

# TD 14 – Frottement (Lois de Coulomb)

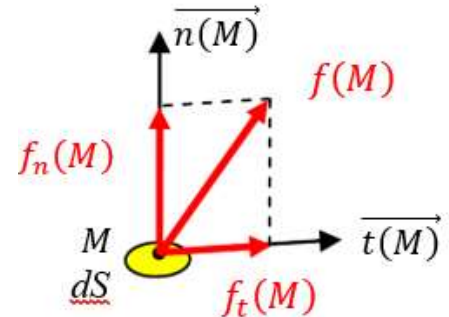
## FREIN D’AIRBUS

### 1.1. Définition du modèle local avec frottement (Rappel voir C14)

On définit l’action mécanique élémentaire de l’élément de surface :

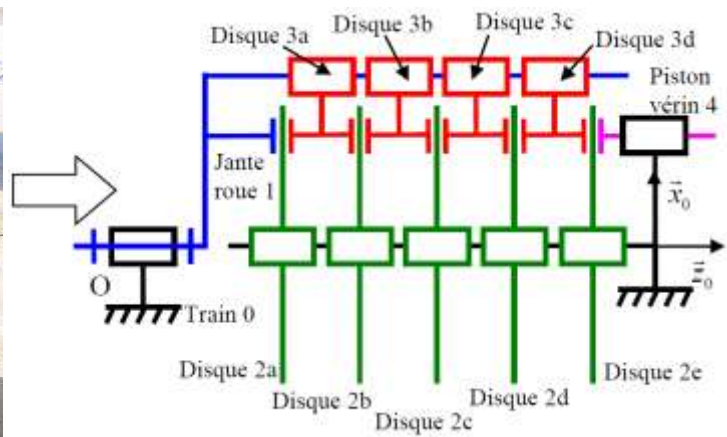
$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{f}(M) dS \text{ avec } \vec{f}(M) = f_n(M) \vec{n}(M) + f_t(M) \vec{t}(M), \text{ où :}$$

- $f_n(M)$  : densité surfacique normale d’effort en M ( $f_n(M) = -p(M)$  dans le cas de pression de contact sur une surface)
- $\vec{n}(M)$  : vecteur unitaire normal au plan tangent de la surface
- $f_t(M)$  : densité surfacique tangentielle d’effort en M
- $\vec{t}(M)$  : vecteur unitaire d’une direction du plan tangent de la surface



On applique ensuite les lois de Coulomb sur l’action mécanique élémentaire et on considère que l’on a une infinité d’actions mécaniques élémentaires sur la surface étudiée. La répartition de ces actions mécaniques élémentaires permet d’obtenir un champ vectoriel qui correspond à la modélisation locale des actions mécaniques.

### 1.2. Exemple du bloc de freinage de l’A320



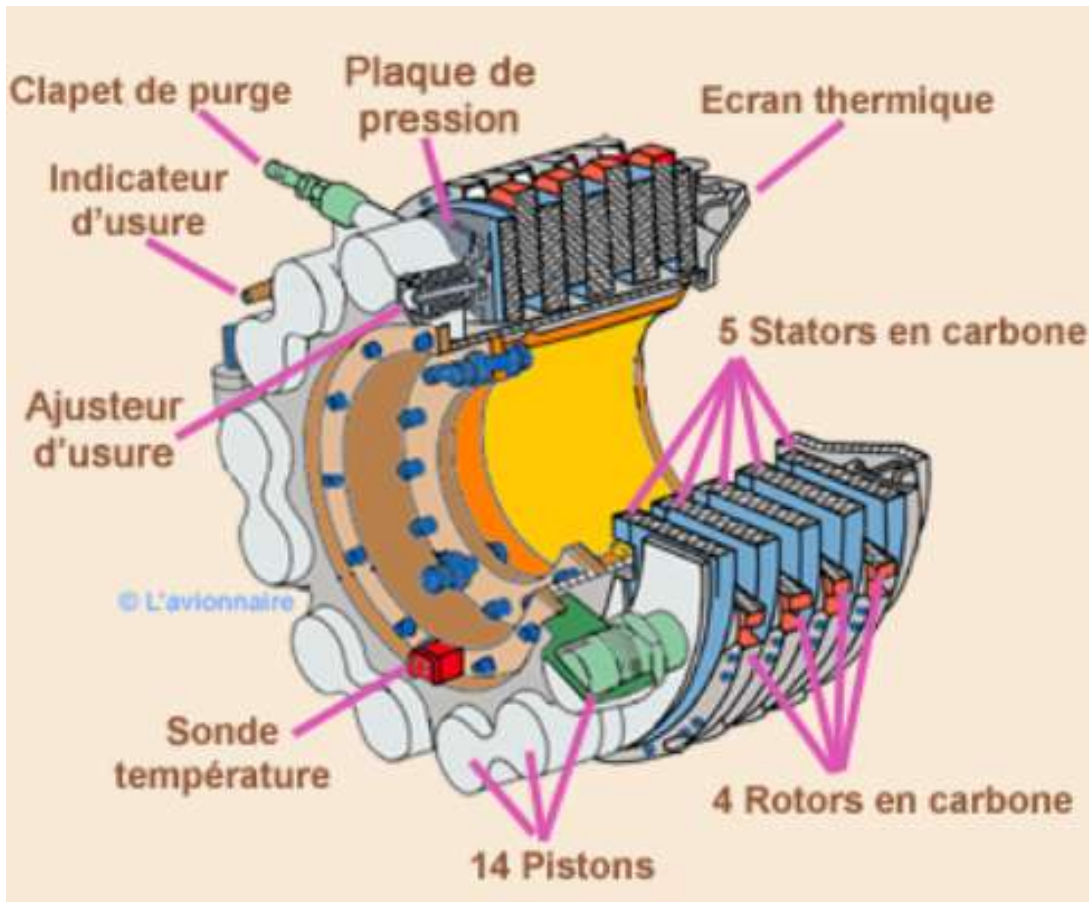
Bloc de freinage de l’A320 ouvert (à gauche) et modèle associé (à droite)

Le Bloc de freinage est doté de 9 disques en carbone, 5 en liaison glissière d’axe  $\vec{z}_0$  par rapport au train repéré 0 (disques 2) et 4 en liaison glissière de direction  $\vec{z}_0$  par rapport à la jante de la roue repéré 1 (disques 3).

Pour mettre en contact ces disques et par conséquent freiner la jante de la roue 1, un dispositif hydraulique constitué de 14 vérins équi-répartis, dont le vérin 4, permet d’exercer une action mécanique sur le disque 2e définie par le torseur suivant :

$$\{T(\text{vérins} \rightarrow 2e)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{R(\text{vérins} \rightarrow 2e)} = -F_0 \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_o$$

$$\{\mathcal{T}(vérins \rightarrow 2e)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(vérins \rightarrow 2e)} = -F_0 \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_o$$



Exemple d'alternance des disques avec leurs zones de frottements (ce n'est pas un frein d'Airbus).



Cette action mécanique est intégralement transmise au disque 3d (et de proche en proche à tous les autres disques) et elle génère grâce au frottement un moment permettant d'immobiliser petit à petit le disque 3d par rapport au disque 2e. Par conséquent on a :

$$\{\mathcal{T}(2e \rightarrow 3d)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(2e \rightarrow 3d)} = -F_0 \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{M}_o(2e \rightarrow 3d) = M_o \vec{z}_0 \end{array} \right\}_o \text{ où } F_0 = 10^6 N$$

**Objectif d'étude :** Déterminer la relation entre l'effort presseur  $F_0$  exercé par le dispositif hydraulique sur le disque 2e et le moment de freinage global  $M_{global}$  exercé par le bloc de freinage sur la jante de la roue.

Compte tenu de la géométrie de la surface de contact (S) entre 2e et 3d on utilise les coordonnées polaires pour paramétrer cette surface (voir ci-contre)

Données :  $R_2 = 300 \text{ mm}$  ;  $R_1 = 200 \text{ mm}$  ;  $f = 0,5$

**Définition de l'AM élémentaire et du modèle local :**

$$\{\mathcal{J}(2e \rightarrow 3d)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}(2e \rightarrow 3d) = \int d\overrightarrow{F}_{2e \rightarrow 3d} \\ \overrightarrow{M}_O(2e \rightarrow 3d) = \int \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{F}_{2e \rightarrow 3d} \end{array} \right\}_O$$

avec  $d\overrightarrow{F}_{2e \rightarrow 3d} = (f_n(M) \overrightarrow{n}(M) + f_t(M) \overrightarrow{t}(M)) dS$

**Hypothèses :**

- On suppose que la pression de contact de 2e sur 3d est uniforme soit :  $f_n(M) = -p(M) = -p_0$
- Le vecteur normal au plan tangent commun à 2e et 3d sortant de la matière de 3d est  $\overrightarrow{z}_0$  soit :  $\overrightarrow{n}(M) = \overrightarrow{z}_0$
- Il y a du glissement en M entre 3d et 2e et puisque l'on calcule les efforts de 2e sur 3d, on a donc  $\overrightarrow{t}(M) = \frac{-\overrightarrow{V}(M \in 3d/2e)}{\|\overrightarrow{V}(M \in 3d/2e)\|}$  avec  $\overrightarrow{V}(M \in 3d/2e) = \overrightarrow{V}(M \in 1/0)$  si 3d est solidaire de la jante 1 et 2e du train 0.

$$\overrightarrow{V}(M \in 3d/2e) = \overrightarrow{V}(M \in 1/0) = \overrightarrow{V}(O \in 1/0) + \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = -r \cdot \overrightarrow{e}_r \wedge \dot{\theta}_{10} \cdot \overrightarrow{z}_0 = r \dot{\theta}_{10} \cdot \overrightarrow{e}_\theta$$

Soit  $\overrightarrow{t}(M) = -\overrightarrow{e}_\theta$  si  $\dot{\theta}_{10} > 0$

L'existence du glissement induit que  $f_t(M)$  est sur le cône de frottement, soit  $f_t(M) = |f \cdot f_n(M)|$ .

Le signe de  $f_t(M) \cdot \overrightarrow{t}(M)$  est donné par  $\overrightarrow{t}(M) = -\overrightarrow{e}_\theta$  (si  $\dot{\theta}_{10} > 0$ ).

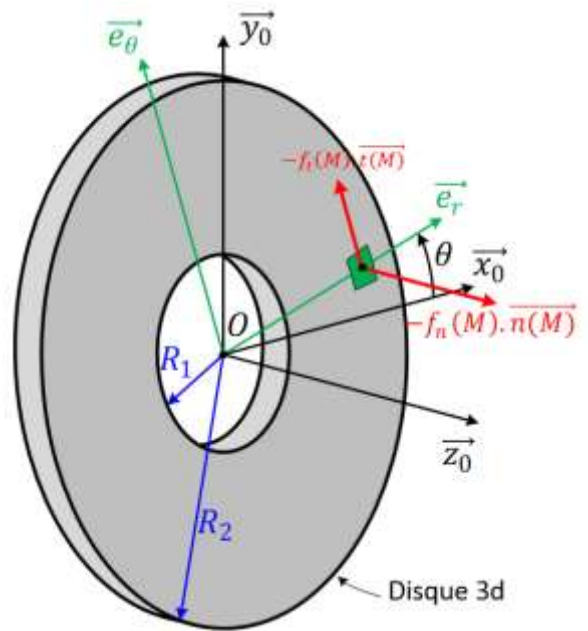
Au final l'action mécanique élémentaire s'écrit :  $d\overrightarrow{F}_{2e \rightarrow 3d} = (-p_0 \cdot \overrightarrow{z}_0 - f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{e}_\theta) \cdot dS$

**Résultat à retenir :**

$$\overrightarrow{M}_O(2e \rightarrow 3d) = M_0 \cdot \overrightarrow{z}_0 \quad \text{avec :} \quad \boxed{M_0 = \frac{2}{3} \cdot f \cdot F_0 \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}}$$

**Q1.** Déterminer  $\{\mathcal{J}(2e \rightarrow 3d)\}$  en O. Préciser les expressions de  $F_0$  et  $M_0$ .

**Q2.** Donner l'expression du moment de freinage global  $M_{global}$  exercé par le bloc de freinage sur la jante. Faire l'application numérique.



CONTACTS PONCTUELS AVEC FROTTEMENT

**Vue de dessus** des différents points importants lors de la rotation du Segway autour de l'axe  $(A, \vec{z}_0)$

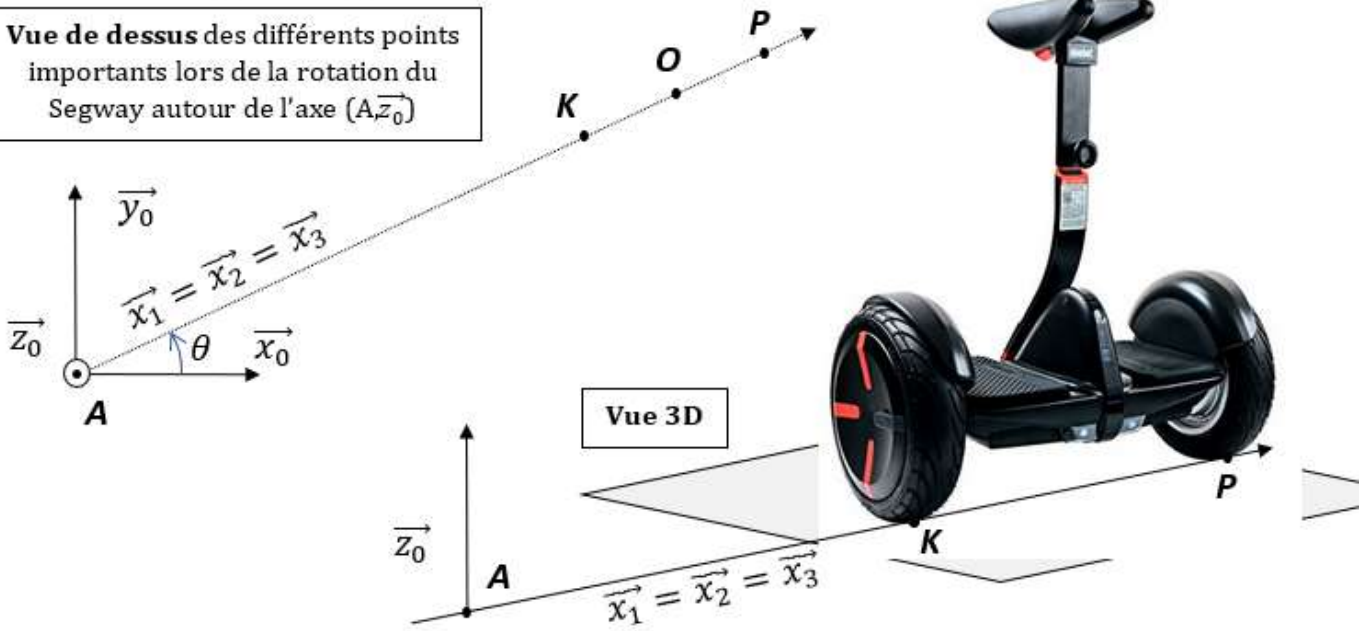
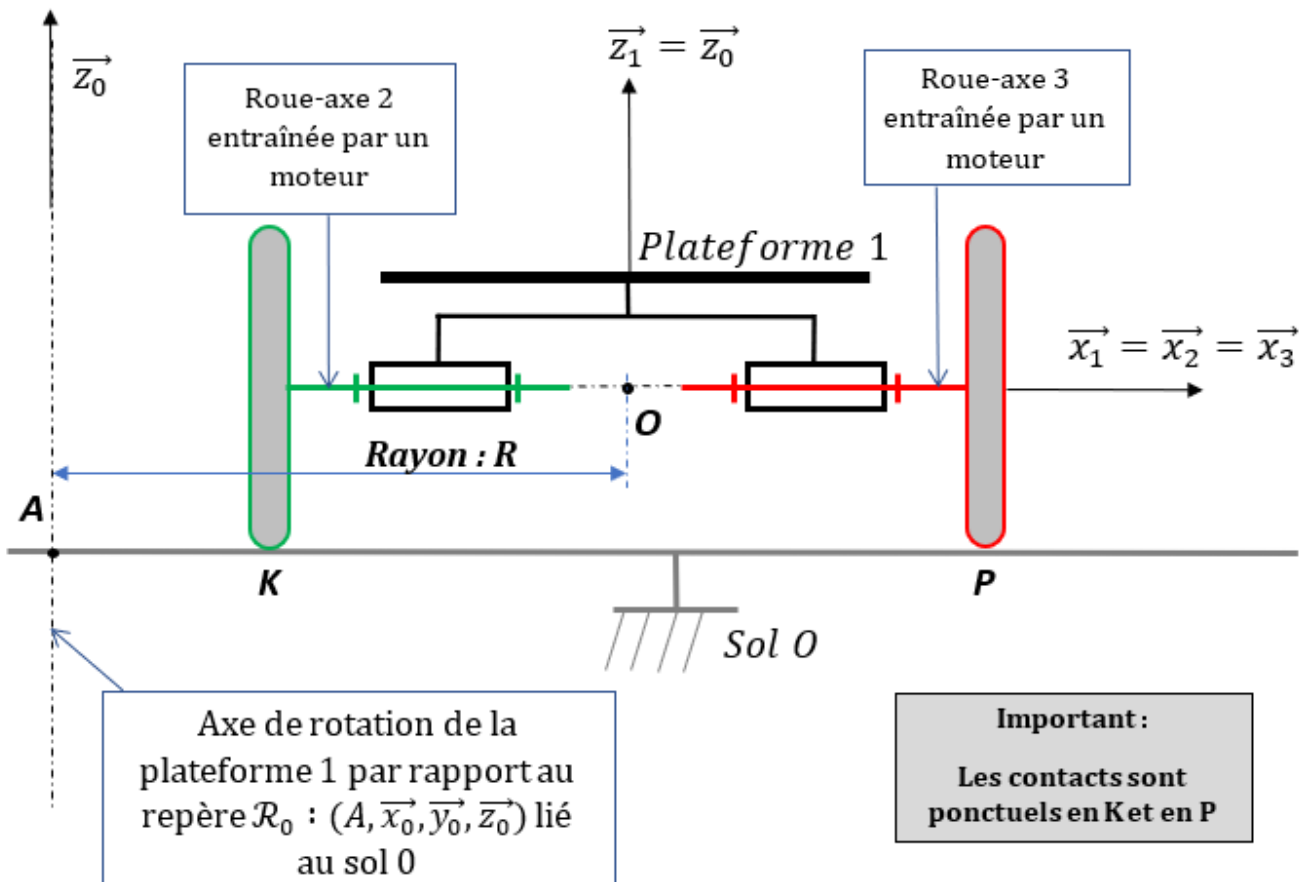


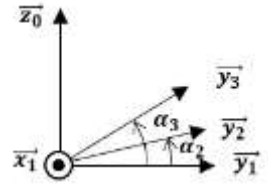
Schéma cinématique (**Vue de côté**) du Segway  
(les distances entre les points ne sont pas respectées)



Rayon des roues :  $r$

On donne les torseurs cinématiques :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\}_P: \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_3 & 0 \\ 0 & V_{y30} \\ \dot{\theta} & 0 \end{Bmatrix}_{R_1}; \quad \{\mathcal{V}(2/0)\}_K: \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_2 & 0 \\ 0 & V_{y20} \\ \dot{\theta} & 0 \end{Bmatrix}_{R_1}$$



Hypothèses :

En  $P$  et  $K$ , les roues sont à la limite du glissement par rapport au sol.

Les deux roues sont motrices.

Le Segway vire à gauche.

**Q1.** Préciser les valeurs de  $V_{y30}$  et  $V_{y20}$ .

**Q2.** Ecrire les torseurs d'actions mécaniques  $\{T(0 \rightarrow 3)\}$  et  $\{T(0 \rightarrow 2)\}$ . Préciser vos hypothèses.

**Q3.** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_{m\ 1 \rightarrow 2}$ .

**Q4.** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_{m\ 1 \rightarrow 3}$ .

On donne :

- Coefficients de frottement :  $f$  (sans unité)
- Coefficients de résistance au roulement :  $k_r$  (en m)
- Coefficients de résistance au pivotement :  $k_p$  (en m)

## PINCE DE LEVAGE « HAND-GRIPP »

La manipulation de tôle dans des ateliers de métallerie (chantiers navals, ...) est réalisée grâce à différentes technologies (magnétiques, pneumatiques) ou par adhérence comme pour la pince « Hand-gripp » représentée sur le schéma ci-dessous. Elle est suspendue par un câble accroché en  $D$ . Les galets 2 et 2' viennent en contact avec la tôle et le phénomène d'arc-boutement est utilisé pour rendre impossible le glissement de la tôle par rapport aux galets. Cela suppose des choix géométriques tels que les efforts entre la tôle et les galets soient strictement dans le cône de frottement.

Les galets 2 et 2' sont articulés en  $A$  et  $A'$  par rapport au cadre 4. Deux biellettes 3 et 3' sont articulées avec l'étrier 5 est les galets 2 et 2'.

On suppose que le problème est plan et qu'il y a équiadhérence au point  $P$  et  $P'$  telle que le rapport de l'effort tangentiel sur l'effort normal soit égale à  $\mu = \tan(\beta)$ . On néglige le poids des solides hormis le poids  $\vec{P}$  de la tôle. Le coefficient de frottement entre les galets et la tôle est  $f = \tan(\varphi)$ .

$$\overrightarrow{O_1A} = a.\overrightarrow{x_1}, \quad \overrightarrow{AG_2} = \overrightarrow{G_2B} = r.\overrightarrow{x_2}, \quad \overrightarrow{BC} = b.\overrightarrow{x_3}, \quad \overrightarrow{O_1C} = c.\overrightarrow{x_1} + d.\overrightarrow{y_1}, \quad G_2P = R \text{ (rayon de chaque galet).}$$

$$(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}) = \alpha, \quad (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}) = (\overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{y_3}) = \delta.$$

Données :

$$a = 20 \text{ mm}; b = 52 \text{ mm}; r = 14 \text{ mm}; R = 26 \text{ mm}; e = 10 \text{ mm}; P = 300 \text{ daN}; \alpha = 38^\circ \text{ et } \delta = 83^\circ.$$

On veut vérifier que  $\beta \ll \varphi$  afin d'assurer le coincement de la tôle par rapport aux galets.

**Question 1.** Tracer le cône de frottement en P sur la figure-réponse 1 pour  $f = 0,3$ .

**Question 2.** Isoler la biellette 3. En déduire graphiquement la direction des efforts  $\vec{R}_{5 \rightarrow 3}$  et  $\vec{R}_{2 \rightarrow 3}$  en complétant la figure-réponse 2.

**Question 3.** Isoler le cadre 4. En déduire graphiquement la direction des efforts  $\vec{R}_{2 \rightarrow 4}$  et  $\vec{R}_{2' \rightarrow 4}$ .

**Question 4.** Isoler le galet 2. En déduire graphiquement la direction de l'effort  $\vec{R}_{tôle \rightarrow 2}$  en complétant la figure-réponse 3. Conclusion.

**Question 5.** Isoler la tôle et en déduire graphiquement  $\|\vec{R}_{2 \rightarrow tôle}\|$ .

**Question 6.** Isoler l'étrier 5. En déduire graphiquement  $\|\vec{R}_{3 \rightarrow 5}\|$  en complétant la figure-réponse 4.

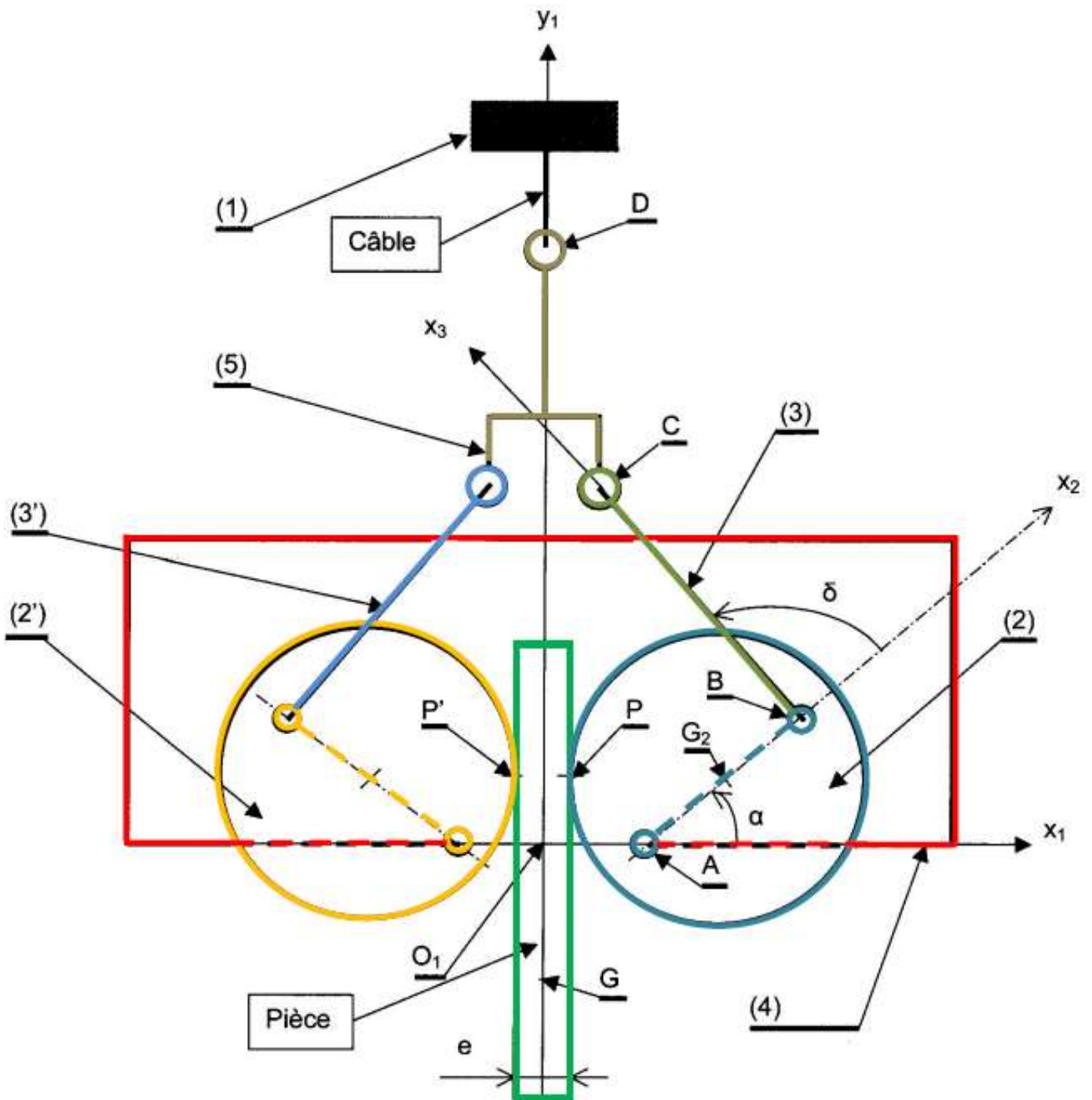


Figure-réponse 1

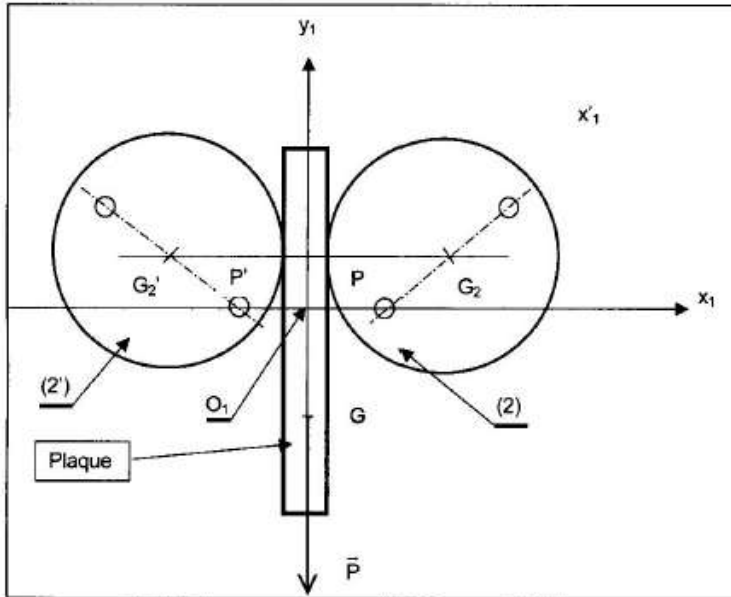


Figure-réponse 2

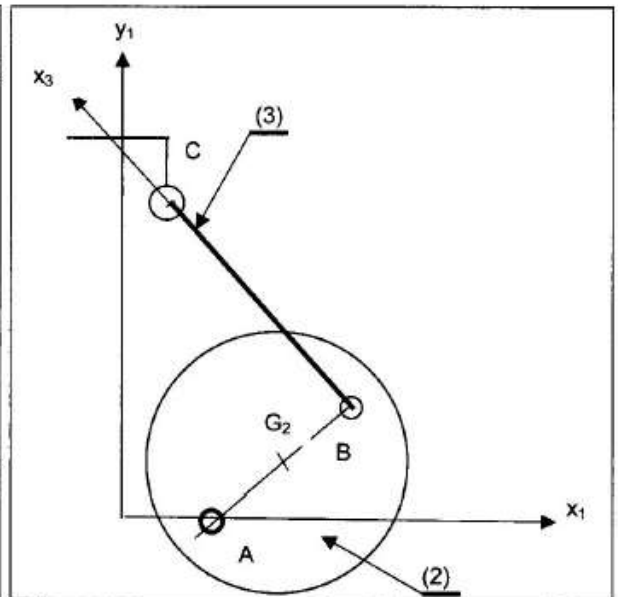


Figure-réponse 3

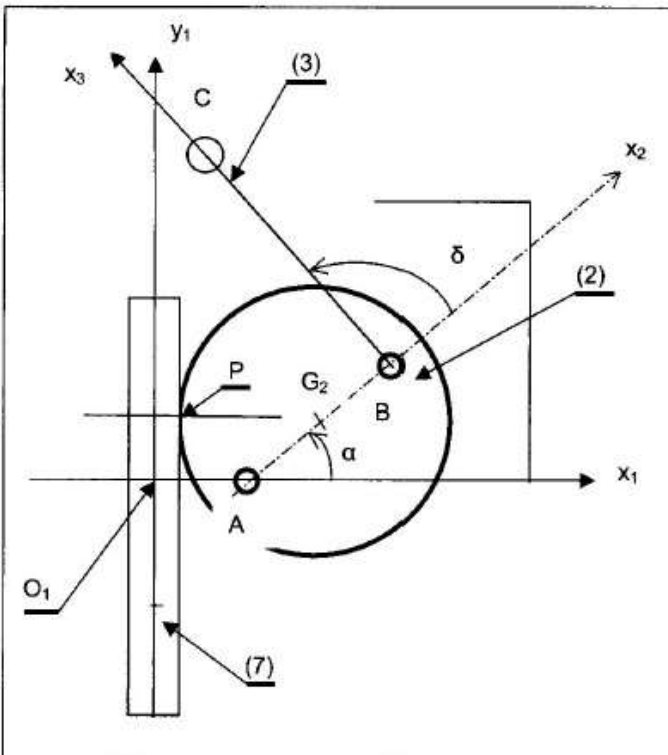


Figure-réponse 4

