C16.3 - Evaluation des performances des systèmes asservis modélisés en SLCI Exigence de Rapidité

Compétences principales attendues

Connaître la définition du temps de réponse à n % ($t_{n\%}$) ;

Savoir déterminer graphiquement $t_{5\%}$ pour une sortie *s(t)* quelconque ;

Connaître les constructions graphiques et relations pour déterminer $t_{5\%} = 3.\tau$ d'un premier ordre ;

Connaître les constructions graphiques et abaques pour déterminer $t_{5\%}$ d'un second ordre ;

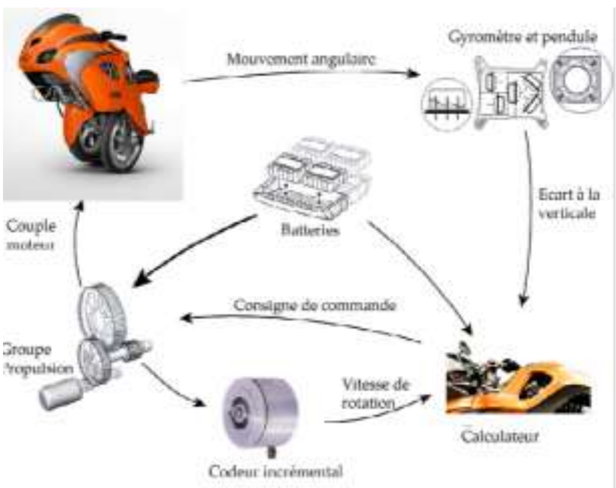
Savoir pour un **second ordre** que le temps de réponse mini correspond au point $\boxed{t_{5\%}.\omega_0 = 3 \text{ pour } z \approx 0{,}7}$ de l'abaque.

Le support pour ce cours est le scooter Uno III.

Uno III mode auto-balancé

Uno III en mode 2 roues

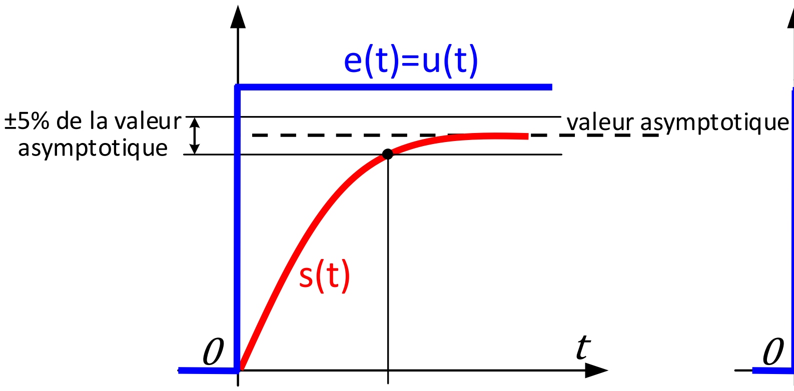
L'objectif de cours est d'indiquer les éléments intervenant sur la rapidité des systèmes ainsi que les outils permettant de l'évaluer (indépendamment des autres critères).

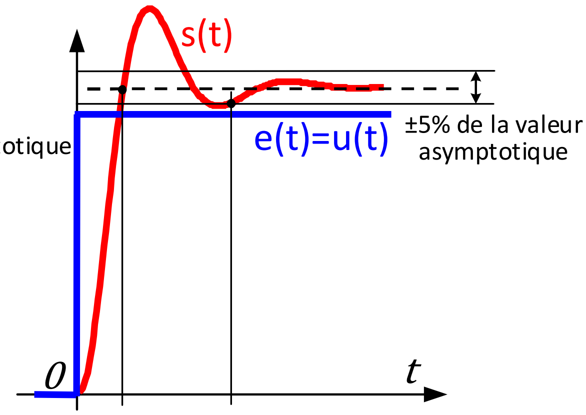


1. RAPIDITÉ – DÉFINITION – CAS GÉNÉRAL

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée. Cependant, la valeur finale étant le plus souvent atteinte de manière asymptotique, on retient alors comme principal critère d'évaluation de la rapidité d'un système, le temps de réponse à n % (classiquement 5%)

Par définition, quel que soit l'ordre du système, le temps de réponse à 5% ($\boldsymbol{t_{5\%}}$), c'est le temps mis par le système, *sollicité par un échelon*, pour atteindre sa valeur de régime permanent à $\pm 5\%$ près et y rester.





Plus le temps de réponse est faible et plus le système est rapide.

Pour les systèmes oscillants on définit aussi le temps de montée t_m (ou temps de raideur) qui correspond au temps au bout duquel la réponse passe pour la première fois par sa valeur finale.

2. INFLUENCE DE L'ORDRE SUR LA RAPIDITÉ

2.1. Système du 1er ordre

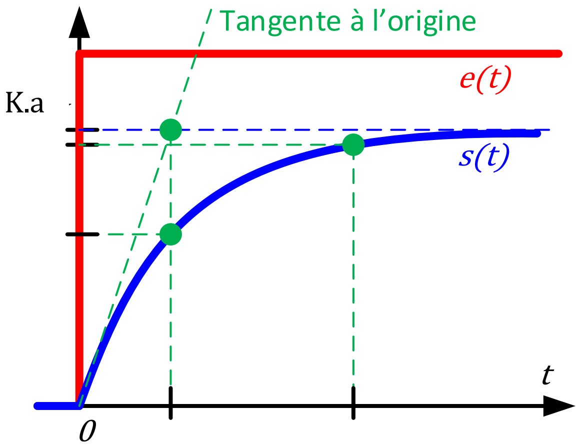
Pour une entrée échelon unitaire $e(t) = a.u(t)$, la réponse temporelle a pour expression :

$$s(t) = K.a.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).u(t)$$

Le temps de réponse à 5%, $t_{5\%}$ correspond à 3 fois la constante de temps τ :

$$\boxed{t_{5\%} = 3.\tau}$$

Plus la constante de temps est petite plus le système est rapide.



Or, pour un 1er ordre, sur le diagramme de Bode du gain, la cassure a lieu pour $\omega_{ca} = \frac{1}{\tau}$.

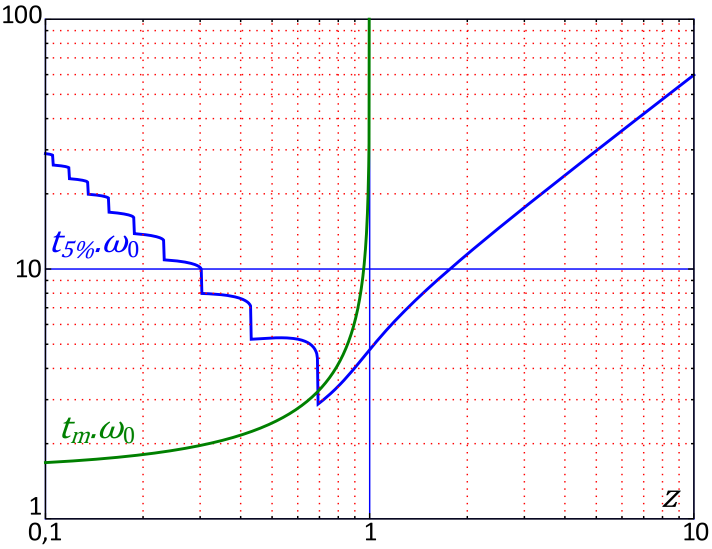
On en déduit que plus τ *est petite*, plus le système système a une bande passante importante.

Nous avons déjà évoqué le lien entre bande passante et rapidité.

2.2. Système du 2nd ordre

Dans le cas du système du 2nd ordre, il n'existe pas de formule simple pour calculer le temps de réponse à 5% car il dépend de la valeur du facteur d'amortissement z et de la pulsation propre non amortie du système ω_0.

On utilise l'abaque ci-contre qui donne la valeur du temps de réponse réduit $t_{5\%}.\omega_0$ en fonction du facteur d'amortissement z ainsi que la valeur du temps de montée réduit $t_m.\omega_0$ en fonction du coefficient d'amortissement z.



Le temps de réponse minimum est obtenu pour un dépassement relatif de 5% :

$$D_1 = e^{\frac{-z\pi}{\sqrt{1-z^2}}} = 0{,}05$$

ce qui correspond à un coefficient d'amortissement de $z = 0{,}69 \approx 0{,}7$:

$$\boxed{t_{5\%}.\omega_0 = 3 \text{ pour } z \approx 0{,}7}$$

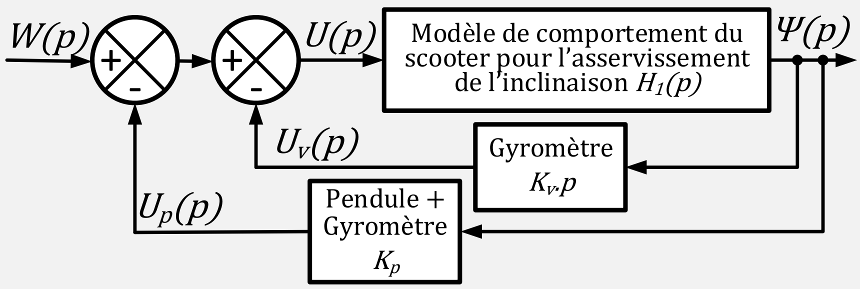
Pour une même pulsation propre non amortie ω_0 et :

- pour (amortissement faible), les oscillations sont mal amorties et le temps de réponse est grand.
- pour , le système présente un dépassement ***D* faible ($D_1 = 5\%$) avec le temps de réponse le plus faible**.
- pour , le système présente le **temps de réponse le plus faible pour une réponse sans dépassement**.
- pour , il n'y a pas de dépassement mais le système est hyper amorti donc le temps de réponse est très grand.

Pour un même facteur d'amortissement z, plus $\boldsymbol{\omega_0}$ **augmente plus le temps de réponse à 5% diminue,** donc plus le système est rapide.

Exemple de la chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto balancé :

Afin de stabiliser l'inclinaison du scooter, le système élabore la grandeur de commande, $u(t)$ à partir des mesures de $\dot{\Psi}(t)$ (réalisée par le gyromètre) et de $\Psi(t)$ (réalisée par combinaison de la mesure du gyromètre et du pendule).



Le modèle de comportement du système mécanique de fonction de transfert $H_1(p)$ est connu :

$$H_1(p) = \frac{\Psi(p)}{U(p)} = \frac{K_1}{1/{\omega_1}^2.p^2 - 1} \qquad \begin{cases} K_1 \text{ gain du système mécanique } (K_1 = 0{,}24\ rad/V) \\ \omega_1 \text{ pulsation propre du système mécanique } (\omega_1 = 4{,}1\ rad/s) \end{cases}$$

On voit que H_1 présente un pôle réel positif. Sans surprise, le scooter UNO III est naturellement instable. Notons que H_1 n'est pas un 2nd ordre.

On souhaite déterminer les gains K_v et K_p qui permettent d'obtenir pour $H_2(p) = \frac{\Psi(p)}{W(p)} = \frac{K_2}{\frac{1}{\omega_2{}^2}.p^2+\frac{2.z_2}{\omega_2}.p+1}$:

- un système stable ;
- le temps de réponse à 5% du système le plus rapide possible pour une pulsation propre $\omega_2 = 6{,}15\ rad/s$ (la pulsation ω_2 est choisie proche de celle du système mécanique, on prend $\omega_2 = 1{,}5.\ \omega_1 = 6{,}15\ rad/s$).

Pour étudier la réponse du système il faut d'abord déterminer sa FTBF qui, tous calculs faits et présentée sous forme canonique, s'écrit :

$$H_2(p) = \frac{\Psi(p)}{W(p)} = \frac{\frac{K_1}{K_p.K_1-1}}{\frac{1}{(K_p.K_1-1).\omega_1{}^2}.p^2+\frac{K_1.K_v}{K_p.K_1-1}.p+1} = \frac{K_2}{\frac{1}{\omega_2{}^2}.p^2+\frac{2.z_2}{\omega_2}.p+1}$$

$$\begin{cases} K_2 = \dfrac{K_1}{K_p.K_1-1} \\ \omega_2 = \sqrt{K_p.K_1-1}.\omega_1 \\ z_2 = \dfrac{1}{2}.K_1.\dfrac{K_v.\omega_1}{\sqrt{K_p.K_1-1}} \end{cases}$$

Cherchons à déterminer K_v puis K_p :

$$\text{Si } \omega_2 = 1{,}5.\omega_1 \text{ alors } \frac{\omega_2}{\omega_1} = 1{,}5 = \sqrt{K_pK_1-1} \implies K_p = \frac{1{,}5^2+1}{K_1} = \frac{1{,}5^2+1}{0{,}24} = 13{,}5\ V/rad$$

Cette valeur de K_p est acceptable (non excessive) pour un capteur, on peut donc la valider.

Le temps de réponse le plus rapide pour un système du 2nd ordre est obtenu pour $z_2 \approx 0{,}7$

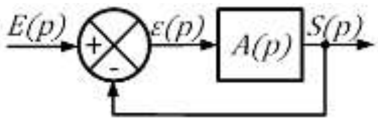
$$z_2 = \frac{1}{2}\frac{K_1.K_v.\omega_1}{\sqrt{K_p.K_1-1}} = 0{,}7 \implies K_v = \frac{2.0{,}7.\sqrt{K_pK_1-1}}{K_1\omega_1} = \frac{1{,}4.\sqrt{13{,}5\times 0{,}24-1}}{0{,}24\times 4{,}1} = 2{,}15\ rad/V$$

Cette valeur de K_v est acceptable.

Le temps de réponse réduit pour $z_2 \approx 0{,}7$ est $t_{5\%}.\omega_2 \approx 3 \implies t_{5\%} = \frac{3}{\omega_2} = \frac{3}{6{,}15} = 0{,}49\ s$.

Il doit être conforme au diagramme d'exigence.

3. INFLUENCE DU BOUCLAGE SUR LA RAPIDITÉ



Un système asservi peut toujours être mis sous la forme d'un système à retour unitaire si l'entrée $E(p)$ et la sortie $S(p)$ sont comparables (même dimension). L'avantage pratique du bouclage est qu'il permet de modifier facilement les caractéristiques du système.

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)}$$

3.1. Bouclage d'un système dont la FTBO est du 1^er^ ordre

Dans le cas d'un système dont la FTBO est $A(p) = \dfrac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}.p}$. Après bouclage on obtient :

$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{\dfrac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}.p}}{1 + \dfrac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}.p}} = \frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}.p + K_{BO}} = \frac{\dfrac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}}{1 + \dfrac{\tau_{BO}}{1 + K_{BO}}p}$$

$$= \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF}.p} \text{ avec } \boxed{K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}} \; et \; \boxed{\tau_{BF} = \frac{\tau_{BO}}{1 + K_{BO}}}$$

Le bouclage d'un système ayant une FTBO du 1er ordre permet :

- de conserver l'ordre du système en obtenant une FTBF du 1er ordre,
- de diminuer la valeur de la constante de temps τ_{BF} du système, ce qui permet d'obtenir un temps de réponse plus faible lorsque l'on augmente le gain K_{BO} de la FTBO

Remarque sur la stabilité : Il n'y a pas de problème de stabilité puisque c'est un 1^er^ ordre.

Remarque sur la rapidité : l'augmentation du gain K_{BO} de la FTBO améliore la rapidité. Par ailleurs, on voit que pour un 1^er^ ordre, il y a un **lien entre la bande passante** de la FTBO, de la FTB **et le temps de réponse** à 5 %, $t_{5\%} = 3.\tau_{BF}$.

Nous **généraliserons** ce lien **à tous les systèmes** quelque soit leur ordre. Dans les énoncés de concours, l'exigence de **rapidité** utilise souvent un **critère de bande passante au gain unité** !

3.2. Bouclage d'un système dont la FTBO est du 2ème ordre

Dans le cas d'un système dont la FTBO est $A(p) = \dfrac{K_{BO}}{1 + 2.\dfrac{z}{\omega_0}.p + \dfrac{1}{\omega_0^2}.p^2}$. Après bouclage on obtient :

$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{\dfrac{K_{BO}}{1+K_{BO}}}{1 + \dfrac{2z}{(1+K_{BO}).\omega_0}.p + \dfrac{1}{(1+K_{BO}).\omega_0^2}.p^2} = \frac{K_{BF}}{1 + \dfrac{2z_{BF}}{\omega_{0_{BF}}}.p + \dfrac{1}{\omega_{0_{BF}}^2}.p^2}$$

$$\text{avec} \begin{cases} K_{BF} = \dfrac{K_{BO}}{1+K_{BO}} \\ \omega_{0_{BF}} = \sqrt{1+K_{BO}}.\omega_0 \\ z_{BF} = \dfrac{z}{\sqrt{1+K_{BO}}} \end{cases}$$

Le bouclage d'un système ayant une FTBO du 2ème ordre :

- permet de conserver l'ordre du système en obtenant une FTBF du 2ème ordre,
- augmente la valeur de la pulsation propre non amortie du système lorsque l'on augmente le gain K_{BO} de la FTBO,
- diminue la valeur du facteur d'amortissement z_{BF} lorsque l'on augmente le gain K_{BO} de la FTBO.

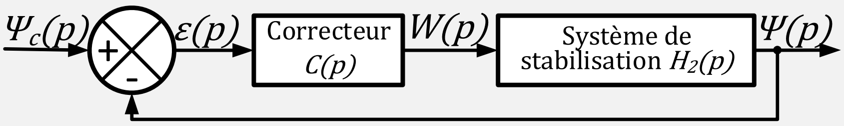
Par conséquent :

- si z_{BF} reste supérieur à 0,7, le système sera plus rapide,
- si z_{BF} est inférieur à 0,7, le temps de montée t_m sera plus faible mais le temps de réponse $t_{5\%}$ ne sera pas forcément meilleur car le régime transitoire comportera d'avantage d'oscillations.

Application sur la chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto-balancé :

La consigne de la régulation de l'inclinaison du châssis $\Psi(t)$ par rapport à la verticale est notée $\Psi_c(t)$. Sur le système il existe un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ qui élabore le signal $w(t)$ (de transformée de Laplace $W(p)$) à partir de l'écart :

$$\varepsilon(t) = \Psi_c(t) - \Psi(t)$$



On prend $\boldsymbol{C(p) = K_c}$ *(correcteur proportionnel)*

$$et\ H_2(p) = \frac{K_2}{\dfrac{p^2}{{\omega_2}^2} + \dfrac{2.z_2.p}{\omega_2} + 1} \quad \text{avec} \begin{cases} K_2 = 0{,}107\ rad/V \\ \omega_2 = 6{,}15\ rad/s \\ z_2 = 0{,}7 \end{cases}$$

Alors, $FTBO_{co}(p) = K_c.H_2(p) = \dfrac{K_c.K_2}{1 + 2.\dfrac{z_2}{\omega_2}.p + \dfrac{1}{\omega_2^2}.p^2} = \dfrac{0{,}107.K_c}{1 + 0{,}23.p + 0{,}0264.p^2}$

A partir de la $FTBO_{co}(p)$, on peut calculer la FTBF :

$$H_4(p) = FTBF\ (p) = \frac{\Psi(p)}{\Psi_c(p)} = \frac{\dfrac{K_c.K_2}{1 + 2.\dfrac{z_2}{\omega_2}.p + \dfrac{1}{\omega_2^2}.p^2}}{1 + \dfrac{K_c.K_2}{1 + 2.\dfrac{z_2}{\omega_2}.p + \dfrac{1}{\omega_2^2}.p^2}} = \frac{\dfrac{K_c.K_2}{1+K_c.K_2}}{1 + 2.\dfrac{z_2}{(1+K_c.K_2).\omega_2}.p + \dfrac{1}{(1+K_c.K_2).\omega_2^2}.p^2}$$

$$H_4(p) = \frac{K_{BF}}{1 + 2.\frac{z_{BF}}{\omega_{BF0}}.p + \frac{1}{\omega_{BF0}^2}.p^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_{BF} = \frac{K_c.K_2}{1 + K_c.K_2} \\ \omega_{BF0} = \sqrt{(1 + K_c.K_2)}.\omega_2 \\ z_{BF} = \frac{z_2}{\sqrt{(1 + K_c.K_2)}} \end{cases}$$

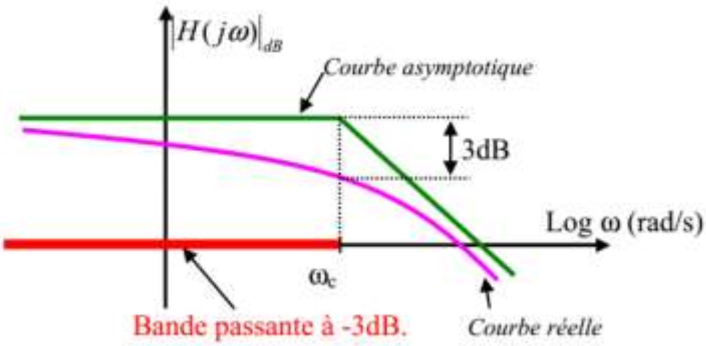
On constate bien que l'ordre du système est conservé *pour une correction proportionnelle*.

Conclusion : L'augmentation du gain K_c diminue le facteur d'amortissement z_{BF} de la FTBF. Cependant comme $z_2 = 0{,}7$ on obtient $z_{BF} < 0{,}7$ et le système aura un temps de réponse à 5% moins bon après bouclage.

4. REMARQUES

Remarque 1 : Influence de la bande passante de la FTBF sur la rapidité

La bande passante à $-n\,dB$ correspond à la bande de pulsation où le gain est supérieur au gain asymptotique en régime statique moins n décibels. Pour le système du 1er ordre défini sur la figure de droite, on a par exemple défini la bande passante à $-3\,dB$. On parle de filtre passe bas car la bande passante à $-3\,dB$ se situe dans les zones de basse fréquence.



On montre que plus la bande passante de la FTBF du système est importante plus le système sera rapide.

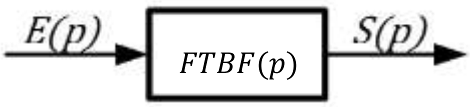
On montre aussi que la bande passante à $-3\,dB$ de la FTBF ($BP_{FTBF(-3dB)}$) est pratiquement égale à la pulsation de coupure de la FTBO : $BP_{FTBF(-3dB)} \approx \omega_{co(FTBO)}$

En concours, pour l'exigence de rapidité, on utilise souvent un critère fondé sur la bande passante de la FTBO.

Remarque 2 : Influence des pôles dominants de la FTBF sur l'étude de la rapidité

La réponse *s(t)* d'un SLCI dépend des pôles de sa fonction de transfert $FTBF(p)$. L'écriture en pôle donne :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{(p-p_1).(p-p_2)\ldots(p-p_i)\ldots(p-p_n)}$$



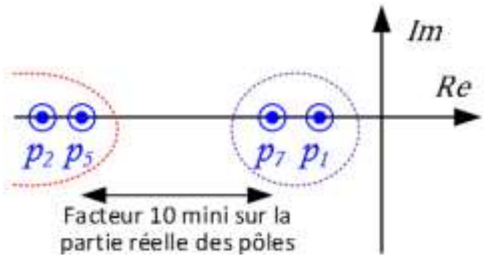
Avec $N(p)$: numérateur de $FTBF(p)$, p_i ses pôles et n son ordre.

Si l'on sollicite ce système avec une impulsion de Dirac en entrée ($E(p) = 1$), la sortie $S(p)$ a pour expression dans le domaine de Laplace $S(p) = \frac{N(p)}{(p-p_1).(p-p_2)\ldots(p-p_i)\ldots(p-p_n)}$

Ce qui donne $S(p) = \frac{A}{(p-p_1)} + \frac{A_2}{(p-p_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(p-p_n)}$ après décomposition en éléments simples.

La transformation inverse permet ensuite d'obtenir la réponse temporelle qui a donc expression :

$$S(t) = \underbrace{A_1.e^{p_1.t}}_{Mode\ 1} + \underbrace{A_2.e^{p_2.t}}_{Mode\ 2} + \cdots + \underbrace{A_n.e^{p_n.t}}_{Mode\ n}$$



On constate ainsi que la réponse $s(t)$ du système correspond à une superposition de n modes qui dépendent des pôles de la FTBF.

Plus un pôle aura une partie réelle grande (comme p_7 et p_1) et plus il influencera la réponse globale du système. Au contraire, plus un pôle aura une partie réelle petite (très négative) et plus il sera rapidement amorti et influencera peu la réponse globale du système et en particulier sa rapidité.

Par conséquent, lorsque l'on étudie un système, on peut se contenter de ne prendre en compte que les **pôles dominants** qui permettent d'obtenir un modèle mathématique (**modèle de comportement**) plus simple à manipuler et qui reflète suffisamment les caractéristiques principales du système.

Cela correspondrait à une réduction de l'ordre de l'équation différentielle temporelle du système (les grands ordres sont négligeables … et donc négligés).