C16.2 - Evaluation des performances des systèmes asservis modélisés en SLCI Exigence de Précision

Compétences attendues

Connaître la différence entre **écart et erreur** et leurs définitions (absolue et relative)
Connaître le **nom des erreurs** selon le type d'entrée (indicielle, traînage, …)
Connaître le lien entre **classe de la FTBO** et **classe de la consigne** pour la **précision** et le **tableau associé**
Connaître l'importance de la partie de la FTBO **en amont** de la perturbation sur la **précision en régulation**
Savoir calculer la **précision** grâce au **théorème de la valeur finale**

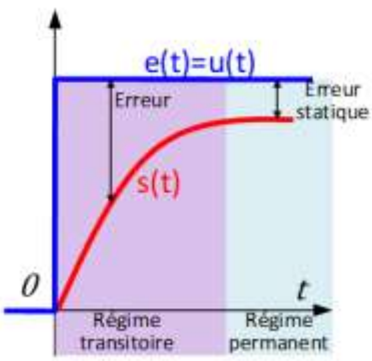
1. DÉFINITIONS – ERREUR, ÉCART ET PRÉCISION

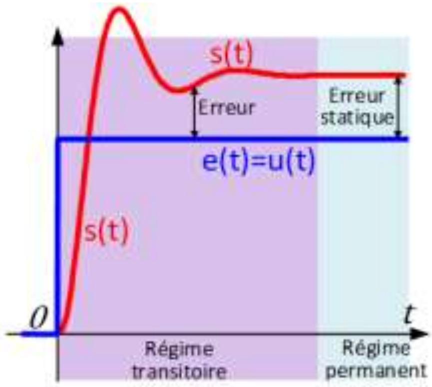
La précision qualifie l'aptitude du système à atteindre la valeur visée. Elle est caractérisée par l'**erreur dynamique** ***er(t)*** entre l'entrée et la sortie définie dans le cas général par :

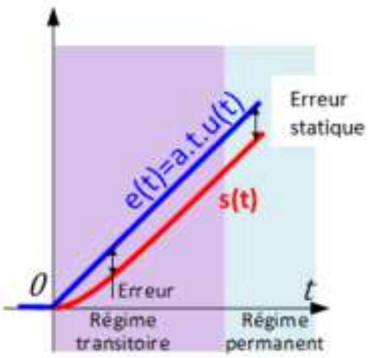
$$er(t) = e(t) - s(t)$$

Par ailleurs, on définit l'**erreur statique** par :

$$er_{stat} = \lim_{t \to +\infty} er(t)$$







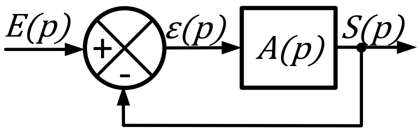
Si l'erreur statique est nulle, on dit que le système est précis.

Selon l'entrée du système on parle d'une :

- **Erreur de position ou indicielle : entrée échelon :** $\boldsymbol{e(t) = a.u(t)}$ **;**
- **Erreur de vitesse, de traînage ou de poursuite : entrée rampe :** $\boldsymbol{e(t) = a.t.u(t)}$ **;**
- **Erreur en accélération : entrée parabole :** $\boldsymbol{e(t) = a.t^2.u(t)}$**.**

1.1. Cas particulier du système bouclé à retour unitaire

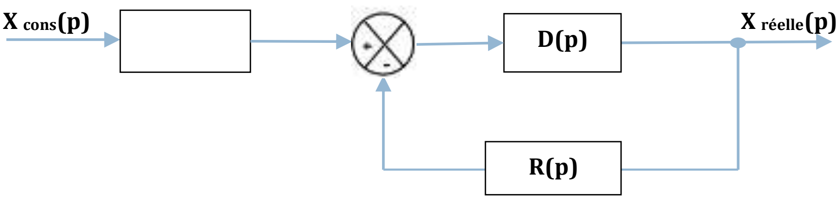
Dans ce cas, l'écart $\varepsilon(t)$ (en sortie de comparateur) correspond directement à l'erreur $er(t)$ (différence entre l'entrée et la sortie).



$$ER(p) = \varepsilon(p) = E(p) - S(p)$$

1.2. Cas général du système bouclé à retour non unitaire

Si le système n'est pas à retour unitaire, l'écart $\varepsilon(t) = u_c(t) - u_{mes}(t)$ n'est pas de même nature que l'erreur
$er(t) = e(t) - s(t) = x_{cons}(t) - x_{réelle}(t)$.



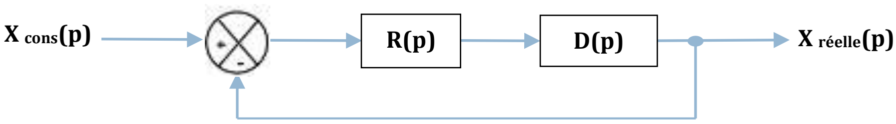
On sait aussi que le bloc de transduction de la consigne (typiquement nommé le transducteur) devra avoir R(p) comme fonction de transfert pour assurer un écart nul lorsque l'erreur est nulle (calcul ultra-classique).

On a alors, $\varepsilon(p) = U_c(p) - U_{mes}(p) = R(p).X_{cons}(p) - R(p).X_{réelle}(p)$
$= R(p).(X_{cons}(p) - X_{réelle}(p)) = R(p).ER(p)$

L'erreur $er(t)$ et l'écart $\varepsilon(t)$ sont toutefois proportionnels et les considérations qualitatives sur l'évolution de l'erreur peuvent être obtenues par analyse de **l'écart relatif** :

$$er_{\%} = \frac{x_{cons}(t) - x_{réelle}(t)}{x_{cons}(t)} = \frac{u_c(t) - u_{mes}(t)}{u_c(t)} = \varepsilon_{\%}$$

Par ailleurs, le schéma-blocs précédent peut toujours être ramené à un schéma-blocs à retour unitaire par déplacement de *R(p)*,



Et finalement,

1.3. Précision en poursuite et en régulation

L'erreur dynamique correspond à l'évolution temporelle de $e_r(t)$. L'erreur statique est la limite de $er(t)$ lorsque t tend vers l'infini : $er_{stat} = \lim\limits_{t \to +\infty} er(t)$ soit en utilisant le théorème de la valeur finale :

$$er_{stat} = \lim_{t \to +\infty} er(t) = \lim_{p \to 0} \mathbf{p}.ER(p)$$

L'objectif pour obtenir un système précis est d'annuler l'erreur statique ce qui amène à traiter deux types de problèmes :

- l'entrée **consigne** varie au cours du temps : minimiser l'erreur e_r lorsque l'entrée du système varie c'est résoudre un problème de **poursuite** ou asservissement ;
- le système subit des **perturbations** : minimiser l'erreur e_r, malgré l'existence de ces perturbations, c'est résoudre un problème de **régulation**.

1.4. Expression générale de l'erreur statique pour une entrée en consigne $e_{cons}(t)$ et une entrée en perturbation $e_{pert}(t)$:

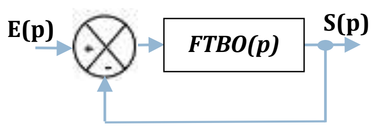
$$er_{stat} = \lim_{t \to +\infty} er(t) = \lim_{p \to 0} \mathbf{p}.ER(p) = \lim_{p \to 0} \mathbf{p}.[E_{cons}(p) - S(p)]$$

$$avec\ S(p) = E_{cons}(p).\left(\left.\frac{\mathrm{S}(p)}{\mathrm{E}(p)}\right|_{E_{pert}=0}\right) + E_{pert}(p).\left(\left.\frac{\mathrm{S}(p)}{\mathrm{E}(p)}\right|_{E_{cons}=0}\right)$$

$$er_{stat} = \lim_{p \to 0} \mathbf{p}.\left[E_{cons}(p) - E_{cons}(p).\left(\left.\frac{\mathrm{S}(p)}{\mathrm{E}(p)}\right|_{E_{pert}=0}\right) - E_{pert}(p).\left(\left.\frac{\mathrm{S}(p)}{\mathrm{E}(p)}\right|_{E_{cons}=0}\right)\right]$$

2. DÉTERMINATION DE LA PRÉCISION POUR UN FONCTIONNEMENT EN POURSUITE (CONSIGNE)

Pour déterminer la précision pour ce type de problème, on se placera donc dans le cas d'un système bouclé à retour unitaire. L'erreur $e_r(t)$ et l'écart $\varepsilon(t)$ sont alors égaux.



$$FTBO(p) = \frac{S(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{K_{BO}.(1 + b_1.p + \cdots + b_m.p^m)}{p^\alpha.(1 + a_1.p + \cdots + a_n.p^{n-\alpha})} = \frac{K_{BO}}{p^\alpha}.\frac{N(p)}{D(p)}$$

$$\text{avec} \begin{cases} \alpha : \text{classe du système} \\ n : \text{ordre du système} \\ K_{BO} : \text{gain statique} \end{cases} \qquad par\ ailleurs,\ \lim_{p \to 0} \frac{N(p)}{D(p)} = 1$$

L'écart $\varepsilon(p)$ s'exprime :

$$ER(p) = \varepsilon(p) = E(p) - S(p) = E(p) - FTBO(p).\varepsilon(p) \implies \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}$$

L'erreur statique se calcule en utilisant le théorème de la valeur finale :

$$er_{stat} = \lim_{p \to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p.E(p).\frac{1}{1 + FTBO(p)} \implies e_{r\,stat} = \lim_{p \to 0} p.E(p).\frac{1}{1 + \frac{K_{BO}}{p^\alpha}.\underbrace{\frac{N(p)}{D(p)}}_{1}}$$

2.1. Erreur de position ou indicielle

L'entrée est alors un échelon $e(t) = a.u(t) \implies E(p) = \frac{a}{p}$

$$\implies er_{stat} = \lim_{p \to 0} p.\left(\frac{a}{p}.\frac{1}{1+\frac{K_{BO}}{p^\alpha}.\frac{N(p)}{D(p)}}\right) \implies \boxed{e_{r\,stat} = \lim_{p \to 0} \frac{a}{1+\frac{K_{BO}}{p^\alpha}}}$$

- Pour un système de classe 0 $(\alpha = 0)$: $er_{stat} =$

- Pour un système de classe 1 ou + $(\alpha \geq 1)$: $er_{stat} =$

2.2. Erreur de vitesse, de traînage ou de poursuite

L'entrée est alors une rampe $e(t) = a.t.u(t) \implies E(p) = \frac{a}{p^2}$

$$\implies er_{stat} = \lim_{p \to 0} p.\frac{a}{p^2}.\frac{1}{1+\frac{K_{BO}}{p^\alpha}.\frac{N(p)}{D(p)}} \implies \boxed{er_{stat} = \lim_{p \to 0} \frac{a}{p}.\frac{1}{1+\frac{K_{BO}}{p^\alpha}}}$$

- Pour un système de classe 0 $(\alpha = 0)$: $er_{stat} =$

- Pour un système de classe 1 $(\alpha = 1)$: $er_{stat} =$

- Pour un système de classe 2 ou + $(\alpha \geq 2)$: $er_{stat} =$

2.3. Erreur en accélération

L'entrée est alors une parabole $e(t) = a.\frac{t^2}{2}.u(t) \implies E(p) = \frac{a}{p^3}$

$$\implies e_{r\,stat} = \lim_{p \to 0} p.\frac{a}{p^3}.\frac{1}{1+\frac{K_{BO}}{p^\alpha}.\frac{N(p)}{D(p)}} \implies \boxed{e_{r\,stat} = \lim_{p \to 0} \frac{a}{p^2}.\frac{1}{1+\frac{K_{BO}}{p^\alpha}}}$$

- Pour un système de classe 0 $(\alpha = 0)$: $er_{stat} =$

- Pour un système de classe 1 $(\alpha = 1)$: $er_{stat} =$

- Pour un système de classe 2 $(\alpha = 2)$: $er_{stat} =$

2.4. Bilan sur la précision pour un fonctionnement en poursuite à partir de la FTBO

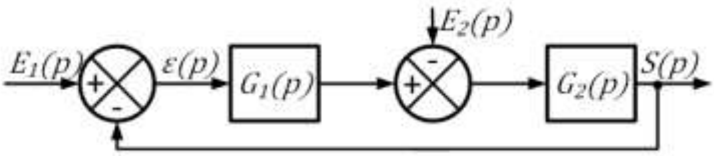
	FTBO de classe 0 ($\alpha = 0$)	FTBO de classe 1 ($\alpha = 1$)	FTBO de classe 2 ($\alpha = 2$)
Forme de la FTBO	$FTBO(p) = K_{BO}.\frac{N(p)}{D(p)}$	$FTBO(p) = \frac{K_{BO}}{p^1}.\frac{N(p)}{D(p)}$	$FTBO(p) = \frac{K_{BO}}{p^2}.\frac{N(p)}{D(p)}$
Erreur de position (classe 1)	$er_{stat} = \frac{a}{1 + K_{BO}}$	$er_{stat} = 0$	$er_{stat} = 0$
Erreur de traînage ou erreur de vitesse (classe 2)	$er_{stat} = +\infty$	$er_{stat} = \frac{a}{K_{BO}}$	$er_{stat} = 0$
Erreur en accélération (classe 3)	$er_{stat} = +\infty$	$er_{stat} = +\infty$	$er_{stat} = \frac{a}{K_{BO}}$
Commentaires	0 intégration : système peu précis mais stable	1 intégration : précision acceptable et stabilité moyenne	2 intégrations : système très précis mais risque d'instabilité – délicat à stabiliser

Au concours les résultats synthétisés dans le tableau précédent peuvent être utilisés sans démonstration. Il faut donc connaître par cœur ce tableau.

- Plus le nombre d'intégrateur est grand (plus la classe du système est importante) plus la précision est bonne. Si l'erreur n'est pas nulle il est possible d'ajouter dans le système un ou plusieurs intégrateurs (correcteur intégral).
- Si l'erreur n'est ni infinie ni nulle, l'erreur sera d'autant plus petite que le gain statique K_{BO} de la FTBO sera grand. Il est donc possible d'ajouter dans le système un gain pour minimiser l'erreur (correcteur proportionnel).

3. DÉTERMINATION DE LA PRÉCISION POUR UN FONCTIONNEMENT EN RÉGULATION (PERTURBATION)

Pour déterminer la précision pour ce type de problème, on se place dans le cas d'un système bouclé avec un retour unitaire avec une perturbation placée après la fonction $G_1(p)$. L'erreur $er(t)$ et l'écart $\varepsilon(t)$ sont, à nouveau, égaux.



La superposition permet d'obtenir la fonction de transfert boucle fermée du système multi-variables :

$$S(p) = \frac{G_1(p).G_2(p)}{1 + G_1(p).G_2(p)}.E_1(p) - \frac{G_2(p)}{1 + G_1(p).G_2(p)}.E_2(p)$$

Pour se placer dans le cas général, on utilise des fonctions de transfert $G_1(p)$ et $G_2(p)$ écrites sous forme canonique :

$$\begin{cases} G_1(p) = \dfrac{K_1}{p^{\alpha_1}}.\dfrac{N_1(p)}{D_1(p)}, & K_1 \ est\ le\ gain\ de\ G_1(p) \\ G_2(p) = \dfrac{K_2}{p^{\alpha_2}}.\dfrac{N_2(p)}{D_2(p)}, & K_2\ est\ le\ gain\ de\ G_2(p) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \lim_{p\to 0} \frac{N_i(p)}{D_i(p)} = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_i \in \mathbb{N}^+$$

L'écart $\varepsilon(p)$ s'exprime : $\varepsilon(p) = E_1(p) - S(p) = E_1(p) - \frac{G_1(p).G_2(p)}{1+G_1(p).G_2(p)}.E_1(p) + \frac{G_2(p)}{1+G_1(p).G_2(p)}.E_2(p)$

$$\Longrightarrow\ \varepsilon(p) = \frac{1}{1+G_1(p).G_2(p)}.E_1(p) + \frac{G_2(p)}{1+G_1(p).G_2(p)}.E_2(p)$$

Le terme de l'erreur qui dépend de $E_1(p)$ correspond à l'erreur en poursuite et est étudié au paragraphe précédent. Le terme de l'erreur qui dépend de $E_2(p)$ correspond à l'erreur en régulation. On utilise le théorème de superposition qui permet d'étudier les 2 erreurs séparément qui seront ensuite sommées (dans le domaine temporel).

L'erreur statique en régulation se calcule en utilisant le théorème de la valeur finale avec $E_1(p) = 0$:

$$er_{stat(rég)} = \lim_{p\to 0} p.E_2(p).\frac{\dfrac{K_2}{p^{\alpha_2}}.\dfrac{N_2(p)}{D_2(p)}}{1+\dfrac{K_1}{p^{\alpha_1}}.\dfrac{N_1(p)}{D_1(p)}.\dfrac{K_2}{p^{\alpha_2}}.\dfrac{N_2(p)}{D_2(p)}} \ \Longrightarrow\ er_{stat(rég)} = \lim_{p\to 0} p.E_2(p).\frac{K_2.p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1+\alpha_2}+K_1.K_2}$$

Si on considère que la fonction de transfert de la perturbation est du type $E_2(p) = \frac{a}{p^q}$ alors :

$$er_{stat(rég)} = \lim_{p\to 0} \frac{a}{p^{q-1}}.\frac{K_2.p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1+\alpha_2}+K_1.K_2}$$

3.1. Cas où $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ autrement dit $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Pour $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, l'erreur en régulation est : $er_{stat(rég)} = \lim_{p\to 0} \frac{a}{p^{q-1}}.\frac{K_2}{1+K_1.K_2}$:

- $q = 1\ \ si\ \ E_2(p) = \frac{a}{p}$ (perturbation en échelon) $\Longrightarrow\ er_{stat(rég)} =$

- Si $q > 1$, $(rampe, parabole, \dots)$ $\quad \Longrightarrow er_{stat(rég)} =$

3.2. Cas où $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$

Pour $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, $p^{\alpha_1+\alpha_2}$ est négligeable devant $K_1.K_2 \rightarrow er_{stat(rég)} = \lim_{p\to 0} \frac{a}{p^{q-1}}.\frac{K_2.p^{\alpha_1}}{K_1.K_2} = \lim_{p\to 0} \frac{a}{K_1}.p^{\alpha_1+1-q}$

$er_{stat(rég)}$ est donc indépendant de α_2. Un éventuel intégrateur dans $G_2(p)$, donc après la perturbation, n'a donc aucune d'influence sur la précision vis-à-vis de la perturbation :

- Si $\alpha_1 > q - 1$ (le nombre d'intégrateur de $G_1(p)$, **avant la perturbation**, est supérieur ou égal à la classe de la perturbation) alors l'erreur est nulle : $er_{stat(rég)} =$

- Si $\alpha_1 = q - 1$ alors l'erreur statique est non nulle et vaut $er_{stat(rég)} =$

- Si $\alpha_1 < q - 1$ (le nombre d'intégrateur avant la perturbation est inférieur à la classe de la perturbation) alors l'erreur est infinie : $er_{stat(rég)} =$

Dans le cas où la perturbation est modélisée par **un échelon**, alors :

- s'il n'y a pas d'intégrateur dans la boucle ouverte en amont de la perturbation (donc dans ***G₁(p)***), la perturbation provoque une erreur en régulation constante (il faut augmenter le gain en amont de la perturbation pour réduire cette erreur) ;
- s'il y a un intégrateur dans la boucle ouverte en amont de la perturbation, l'erreur en régulation est nulle ;
- Un éventuel intégrateur après la perturbation (donc dans $G_2(p)$) n'a aucune influence vis-à-vis de celle-ci.

Remarque 1 : Il faudra au moins deux intégrateurs en amont du point d'application de la perturbation (donc $\boldsymbol{G_1(p)}$ de classe 2) pour annuler l'effet d'une perturbation de type rampe (type classe 2).

Remarque 2 : L'erreur est nulle si la perturbation et $\boldsymbol{G_1(p)}$ sont de même classe.

Remarque 3 : Le calcul de l'erreur due à la perturbation se fera par utilisation du théorème de la valeur finale car il n'y a pas de tableau aisé à utiliser.

4. CONCLUSION

Dans tous les cas de figure, on a remarqué que des intégrateurs sont nécessaires dans la boucle pour annuler l'erreur $er(t)$. Si le système à commander n'en possède pas (ou pas assez), on peut les apporter avec un correcteur.

Cela semble donc facile d'obtenir un système bouclé précis.

Cependant, il ne faut pas perdre de vue qu'il faut aussi et surtout que le système bouclé soit stable. Or l'effet d'un intégrateur sur la phase de la FTBO sera d'apporter $-90°$ quelle que soit la valeur de ω. On peut se douter que perdre 90° aura forcément un effet négatif sur la marge de phase M_φ (qui pourra même devenir négative) et donc sur la stabilité.

Pour un automaticien, il faudra faire **un compromis entre la stabilité** (ou plutôt les marges de stabilité) **et la précision**.

5. PRÉCISIONS SUR LA PRÉCISION

Expression générale de l'erreur statique pour une entrée en consigne $\boldsymbol{e_{cons}(t)}$ et une entrée en perturbation $\boldsymbol{e_{pert}(t)}$:

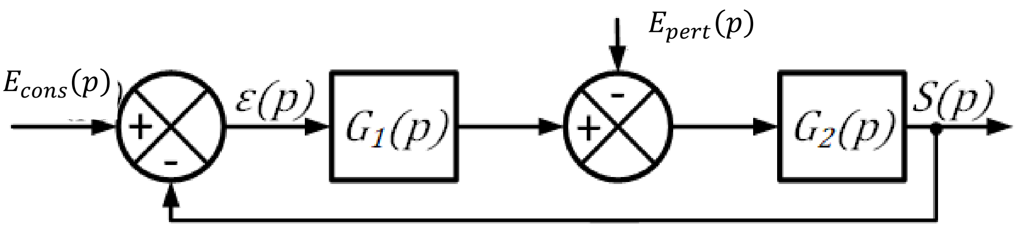
$$er_{stat} = \lim_{t\to+\infty} er(t) = \lim_{p\to 0} \boldsymbol{p}.ER(p) = \lim_{p\to 0} \boldsymbol{p}.[E_{cons}(p) - S(p)]$$

Et on veut pour t grand que $S(p)$ soit égale à $E_{cons}(p)$ pour un asservissement.

$$avec\ S(p) = E_{cons}(p).\left(\left.\frac{S(\boldsymbol{p})}{E_{cons}(\boldsymbol{p})}\right|_{E_{pert}=0}\right) + E_{pert}(p).\left(\left.\frac{S(\boldsymbol{p})}{E_{pert}(\boldsymbol{p})}\right|_{E_{cons}=0}\right)$$

$$er_{stat} = \lim_{p\to 0} \boldsymbol{p}.\left[E_{cons}(p) - E_{cons}(p).\left(\left.\frac{S(\boldsymbol{p})}{E_{cons}(\boldsymbol{p})}\right|_{E_{pert}=0}\right) - E_{pert}(p).\left(\left.\frac{S(\boldsymbol{p})}{E_{pert}(\boldsymbol{p})}\right|_{E_{cons}=0}\right)\right]$$

Exemple :



$$S(p) = \underbrace{\frac{G_1(p).G_2(p)}{1 + G_1(p).G_2(p)}}_{\left.\frac{S(p)}{E_{cons}(p)}\right|_{E_{pert}=0}} .E_{cons}(p) - \underbrace{\frac{G_2(p)}{1 + G_1(p).G_2(p)}}_{\left.\frac{S(p)}{E_{pert}(p)}\right|_{E_{cons}=0}} .E_{pert}(p)$$

Calcul des fonctions $\left.\frac{S(p)}{E_{cons}(p)}\right|_{E_{pert}=0}$ et $\left.\frac{S(p)}{E_{pert}(p)}\right|_{E_{cons}=0}$ **par superposition**

Les FT en poursuite et en régulation ont toujours le même dénominateur.

- $\left.\frac{S(p)}{E_{cons}(p)}\right|_{E_{pert}=0} = \frac{G_1(p).G_2(p)}{1+G_1(p).G_2(p)}$ (calcul classique). C'est la FT en poursuite.

- $\left.\frac{S(p)}{E_{pert}(p)}\right|_{E_{cons}=0} = -\frac{G_2(p)}{1+G_1(p).G_2(p)}$ C'est la FT en régulation.

(attention, les deux sommateurs sont alors en série … le premier sommateur agit comme un gain de valeur -1 qui sera renvoyé dans le second sommateur).