



C16.1 - Evaluation des performances des systèmes asservis modélisés en SLCI

Exigence de stabilité

1. DÉFINITIONS ET EXPLICATION DU PHÉNOMÈNE	2
2. CONDITION DE STABILITÉ À PARTIR DE L'ANALYSE DE LA FTBF	2
3. CONDITION DE STABILITÉ À PARTIR DE CRITÈRES GRAPHIQUES SUR LA FTBO (CRITÈRE DU REVERS)	3
4. CAUSES D'INSTABILITÉ	6
5. EXERCICES D'ASSIMILATION	7

Compétences principales attendues :

- Connaître le critère de stabilité par la FTBF et sa représentation dans le plan complexe ;*
- Savoir ce qu'est l'équation caractéristique et le point critique ;*
- Savoir la définition de la marge de phase et de la marge de gain (FTBO) ;*
- Connaître le critère de stabilité par la FTBO (critère du revers pour les diagrammes de Bode).*

On évalue les performances d'un système asservi, modélisé en SLCI, à partir de 4 exigences principales qui sont la **stabilité**, la **précision**, la **rapidité** et l'**amortissement**. La stabilité est une notion générale non spécifique des systèmes asservis mais elle prend cependant une grande importance dans le cas de ces systèmes car on souhaite toujours qu'un système asservi soit stable. La stabilité est donc le critère que l'on regarde en premier et il est inutile d'analyser les autres critères si le système n'est pas stable.

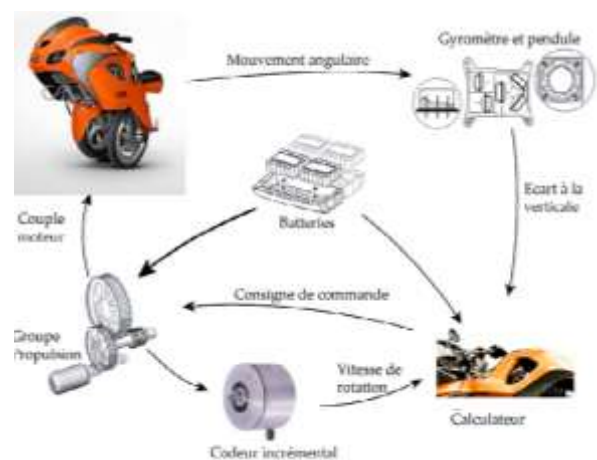


Uno I (concept initial)



Uno III

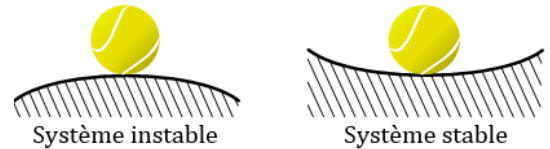
Le scooter BPG Uno III est un parfait exemple de système asservi qui doit être nécessairement stable pour son bon fonctionnement. L'équilibre du système est notamment obtenu grâce à un système gyroscopique couplé à un ordinateur traitant les informations et transmettant les consignes aux deux moteurs électriques équipant les groupes motopulseurs.



1. DÉFINITIONS ET EXPLICATION DU PHÉNOMÈNE

1.1. Stabilité - Définition générale

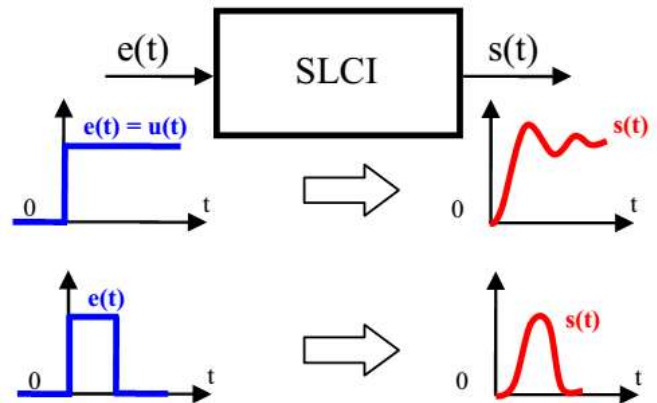
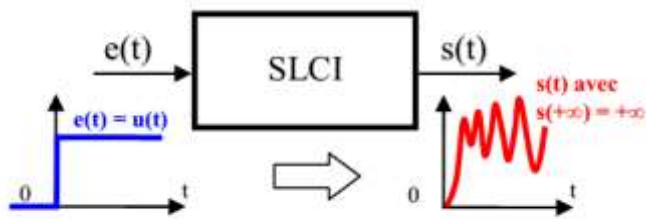
On dit qu'un système est stable si, écarté de sa position par une cause extérieure, il revient vers cette position lorsque la cause disparaît.



1.2. Stabilité - Définition adaptée aux SLCI



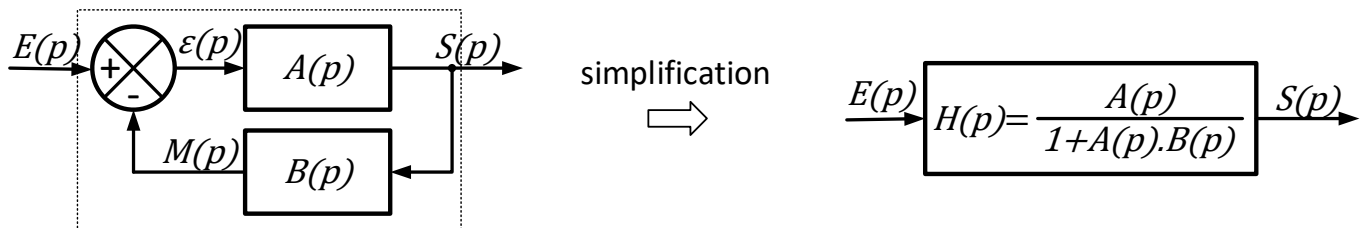
Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.



2. CONDITION DE STABILITÉ À PARTIR DE L'ANALYSE DE LA FTBF

2.1. Etude de la stabilité à partir des pôles de la FTBF

Le calcul de la fonction de transfert boucle fermée d'un système asservi permet de passer d'un modèle bouclé à un modèle équivalent non bouclé de fonction de transfert $H(p)$.



Dans ce cas la fonction de transfert s'écrit :

$$FTBF(p) = H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \dots (p - p_i) \dots (p - p_n)}$$

Avec :

- $N(p)$: numérateur de $H(p)$;
- $D(p)$: dénominateur de $H(p)$ avec ses pôles p_i (n : ordre de $H(p)$).

Si l'on sollicite ce système avec une impulsion de Dirac en entrée ($E(p) = 1$), la sortie $S(p)$ a la même expression que $H(p)$ dans le domaine de Laplace.

Ce qui donne après décomposition en éléments simples :

$$S(p) = \frac{A_1}{(p - p_1)} + \frac{A_2}{(p - p_2)} + \dots + \frac{A_n}{(p - p_n)}$$

La transformation inverse permet ensuite d'obtenir la réponse temporelle qui a donc pour expression :

$$s(t) = (A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} + \dots + A_n \cdot e^{p_n \cdot t}) \cdot u(t)$$

Pour que la sortie soit bornée, les exponentielles doivent toutes être décroissantes, ce qui donne 2 cas :

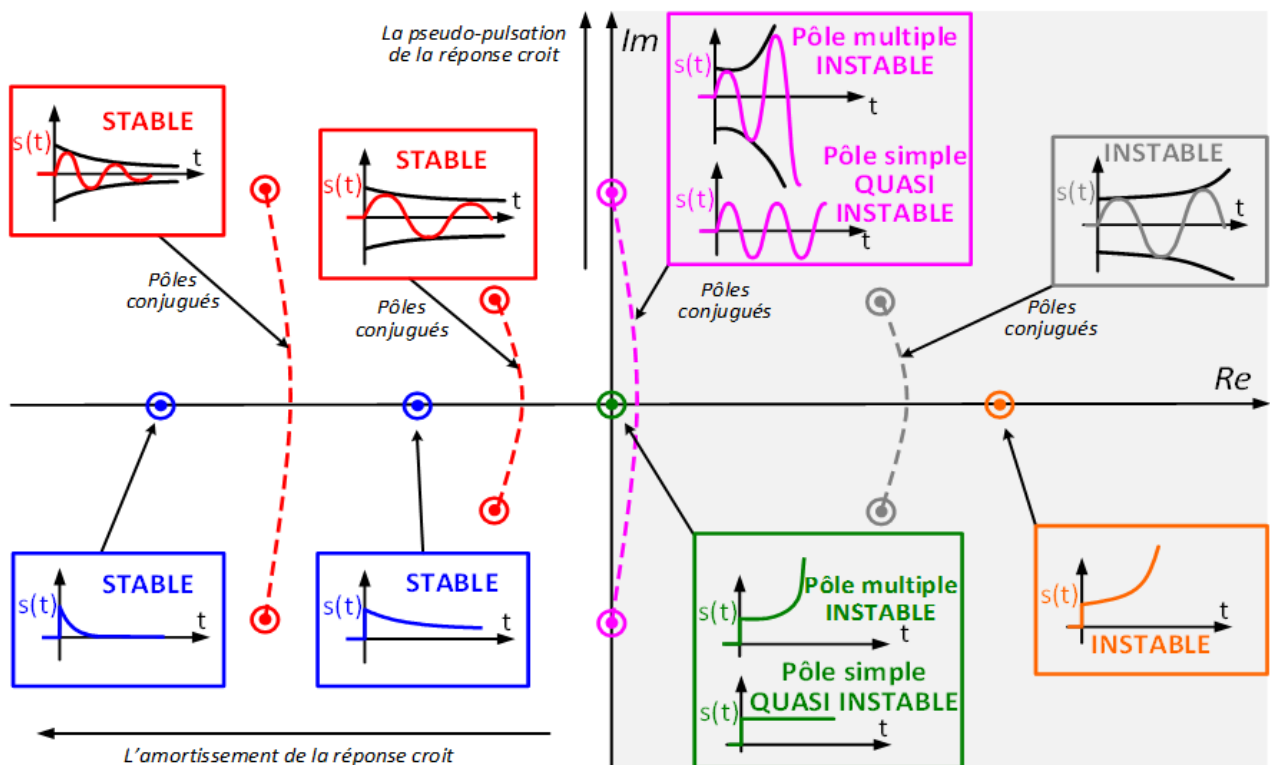
- Si les pôles sont tous réels : $s(t)$ ne tends vers 0 que si les p_i sont tous négatifs ;
- S'il y a des pôles complexes conjugués deux à deux $p_1 = \alpha + j\omega$ et $p_2 = \alpha - j\omega$, alors :
 $s(t) = (A_1 \cdot e^{(\alpha+j\omega)t} + A_2 \cdot e^{(\alpha-j\omega)t}) \cdot u(t) = \mu \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$. Ainsi, $s(t)$ tends vers 0 si $\alpha < 0$.

La FTBF pouvant aussi se mettre sous la forme privilégiant l'écriture en pôles, il est par conséquent possible de déterminer la stabilité d'un système asservi à l'aide de la **condition fondamentale** qui s'énonce :



Un système asservi est stable si sa FTBF possède :

- des pôles réels tous négatifs,
- des pôles complexes ayant leur partie réelle négative.



Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac suivant les pôles de la FTBF d'un système :

Cependant, vérifier la stabilité par détermination du signe de la partie réelle des pôles de la FTBF n'est pas une méthode très usitée car il faut déterminer tous les pôles de la FTBF. **On lui préfère la démarche qui suit.**

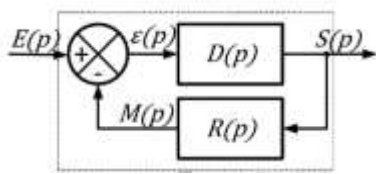
3. CONDITION DE STABILITÉ À PARTIR DE CRITÈRES GRAPHIQUES SUR LA FTBO (CRITÈRE DU REVERS)

Dans la pratique, l'étude de la stabilité des systèmes bouclés se fait plutôt graphiquement dans le domaine fréquentiel à partir de la FTBO.



Le fait que les critères soient fréquentiels ne doit pas conduire à penser que l'instabilité ne peut se produire que si l'entrée est sinusoïdale. En effet, tout signal d'entrée (un échelon par exemple) peut être décomposé en série de Fourier et donc être considéré comme une somme de signaux sinusoïdaux couvrant un large spectre de pulsations.

3.1. Condition sur la FTBO pour assurer la stabilité



Soit l'asservissement classique ci-contre.

On a $H(p) = \frac{D(p)}{1+D(p).R(p)}$ et $D(p).R(p) = FTBO(p)$.

Le système sera stable si $1 + FTBO(p)$ n'est jamais nulle.

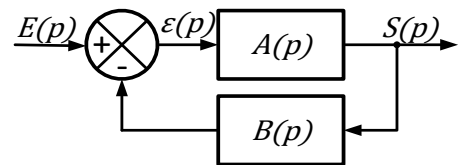
On montre qu'il faut plus largement que $1 + FTBO(p)$ reste strictement positif lorsque p varie.

Autrement dit, dans le plan complexe, pour un point p quelconque, Il faut $FTBO(p) > -1$. La fonction $FTBO(p)$ ne doit donc pas passer par la demi-droite $]-\infty; -1]$ du plan complexe.

3.2. Equation caractéristique et point critique - Définitions



On appelle **équation caractéristique** d'un système bouclé ci-contre l'expression $1 + FTBO(p) = 0$. Le système est en limite de stabilité si $FTBO(p) = -1$. On appelle **point critique** le point du plan complexe d'affixe $z = -1$ (module 1 et argument -180°).



On constate que l'étude du dénominateur des FTBF revient en fait à **analyser la FTBO par rapport au point critique**.

3.3. Critère du revers dans le plan de Bode

Un système asservi, stable en boucle ouverte, est asymptotiquement stable en boucle fermée si :



à la pulsation $\omega = \omega_{\phi 180}$ telle que $\arg(FTBO(j\omega_{\phi 180})) = -180^\circ$,

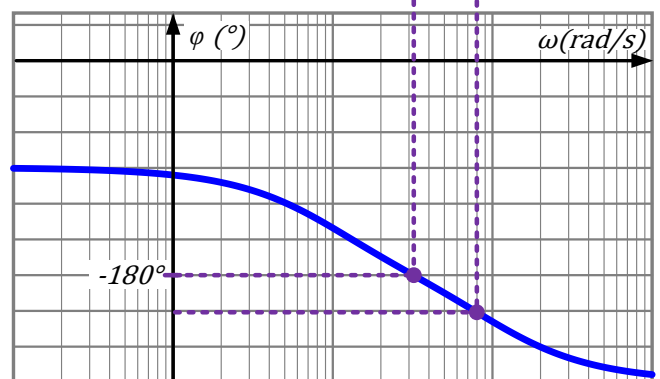
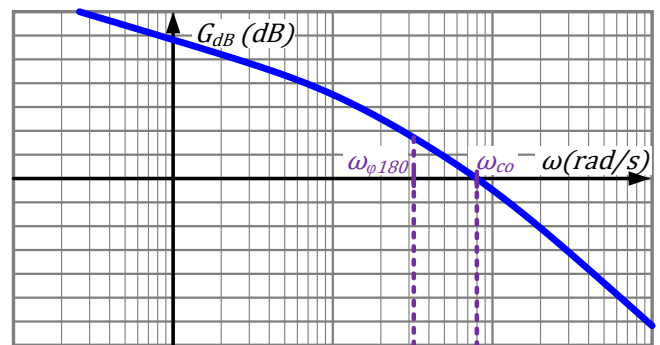
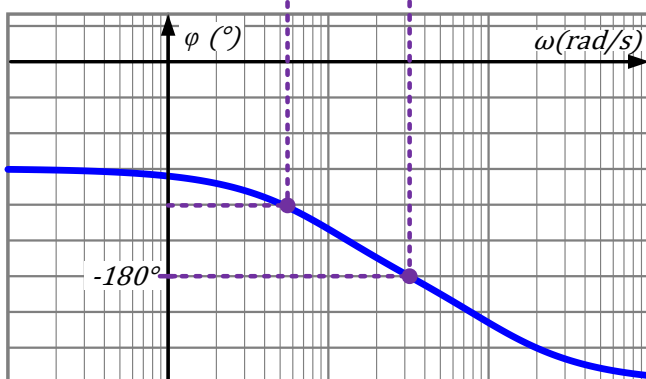
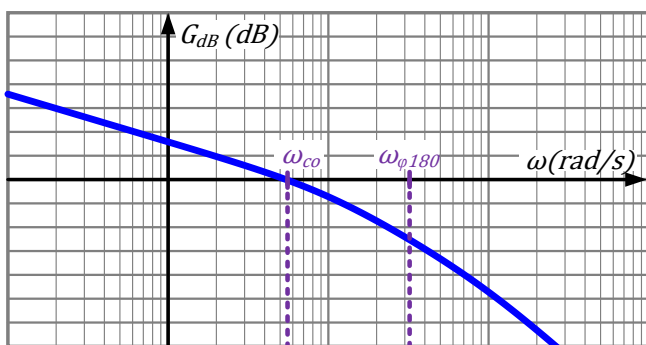
on a : $20 \cdot \log|FTBO(j\omega_{\phi 180})| < 0dB$

Système stable

Ou alors à la pulsation $\omega = \omega_{co}$ telle que : $20 \cdot \log|FTBO(j\omega_{co})| = 0dB$,

on a : $\arg(FTBO(j\omega_{co})) > -180^\circ$

Système instable



3.4. Marges de stabilité (imposées par le cahier des charges)

En pratique, il est nécessaire de faire fonctionner un système suffisamment loin de son point d'instabilité, ceci pour plusieurs raisons :

- lors de la conception d'un système, de nombreuses hypothèses sont prises et les modèles de fonctions de transfert sont imprécis (non prise en compte des phénomènes non-linéaires, retards, ...);
- lors de l'utilisation du système, les composants électroniques (résistances, amplificateurs, ...) ont des caractéristiques qui évoluent avec le temps (température, vieillissement...).

Il est donc nécessaire de prévoir des « marges » vis à vis du problème d'instabilité qui « garantissent » que le point critique ne sera jamais atteint.

Marge de phase



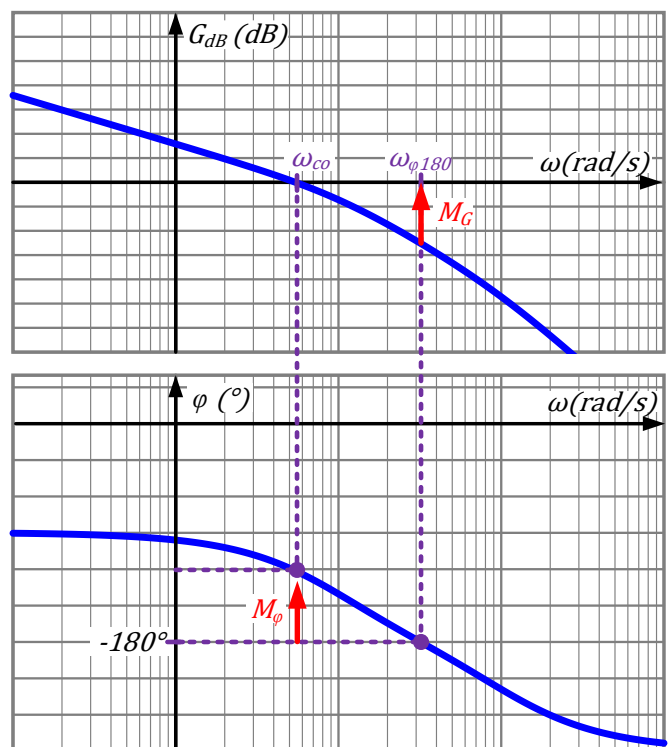
La marge de phase est définie telle que :

$$M_\varphi = 180^\circ + \arg(FTBO(j\omega_{co}))$$

où ω_{co} est la pulsation de coupure pour laquelle $|FTBO(j\omega_{co})| = 0 \text{ dB}$.

On cherche généralement à obtenir une marge de phase de 45° (valeur empirique) qui garantit un fonctionnement correct de la plupart des systèmes.

Illustrations des marges de gain et de phase dans le plan de Bode (à retenir)



Marge de gain



La marge de gain est définie telle que :

$$M_G = -20 \log |FTBO(j\omega_{\varphi 180})|$$

où $\omega_{\varphi 180}$ est la pulsation pour laquelle $\arg(FTBO(j\omega_{\varphi 180})) = -180^\circ$.

La marge de gain est une garantie que le système restera stable malgré une variation imprévue du gain ou une imprécision sur sa valeur. Une marge de gain de 6 dB permet une latitude d'un facteur 2 sur le gain en boucle ouverte. La valeur retenue est généralement comprise entre 6 et 10 dB .

3.1. Et pour les concours ?

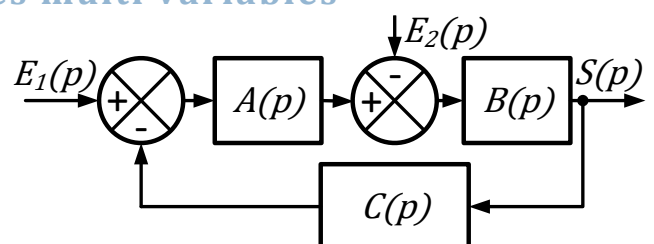
Typiquement, on vous fera étudier le comportement de la $FTBO_{non\ corrigée}$ (correcteur $C(p) = 1$) afin de déterminer la correction à apporter à la phase et au gain pour respecter les exigences du cahier des charges (req).

Ensuite, on proposera un correcteur, on écrira alors la $FTBO_{corrigée}$, dont il faudra calculer les constantes pour assurer les marges de stabilité.

3.2. Etude de la stabilité des systèmes multi variables

Dans le cas de systèmes multi-variables, on superpose deux modes :

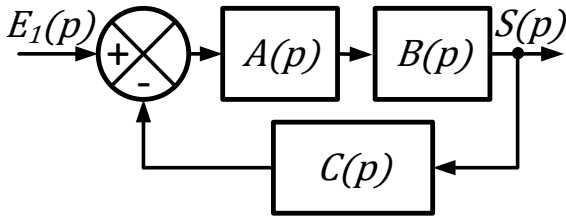
- un 1^{er} mode pour lequel l'entrée $E_2(p)$ est considérée comme nulle ;
- un 2nd mode pour lequel l'entrée $E_1(p)$ est



considérée comme nulle.

Classiquement, $E_1(p)$ est la consigne et $E_2(p)$ est la perturbation.

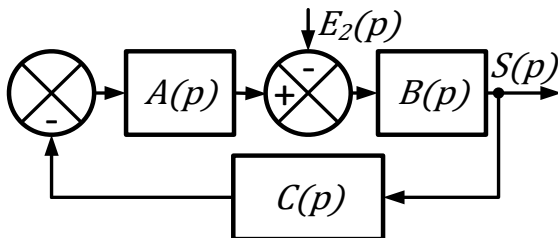
Entrée $E_2(p) = 0$



$$H_1(p) = \left. \frac{S(p)}{E_1(p)} \right|_{E_2(p)=0} = \frac{A(p) \cdot B(p)}{1 + \underbrace{A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)}_{FTBO(p)}}$$

$H_1(p)$ est la fonction de transfert en poursuite

Entrée $E_1(p) = 0$



$$H_2(p) = \left. \frac{S(p)}{E_2(p)} \right|_{E_1(p)=0} = \frac{-B(p)}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)}$$

$H_2(p)$ est la fonction de transfert en régulation.

La superposition permet d'obtenir la fonction de transfert boucle fermée du système :

$$S(p) = \frac{A(p) \cdot B(p)}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)} \cdot E_1(p) - \frac{B(p)}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)} E_2(p)$$

On constate alors que **l'équation caractéristique** de la FTBF, **est la même** pour la fonction de transfert en poursuite $S(p)/E_1(p)$ et la fonction de transfert en régulation $S(p)/E_2(p)$. Les pôles des deux fonctions de transfert sont par conséquent les mêmes. L'étude de stabilité du système comprenant les perturbations est donc la même que celle du système sans perturbation.



Conclusion: Pour étudier la stabilité d'un système multi variables, il suffit de ne regarder que la stabilité de la fonction de transfert en poursuite $S(p)/E_1(p)$.

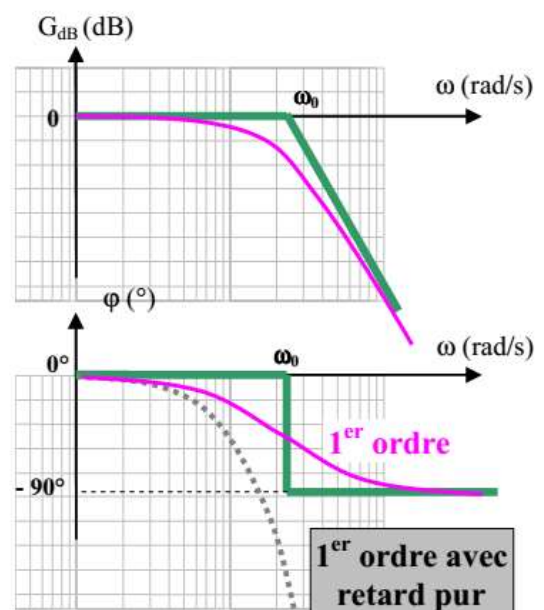
4. CAUSES D'INSTABILITÉ

4.1. Les retards purs

La fonction de transfert s'écrit : $H(p) = e^{-Tp}$ soit $H(j\omega) = e^{-Tj\omega}$ pour la réponse harmonique. Le module est constant et égal à 1 ($G_{dB} = 0$ dB).

L'argument est une fonction linéaire de ω :

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = -T\omega$$



Exemple (ci-contre) : $H(j\omega) = \frac{e^{-Tj\omega}}{1+Tj\omega}$

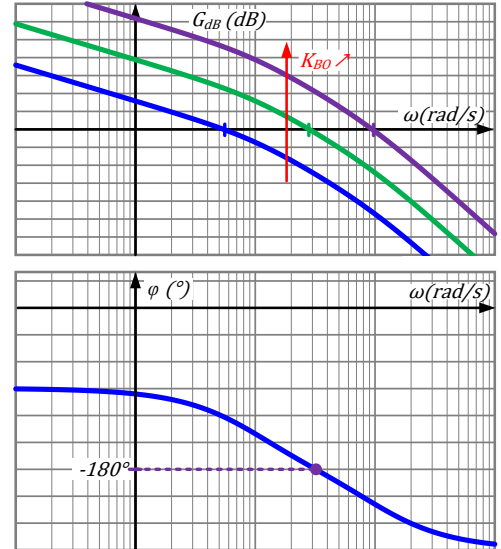
Il s'agit d'un retard pur associé à un système du 1er ordre. Seule la courbe de phase du système est affectée par le retard pur.

La présence d'un retard pur (il y en a dans tous les systèmes) dans la FTBO pourra entraîner l'instabilité du système en BF.

4.2. Le gain en boucle ouverte

Pour les systèmes d'ordre supérieur à 2, l'augmentation du gain en boucle ouverte K_{BO} peut conduire à un risque d'instabilité (voir ci-contre).

Diminuer le gain de la boucle ouverte est ainsi un moyen simple pour augmenter les marges de stabilité.



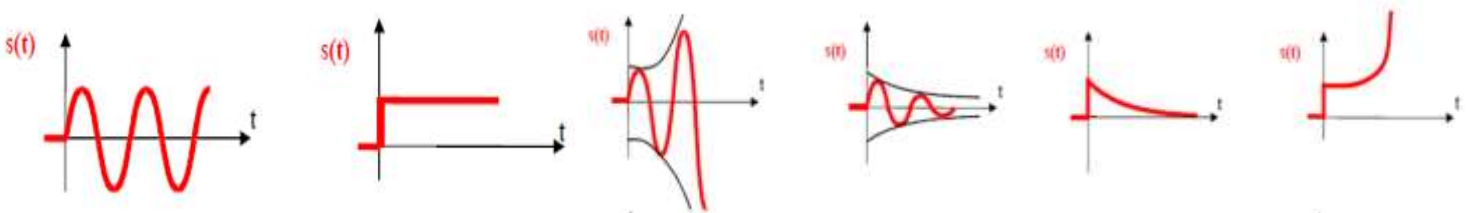
4.3. Les intégrateurs

La présence d'intégrateur(s) dans la FTBO apporte un déphasage de -90° , ce qui rapproche le lieu de transfert du point critique, donc tend à déstabiliser le système.

5. EXERCICES D'ASSIMILATION

Exercice 1 : Stabilité à partir de s(t)

On donne ci-dessous des réponses à l'impulsion de Dirac de plusieurs systèmes.



Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou marginalement stable.

Exercice 2 : Stabilité à partir des pôles de la FTBF

On donne ci-dessous les pôles des FTBF de plusieurs systèmes.

Système 1 : -1 ; -2 ; 2	Système 3 : -2+j, -2-j, 2j,-2j	Système 5 : -j, j, -1, 1
Système 2 : -3, -2, 0	Système 4 : -2+3j, -2-3j,-2	Système 6 : -1, +1

Pour chaque cas déterminer si le système est stable, instable ou marginalement stable.

Exercice 3 : Stabilité par modification du gain de la FTBO

On donne ci-dessous les FTBO de 2 systèmes asservis.

- Tracer leurs diagrammes de Bode pour $K = 1$.

2. Déterminer K pour que les systèmes soient stable.

$$FTBO_1(p) = \frac{K}{p \cdot (p + 3) \cdot (p + 4)}$$

$$FTBO_2(p) = \frac{K \cdot (1 + 10 \cdot p)}{p \cdot (p + 1) \cdot (p + 100)}$$

