

# TD 14 – Frottement (Lois de Coulomb)

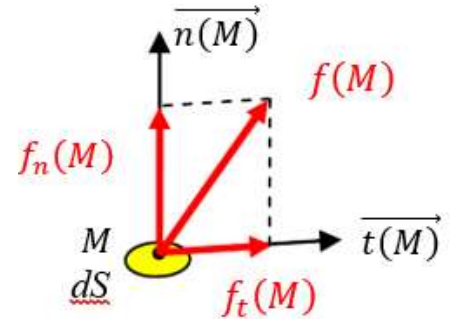
## 1. FREIN D'AIRBUS

### 1.1. Définition du modèle local avec frottement (Rappel voir C14)

On définit l'action mécanique élémentaire de l'élément de surface :

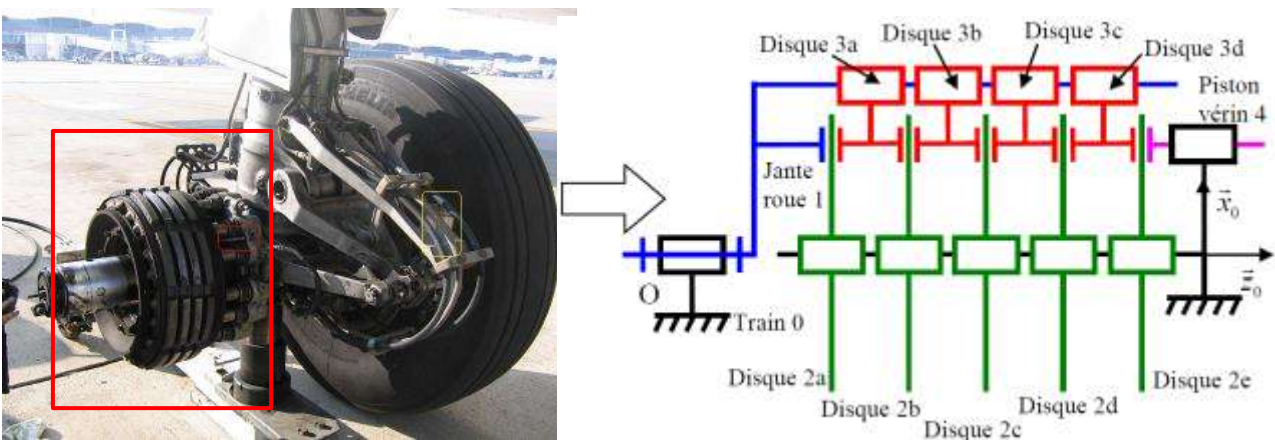
$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{f}(M) dS \text{ avec } \vec{f}(M) = f_n(M) \vec{n}(M) + f_t(M) \vec{t}(M), \text{ où :}$$

- $f_n(M)$  : densité surfacique normale d'effort en  $M$  ( $f_n(M) = -p(M)$  dans le cas de pression de contact sur une surface)
- $\vec{n}(M)$  : vecteur unitaire normal au plan tangent de la surface
- $f_t(M)$  : densité surfacique tangentielle d'effort en  $M$
- $\vec{t}(M)$  : vecteur unitaire d'une direction du plan tangent de la surface

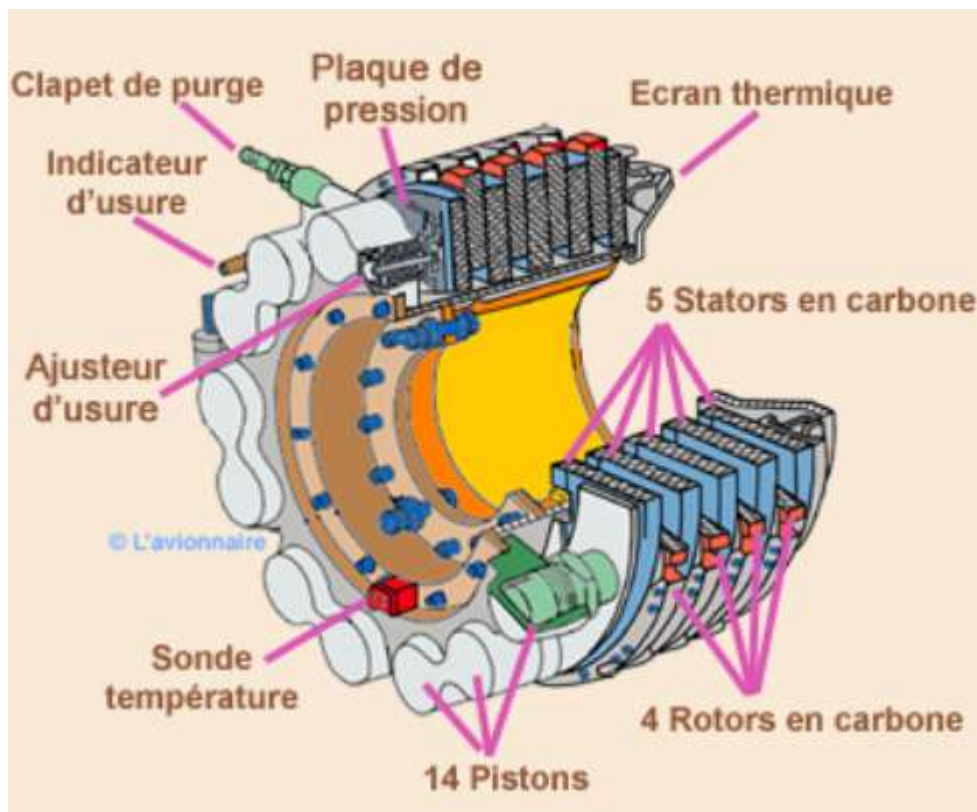


On applique ensuite les lois de Coulomb sur l'action mécanique élémentaire et on considère que l'on a une infinité d'actions mécaniques élémentaires sur la surface étudiée. La répartition de ces actions mécaniques élémentaires permet d'obtenir un champ vectoriel qui correspond à la modélisation locale des actions mécaniques.

### 1.2. Exemple du bloc de freinage de l'A320



Bloc de freinage de l'A320 ouvert (à gauche) et modèle associé (à droite)



Exemple d'alternance des disques avec leurs zones de frottements (ce n'est pas un frein d'Airbus).

Le Bloc de freinage est doté de 9 disques en carbone, 5 en liaison glissière d'axe  $\vec{z}_0$  par rapport au train repéré 0 (disques 2) et 4 en liaison glissière de direction  $\vec{z}_0$  par rapport à la jante de la roue repéré 1 (disques 3).

Pour mettre en contact ces disques et par conséquent freiner la jante de la roue 1, un dispositif hydraulique constitué de 14 vérins équi-répartis, dont le vérin 4, permet d'exercer une action mécanique sur le disque 2e définie par le torseur suivant :

$$\{\mathcal{T}(\text{vérins} \rightarrow 2e)\} = \left\{ \begin{array}{c} R(\text{vérins} \rightarrow 2e) = -F_0 \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_0$$

Cette action mécanique est intégralement transmise au disque 3d (et de proche en proche à tous les autres disques) et elle génère grâce au frottement un moment permettant d'immobiliser petit à petit le disque 3d par rapport au disque 2e. Par conséquent on a :

$$\{\mathcal{J}(2e \rightarrow 3d)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{R(2e \rightarrow 3d)} = -F_0 \overline{z_0} \\ \overline{M_o(2e \rightarrow 3d)} = -M_0 \overline{z_0} \end{array} \right\}_o \quad \text{où } F_0 = 10^6 \text{ N}$$

**Objectif d'étude :** Déterminer la relation entre l'effort presseur  $F_0$  exercé par le dispositif hydraulique sur le disque 2e et le moment de freinage global  $M_{global}$  exercé par le bloc de freinage sur la jante de la roue.

Compte tenu de la géométrie de la surface de contact (S) entre 2e et 3d on utilise les coordonnées polaires pour paramétrer cette surface (voir ci-contre)

Données :  $R_2 = 300 \text{ mm}$  ;  $R_1 = 200 \text{ mm}$  ;  $f = 0,5$

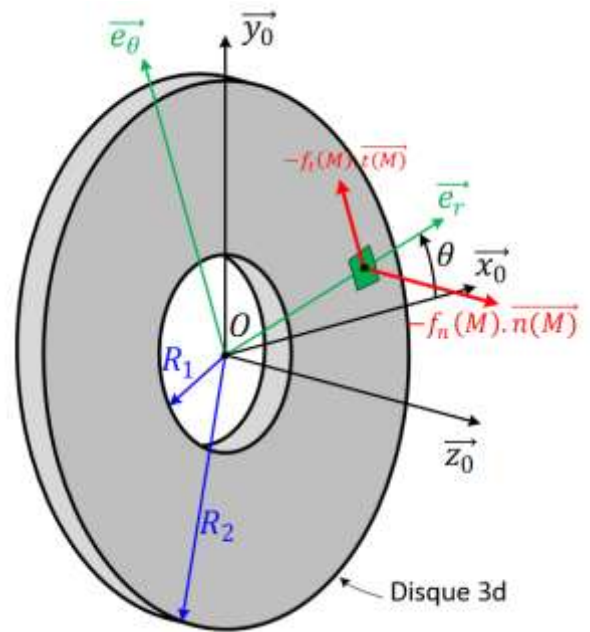
**Définition de l'AM élémentaire et du modèle local :**

$$\{\mathcal{J}(2e \rightarrow 3d)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{R(2e \rightarrow 3d)} = \int d\overline{F_{2e \rightarrow 3d}} \\ \overline{M_o(2e \rightarrow 3d)} = \int \overline{OM} \wedge d\overline{F_{2e \rightarrow 3d}} \end{array} \right\}_o$$

avec  $d\overline{F_{2e \rightarrow 3d}} = (f_n(M) \cdot \overline{n(M)} + f_t(M) \cdot \overline{t(M)}) dS$

**Hypothèses :**

- On suppose que la pression de contact de 2e sur 3d est uniforme soit :  $f_n(M) = -p(M) = -p_0$
- Le vecteur normal au plan tangent commun à 2e et 3d sortant de la matière de 3d est  $\overline{z_0}$  soit :  $\overline{n(M)} = \overline{z_0}$
- Il y a du glissement en M entre 3d et 2e et puisque l'on calcule les efforts de 2e sur 3d, on a donc  $\overline{t(M)} = \frac{-\overline{V(M \in 3d/2e)}}{\|\overline{V(M \in 3d/2e)}\|}$  avec  $\overline{V(M \in 3d/2e)} = \overline{V(M \in 1/0)}$  si 3d est solidaire de la jante 1 et 2e du train 0.



$$\overline{V(M \in 3d/2e)} = \overline{V(M \in 1/0)} = \overline{V(O \in 1/0)} + \overline{MO} \wedge \overline{\Omega(1/0)} = -r \cdot \overline{e_r} \wedge \dot{\theta}_{10} \cdot \overline{z_0} = r \dot{\theta}_{10} \cdot \overline{e_\theta}$$

Soit  $\overline{t(M)} = -\overline{e_\theta}$  si  $\dot{\theta}_{10} > 0$

L'existence du glissement induit que  $f_t(M)$  est sur le cône de frottement, soit  $f_t(M) = |f \cdot f_n(M)|$ .

Le signe de  $f_t(M) \cdot \overline{t(M)}$  est donné par  $\overline{t(M)} = -\overline{e_\theta}$  (si  $\dot{\theta}_{10} > 0$ ).

Au final l'action mécanique élémentaire s'écrit :  $d\overline{F_{2e \rightarrow 3d}} = (-p_0 \cdot \overline{z_0} - f \cdot p_0 \cdot \overline{e_\theta}) \cdot dS$

**Résultat à retenir :**

$$\overline{M_o(2e \rightarrow 3d)} = M_0 \cdot \overline{z_0} \quad \text{avec :} \quad M_0 = \frac{2}{3} \cdot f \cdot F_0 \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}$$

**Q1.** Déterminer  $\{\mathcal{J}(2e \rightarrow 3d)\}$  en O. Préciser les expressions de  $F_0$  et  $M_0$ .

On a  $dS = r \cdot d\theta \cdot dr$  (car le domaine est cylindrique) et ses bornes d'intégrations ;  $\overline{OM} = r \cdot \overline{e_r(\theta)}$  et  $\overline{\Omega_f(M)} = (-p_0 \cdot \overline{z_0} - f \cdot p_0 \cdot \overline{e_\theta})$

Pour la résultante,

$$\overrightarrow{R}(2e \rightarrow 3d) = \int d\overrightarrow{F}_{2e \rightarrow 3d} = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} (-p_0 \cdot \overrightarrow{z}_0 - f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{e}_\theta) \cdot r \cdot d\theta \cdot dr = -p_0 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \cdot \overrightarrow{z}_0 = -F_0 \cdot \overrightarrow{z}_0$$

Pour le moment (pour une surface frottante),

$$\overrightarrow{M}_O(2e \rightarrow 3d) = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} r \cdot \overrightarrow{e}_r \wedge (-p_0 \cdot \overrightarrow{z}_0 - f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{e}_\theta) \cdot r \cdot d\theta \cdot dr = -p_0 \cdot f \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \cdot \overrightarrow{z}_0$$

$$(\text{=} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} (-p_0 \cdot r \cdot \overrightarrow{e}_\theta - f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{z}_0) \cdot r^2 \cdot d\theta \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} (-f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{z}_0) \cdot r^2 \cdot d\theta \cdot dr)$$

**Q2.** Donner l'expression du moment de freinage global  $M_{global}$  exercé par le bloc de freinage sur la jante. Faire l'application numérique.

Il faut compter le nombre  $n$  de surfaces de frottement de ce frein multidisques :  $M_{global} = n \cdot M_0$

On a  $n = 9$  surfaces de frottements.

## 2. CONTACTS PONTUELS AVEC FROTTEMENT

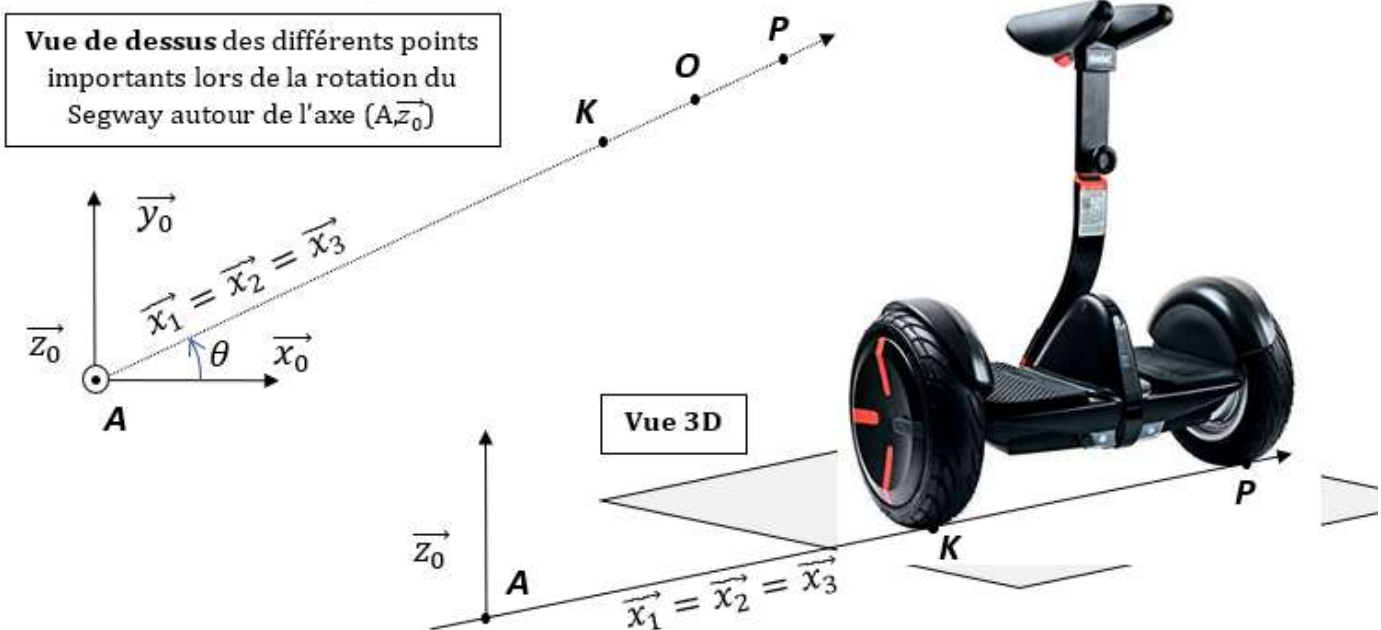
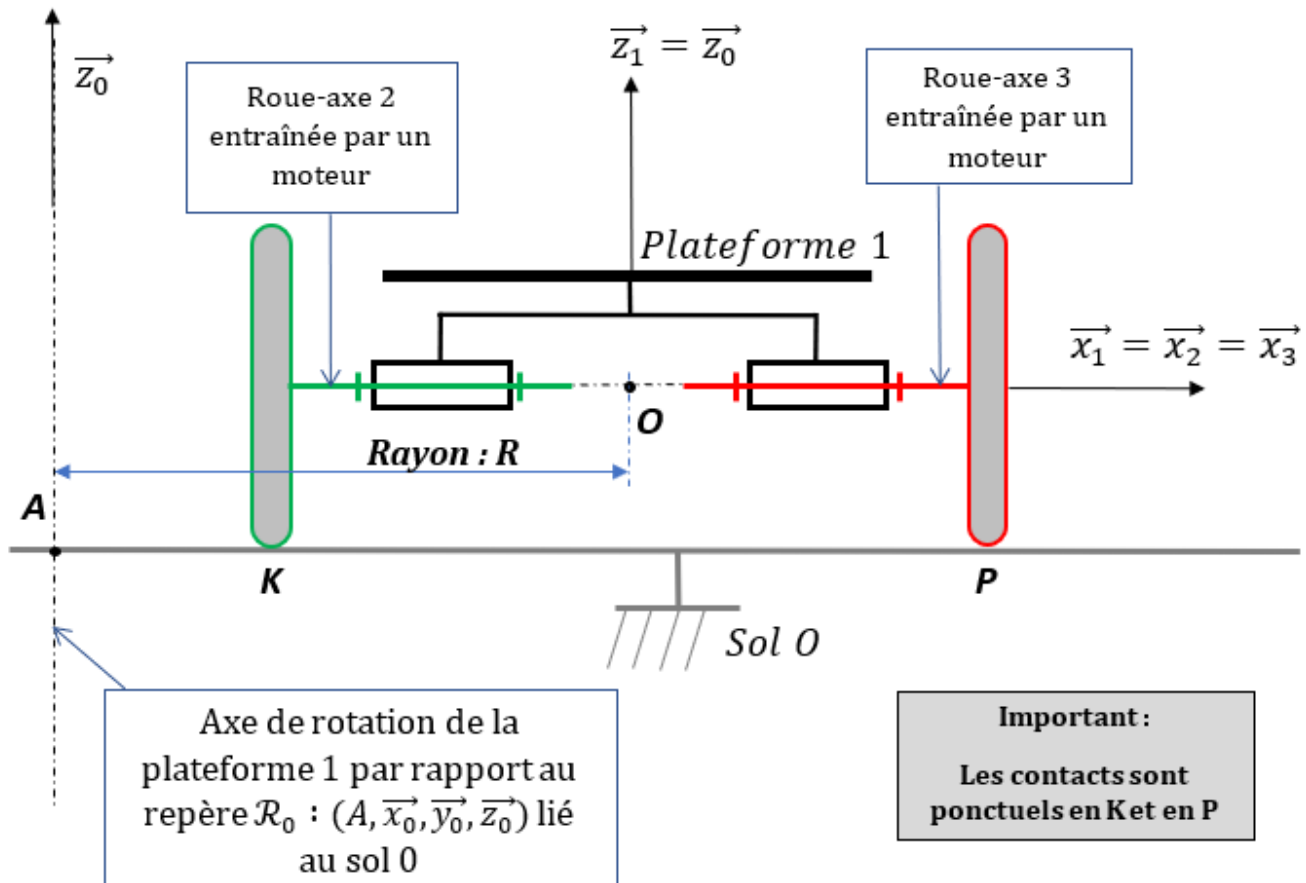


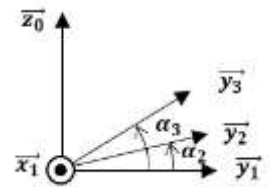
Schéma cinématique (Vue de côté) du Segway  
 (les distances entre les points ne sont pas respectées)



Rayon des roues :  $r$

On donne les torseurs cinématiques :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\}_P: \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_3 & 0 \\ 0 & V_{y30} \\ \dot{\theta} & 0 \end{Bmatrix}_{R_1} ; \{\mathcal{V}(2/0)\}_K: \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_2 & 0 \\ 0 & V_{y20} \\ \dot{\theta} & 0 \end{Bmatrix}_{R_1}$$



Hypothèses :

En  $P$  et  $K$ , les roues sont à la limite du glissement par rapport au sol.

Les deux roues sont motrices.

Le Segway vire à gauche.

**Q1.** Préciser les valeurs de  $V_{y30}$  et  $V_{y20}$ .

*On est à la limite du glissement en  $P$  et  $K$  donc,  $V_{y30} = V_{y20} = 0$ , on ne peut à priori pas connaître la direction des efforts tangentiels puisqu'ils s'opposent à  $\overrightarrow{V}(P \in 3/0)$  et  $\overrightarrow{V}(K \in 2/0)$ .*

*Dans ces conditions (en limite du glissement) cependant, on sait que les efforts tangentiels seront portés par le vecteur  $+\overrightarrow{y}_1$  car les vitesses de glissement en  $P$  et  $K$  seraient portées par  $-\overrightarrow{y}_1$  comme nous l'indiquent les torseurs cinématiques et le fait que les deux roues soient motrices.*

Q2. Ecrire les torseurs d'actions mécaniques  $\{T(0 \rightarrow 3)\}$  et  $\{T(0 \rightarrow 2)\}$ . Préciser vos hypothèses.

$$\{T_{(0 \rightarrow 3)}\}_P: \begin{Bmatrix} 0 & C_{r03} \\ T_{03} & 0 \\ N_{03} & C_{p03} \end{Bmatrix}_{R_1} \quad \text{et} \quad \{T_{(0 \rightarrow 2)}\}_K: \begin{Bmatrix} 0 & C_{r02} \\ T_{02} & 0 \\ N_{02} & C_{p02} \end{Bmatrix}_{R_1}$$

$N_{03} \geq 0$ ,  $T_{03} = +f \cdot N_{03}$  car les vitesses de glissement en P et K seraient portées par  $-\vec{y}_1$

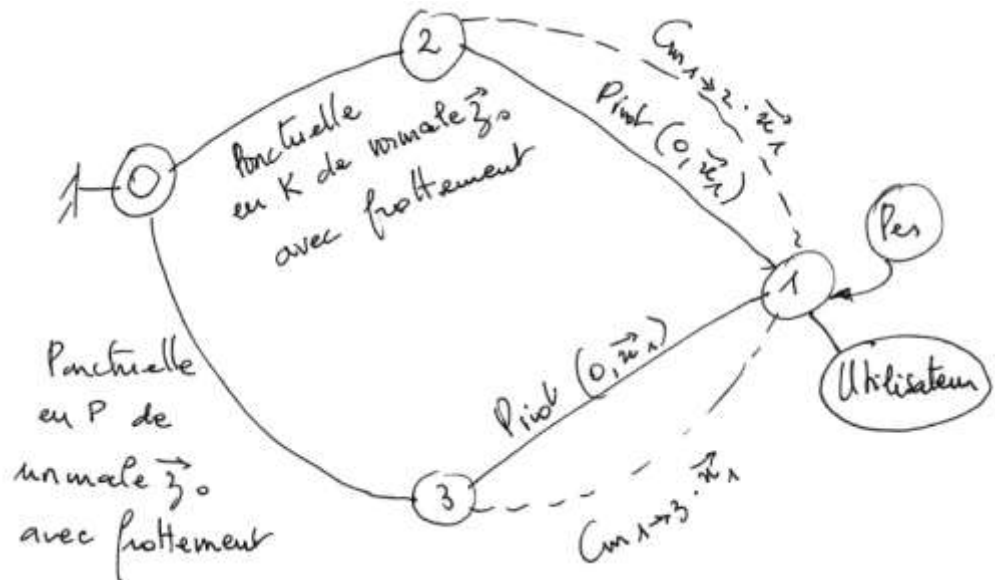
$C_{p03} = -k_p \cdot N_{03}$  (couple de résistance au pivotement) : - car  $\dot{\theta} \geq 0$

$C_{r03} = +k_r \cdot N_{03}$  (couple de résistance au roulement) : + car  $\dot{\alpha}_3 \leq 0$

Même raisonnement pour  $\{T_{(0 \rightarrow 2)}\}$

$$\{T_{(0 \rightarrow 3)}\}_P: \begin{Bmatrix} 0 & +k_r \cdot N_{03} \\ +f \cdot N_{03} & 0 \\ N_{03} & -k_p \cdot N_{03} \end{Bmatrix}_{R_1} \quad \text{et} \quad \{T_{(0 \rightarrow 2)}\}_K: \begin{Bmatrix} 0 & +k_r \cdot N_{02} \\ +f \cdot N_{02} & 0 \\ N_{02} & -k_p \cdot N_{02} \end{Bmatrix}_{R_1}$$

Grphe de structure



Q3. Déterminer l'expression du couple moteur  $C_{m1 \rightarrow 2}$ .

Que faut-il isoler ? Quelle équation est-il suffisant d'écrire ?

On isole 2 et on écrit le TMS en O selon  $\vec{x}_1$ .

BAMExt sur 2

$$\{T_{(0 \rightarrow 2)}\}: \begin{matrix} K \\ \left\{ \begin{array}{cc} 0 & +k_r \cdot N_{02} \\ +f \cdot N_{02} & 0 \\ N_{02} & -k_p \cdot N_{02} \end{array} \right\} \\ R_1 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \{T_{(1 \rightarrow 2)}\}: \begin{matrix} O \\ \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & C_{m \ 1 \rightarrow 2} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\} \\ R_1 \end{matrix}$$

2 est en équilibre /Rgal. D'après le TMS en O selon  $\vec{x}_1$ , (ainsi l'équation trouvait ne sera pas « encombrée » des inconnues de liaison de  $\{T_{(1 \rightarrow 2)}\}$ ) :

$$\begin{aligned} \overline{M_{1 \rightarrow 2}(0)} \cdot \vec{x}_1 + \overline{M_{0 \rightarrow 2}(0)} \cdot \vec{x}_1 &= 0 \\ C_{m \ 1 \rightarrow 2} + \overline{M_{0 \rightarrow 2}(K)} \cdot \vec{x}_1 + (\overline{OK} \wedge \overline{R_{0 \rightarrow 2}}) \cdot \vec{x}_1 &= 0 \\ C_{m \ 1 \rightarrow 2} + k_r \cdot N_{02} + r \cdot f \cdot N_{02} &= 0 \\ \overline{OK} \wedge \overline{R_{0 \rightarrow 2}} &= (? \cdot \vec{x}_1 - r \cdot \vec{z}_1) \wedge (f \cdot N_{02} \cdot \vec{y}_1 + N_{02} \cdot \vec{z}_1) \\ C_{m \ 1 \rightarrow 2} &= -k_r \cdot N_{02} - r \cdot f \cdot N_{02} \end{aligned}$$

**Q4.** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_{m \ 1 \rightarrow 3}$ .

Que faut-il isoler ? Quelle équation est-il suffisant d'écrire ?

Idem avec 3.

On donne :

- Coefficients de frottement :  $f$  (sans unité)
- Coefficients de résistance au roulement :  $k_r$  (en m)
- Coefficients de résistance au pivotement :  $k_p$  (en m)

### 3. PINCE HANDGRIP

3.1. Tracer le cône de frottement en P sur la figure-réponse 1 pour  $f = 0,3$ .

Il faut tracer un cône de demi-angle au sommet  $\varphi$  par rapport à la droite  $(P, \vec{x}_1)$ . Remarque :  $f = 0,3$  est la pente des droites du cône ... donc inutile de calculer  $\varphi = \arctan(f)$  !

3.2. Isoler la biellette 3. En déduire graphiquement la direction des efforts  $\vec{R}_{5 \rightarrow 3}$  et  $\vec{R}_{2 \rightarrow 3}$  en complétant la figure-réponse 2.

3 est en équilibre/Rgal soumis l'action de 2 glisseurs ... théorème. Forces portées par la droite (C,B).

Figure-réponse 1

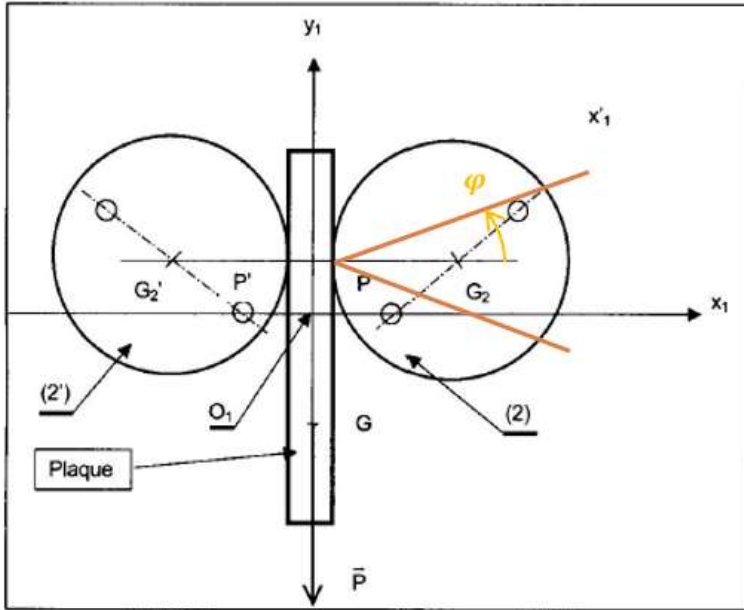
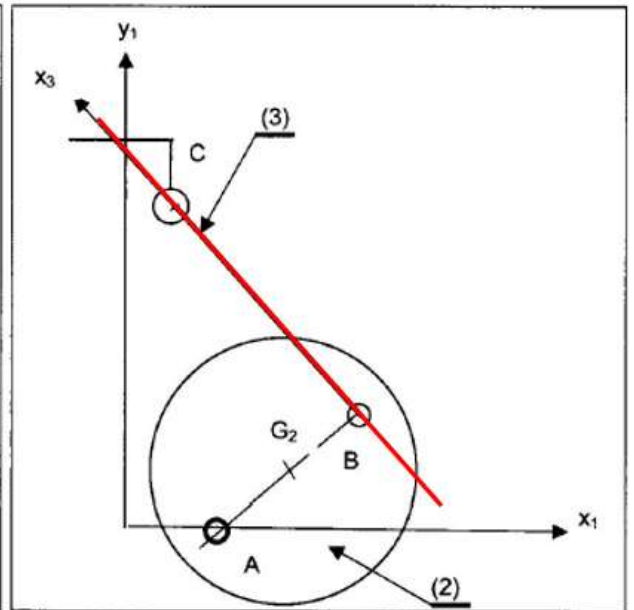


Figure-réponse 2

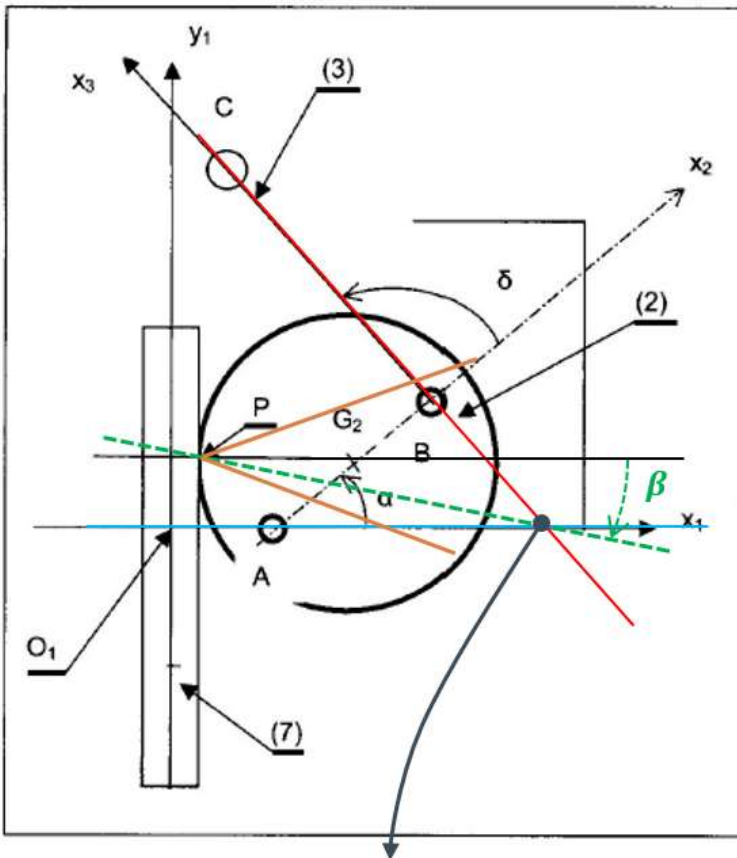


3.3. Isoler le cadre 4. En déduire graphiquement la direction des efforts  $\vec{R}_{2 \rightarrow 4}$  et  $\vec{R}_{2' \rightarrow 4}$ .

4 est en équilibre/Rgal soumis l'action de 2 glisseurs en A et A' (point symétrique de A) ... théorème. Forces portées par la droite  $(A, \vec{x}_1)$ .

3.4. Isoler le galet 2. En déduire graphiquement la direction de l'effort  $\overrightarrow{R_{t\hat{o}le \rightarrow 2}}$  en complétant la figure-réponse 3. Conclusion.

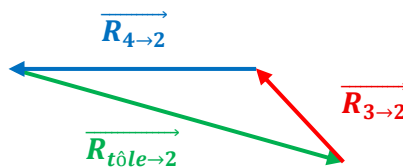
Figure-réponse 3



2 est en équilibre/Rgal soumis l'action de 3 glisseurs ... Nouveau théorème (pour 3 glisseurs). Les 3 Forces sont concourantes. On vérifie que la droite verte en pointillés est dans le cône d'adhérence (orange) soit  $\beta \ll \varphi$  pour assurer l'adhérence, autrement dit l'arc-boutement.

(Remarque hors programme : il existe un théorème pour 4 glisseurs. Il suffit de les regrouper 2 par 2 pour appliquer sur le théorème à 2 glisseurs !)

Point de concours de  $\overrightarrow{R_{3 \rightarrow 2}}$  et  $\overrightarrow{R_{4 \rightarrow 2}}$  donc (théorème des 3 glisseurs) aussi de  $\overrightarrow{R_{t\hat{o}le \rightarrow 2}}$ .

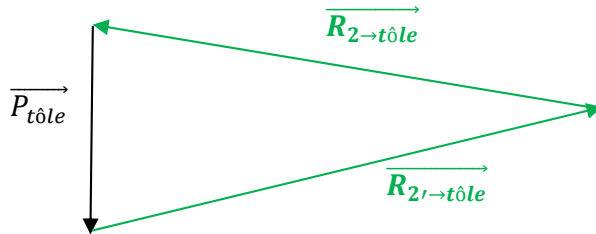


Puis, triangle des forces respectant les directions de celles-ci.

Graphiquement, on trouve  $\tan(\beta) \approx \frac{2}{10}$  (pente) et et vérifie bien que  $\overrightarrow{R_{t\hat{o}le \rightarrow 2}}$  est dans le cône d'adhérence.

3.5. Isoler la tôle et en déduire graphiquement  $\|\vec{R}_{2 \rightarrow tôle}\|$ .

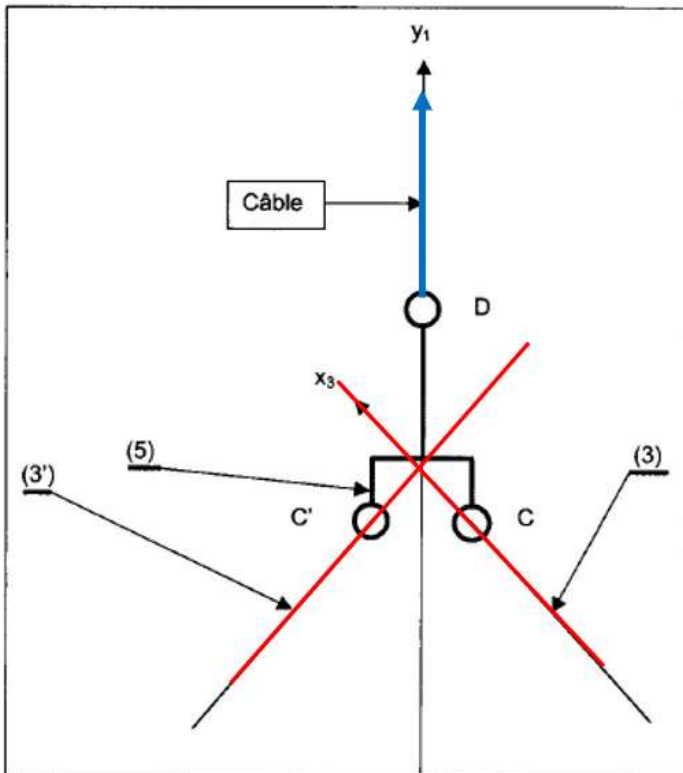
La tôle est en équilibre/Rgal soumis l'action de 3 glisseurs ... théorème. Les 3 Forces sont concourantes (en un même point) et on connaît le poids de la tôle. Triangle de forces à construire séparément en respectant les directions des forces (reprendre une échelle d'effort compatible avec les dimensions de la feuille ou faire un calcul, on a  $2 \cdot \sin(\beta) \cdot \|\vec{R}_{2 \rightarrow tôle}\| = \|\vec{P}_{tôle}\|$ ).



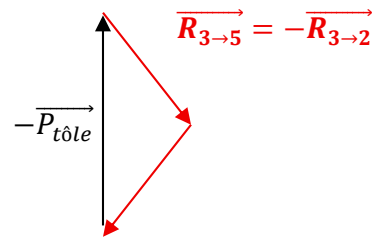
$$\|\vec{R}_{2 \rightarrow tôle}\| = \frac{\|\vec{P}_{tôle}\|}{2 \cdot \sin(\beta)} \approx \frac{300}{2 \cdot \frac{2}{10}} \approx 750 \text{ daN}$$

3.6. Isoler l'étrier 5. En déduire graphiquement  $\|\vec{R}_{3 \rightarrow 5}\|$  en complétant la figure-réponse 4.

Figure-réponse 4



5 est en équilibre/Rgal soumis l'action de 3 glisseurs ... théorème. Les 3 Forces sont concourantes et on sait que  $\vec{R}_{câble \rightarrow 5} = -\vec{P}_{tôle}$ . Triangle de forces à construire séparément en respectant les directions des forces.



Graphiquement, on trouve :

$$\|\vec{R}_{3 \rightarrow 2}\| \approx 400 \text{ daN}$$