'action mécanique du solide 1 sur le solide 2 sur une surface  $S$ . Le modèle global est obtenu à partir du modèle local :

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \\ \overrightarrow{M_A(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} = \int d\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_A(1 \rightarrow 2)} = \int \overrightarrow{AM} \wedge d\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \end{array} \right\}$$

## 4. ARC-BOUTEMENT

### 4.1. Observation du phénomène

- On place une masse  $m$  au bout du portique (Figure 1) : on constate l'équilibre alors que la liaison **pivot** entre le mât et le bras permettrait, à priori, le déplacement.
- On déplace la masse vers la gauche et on constate une rupture d'équilibre à partir d'une certaine distance  $\lambda = \lambda_{lim}$ .
- Remarques : Quelle que soit la masse, la longueur limite est toujours la même, par contre si on graisse le mât,  $\lambda_{lim}$  augmente.

On constate donc expérimentalement que le blocage semble dépendre du coefficient d'adhérence, mais pas de l'effort exercé.

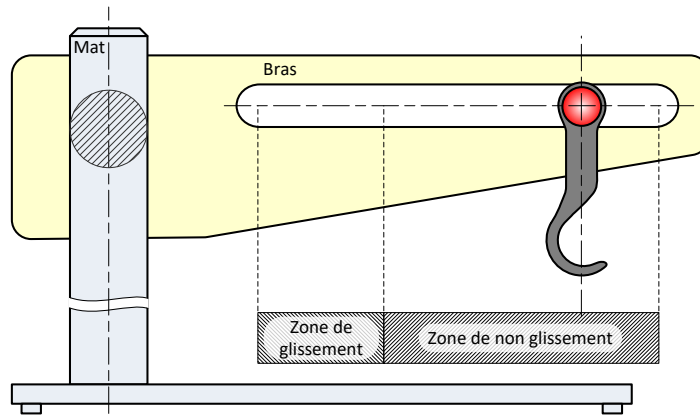


Figure 1 : Appareil d'étude expérimental.

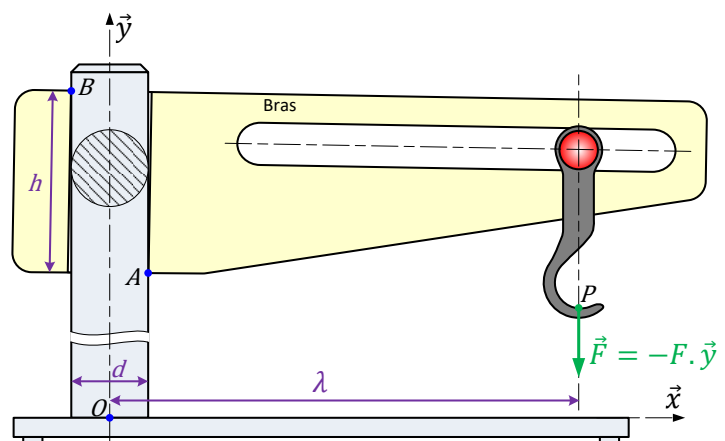
### 4.2. Définition de l'arc-boutement



Une liaison entre deux solides est dite obtenue par arc-boutement si, **quelle que soit l'intensité d'un effort** cherchant à rompre l'équilibre, le mouvement est impossible alors que la liaison le permettrait s'il n'y avait pas de frottement.

### 4.3. Etude analytique

**Hypothèses :** Il y a du jeu (même quasi-nul) et des frottements dans la liaison (coefficient de frottement  $f$ ). Dans une représentation plane du système, la liaison se ramène donc à deux contacts ponctuels. On isole de bras  $b$  et le crochet.



**Bilan des Actions Mécaniques**

$$\{\mathcal{J}_A(m \rightarrow b)\} = \begin{Bmatrix} X_A \cdot \vec{x} + Y_A \cdot \vec{y} + Z_A \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{avec } \vec{N}_A = X_A \cdot \vec{x} \quad \text{et } \vec{T}_A = Y_A \cdot \vec{y} + Z_A \cdot \vec{z}$$

$$\{\mathcal{J}_B(m \rightarrow b)\} = \begin{Bmatrix} X_B \cdot \vec{x} + Y_B \cdot \vec{y} + Z_B \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{avec } \vec{N}_B = X_B \cdot \vec{x} \quad \text{et } \vec{T}_B = Y_B \cdot \vec{y} + Z_B \cdot \vec{z}$$

$$\{\mathcal{J}(charge \rightarrow crochet)\} = \begin{Bmatrix} -F \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

**Lois de Coulomb en A, à la limite du glissement**

S'il y a glissement (ou limite de glissement) entre le bras  $b$  et le mat  $m$ , alors :  $\overrightarrow{V(A \in b/m)} \neq 0$  et  $\overrightarrow{V(A \in b/m)}$  est portée par  $-\vec{y}$  :

$$\begin{aligned} \vec{T}_A \wedge \overrightarrow{V(A \in b/m)} &= \vec{0} && \text{Les vecteurs sont colinéaires donc : } Z_A = \\ \vec{T}_A \cdot \overrightarrow{V(A \in b/m)} &\leq 0 && \text{Les vecteurs sont de sens opposés donc : } Y_A \\ \|\vec{T}_A\| &= f \|\vec{N}_A\| && \text{donc } Y_A = \quad \text{car } X_A \end{aligned}$$

**Lois de Coulomb en B, à la limite du glissement**

S'il y a glissement (ou limite de glissement) entre le bras  $b$  et le mat  $m$ , alors :  $\overrightarrow{V(B \in b/m)} \neq 0$  et est portée par  $-\vec{y}$  :

$$\begin{aligned} \vec{T}_B \wedge \overrightarrow{V(B \in b/m)} &= \vec{0} && \text{Les vecteurs sont colinéaires donc : } Z_B = \\ \vec{T}_B \cdot \overrightarrow{V(B \in b/m)} &\leq 0 && \text{Les vecteurs sont de sens opposés donc : } Y_B \\ \|\vec{T}_B\| &= f \|\vec{N}_B\| && \Rightarrow Y_B = \quad \text{car } X_B \end{aligned}$$

**Ecriture en B :**

$$\overrightarrow{M_A(B, m \rightarrow b)} =$$

$$\overrightarrow{M(B, charge \rightarrow crochet)} = \overrightarrow{BP_A} \overrightarrow{F}(charge \rightarrow crochet) = \left(\lambda + \frac{d}{2}\right) \cdot \vec{x} \wedge (-F \cdot \vec{y}) = -\left(\lambda + \frac{d}{2}\right) F \cdot \vec{z}$$

$$\{\mathcal{J}_A(m \rightarrow b)\} = \begin{Bmatrix} \quad \quad \quad \end{Bmatrix} \quad \{\mathcal{J}_B(m \rightarrow b)\} = \begin{Bmatrix} \quad \quad \quad \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{J}(charge \rightarrow crochet)\} = \begin{Bmatrix} \quad \quad \quad \end{Bmatrix}$$

**Principe Fondamental de la statique appliqué au bras :** à l'équilibre (ici à la limite du glissement donc  $\lambda = \lambda_{lim}$ ) :

$$\{\mathcal{J}_A(m \rightarrow b)\} + \{\mathcal{J}_B(m \rightarrow b)\} + \{\mathcal{J}(charge \rightarrow crochet)\} = \{0\}$$

- Théorème de la résultante statique :

$$0 =$$

$$0 =$$

- Théorème de moment statique écrit au point  $B$  :

$$0 =$$

Résolution (inconnues :  $X_A, X_B, \lambda_{\text{lim}}$ ) :

$$X_A = \quad X_B = \quad \boxed{\lambda_{\text{lim}} =}$$

L'équilibre ne dépend pas de l'effort  $F$ . On se situe bien dans une situation d'arc-boutement pour  $\lambda \geq \lambda_{\text{lim}}$ . C'est-à-dire qu'il n'y aura pas de glissement possible car les actions en A et B seront à l'intérieur du cône de frottement (ou d'adhérence).

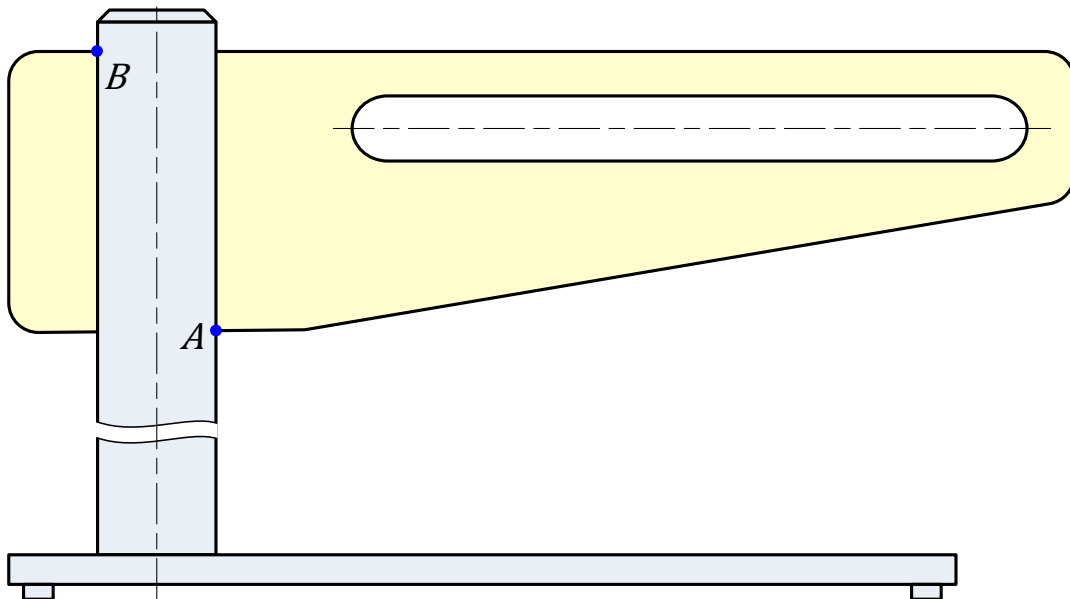
#### 4.4. Raisonnement graphique

On isole le bras  $b$  et on cherche à placer la charge (i.e. trouver  $\lambda_{\text{lim}}$ ) pour être à la limite du glissement. Le bras est soumis à 3 glisseurs en A, B et P. Dans l'exemple ci-dessous, on prendra  $f_0 \approx f = 0,33$  et  $\|\vec{F}\| = 40N$  et  $d = 20 \text{ mm}$ . Le but est de trouver la longueur limite  $\lambda_{\text{lim}}$  et les normes  $\|\vec{R}_A\|$  et  $\|\vec{R}_B\|$ .

A la limite du glissement, il y a équilibre, les actions mécaniques en A et B sont sur le bord des cônes.

Pour résoudre graphique un problème soumis à trois glisseurs (théorème) :

- Le théorème du moment implique que les 3 droites d'action des résultantes sont concourantes.
- La somme des forces étant nulle, on construit le triangle des forces pour déterminer la norme des forces non connues.

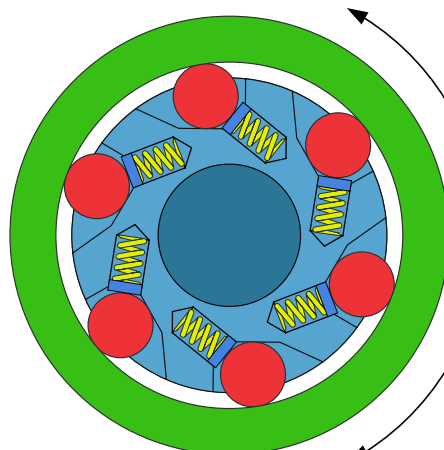


Ainsi,  $\lambda_{\text{lim}} =$   $\|\vec{R}_A\| =$   $\|\vec{R}_B\| =$

## 5. AUTRES SYSTEMES FONCTIONNANT SUR L'ARC-BOUTEMENT

### 5.1. Roue libre

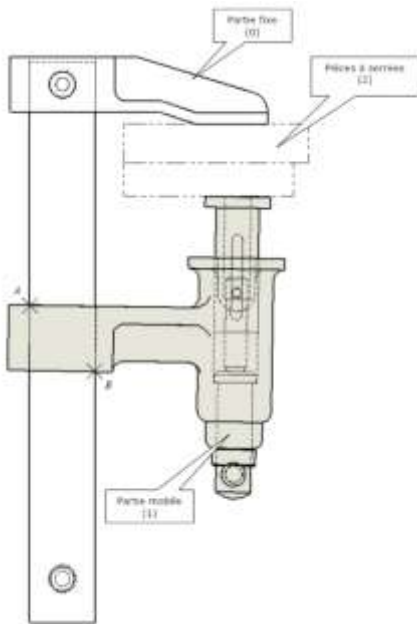
Permet la rotation dans un sens mais pas l'autre. Couramment utilisé dans les moyeux arrière de bicyclette. Ici solution avec rouleaux ou billes (existe aussi à cliquets)



Blocage tambour/arbre  
Roue libre arbre/tambour

Roue libre tambour/arbre  
Blocage arbre/tambour

### 5.2. Serre joint



### 3.3. Coinceur à came

