

TD 2 Grandeurs physiques

1. Calcul intégral de base

Vu en cours

2. VAG (Véhicule autoguidé, suite du TD 1-1) : grandeurs physiques

▪ Phase 1 : Avancement à vitesse variable $t_0 \leq t \leq t_1 = 4 \text{ s}$

Q2.1. Calculer le temps t_1 nécessaire pour que le VAG atteigne la vitesse v_1 .

On sait que $\ddot{x}(t) = \frac{dv(t)}{dt}$. Or, en phase 1, l'accélération est constante $\ddot{x}(t) = \ddot{x}_1$ (fig 9 : pente unique de la vitesse en phase 1). Les dérivées peuvent être remplacées par des accroissements :

$$\ddot{x}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \ddot{x}_1 = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$$

$$\text{Alors, } t_1 = \frac{v_1}{\ddot{x}_1} \Rightarrow t_1 = 2,4 \text{ s}$$

Q2.2. Calculer alors la position x_1 du VAG.

$$\text{On a aussi, } \int_{t_0}^{t_1} dx(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t).dt \Leftrightarrow x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v(t).dt \quad (1)$$

Mais pour calculer cette intégrale, il faut connaître la fonction v en phase 1.

Dans notre cas, c'est simple (fig 9), on peut affirmer que $v(t) = \ddot{x}_1 \cdot t$. Pensez bien à exploiter les données, figures, tableaux, ... de l'énoncé.

$$\text{Sinon, on utilisera } \int_{t_0}^t dv(t) = \int_{t_0}^t \ddot{x}(t).dt \Rightarrow v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t \ddot{x}(t).dt = \int_{t_0}^t \ddot{x}_1 \cdot dt \Rightarrow v(t) = \ddot{x}_1 \cdot t$$

$$\text{Maintenant, on peut intégrer (1). (1) } \Rightarrow x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \ddot{x}_1 \cdot t \cdot dt \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} \cdot \ddot{x}_1 \cdot t_1^2 \text{ soit } x_1 = 1,44 \text{ m}$$

Autre méthode : l'aire sous la courbe en phase 1 est celle d'un triangle

$$\text{donc, directement, } x_1 = \frac{1}{2} v_1 \cdot (t_1 - t_0)$$

▪ Phase 2 : Avancement à vitesse constante $t_1 \leq t \leq t_2 = 4 \text{ s}$

Q2.3. Calculer la position x_2 du VAG.

$$\text{La vitesse est constante en phase 2 donc } v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow v_1 = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \Leftrightarrow v_1 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = x_1 + v_1 \cdot (t_2 - t_1) \text{ soit } x_2 = 3,36 \text{ m}$$

$$\text{Ou l'aire sous la courbe (rectangle), } x_2 - x_1 = v_1 \cdot (t_2 - t_1).$$

▪ Phase 3 : Arrêt d'urgence $t_2 \leq t \leq t_3$

Q2.4. Calculer alors l'instant t_3 .

$$\text{A nouveau, l'accélération est constante en phase 3, } \ddot{x}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \ddot{x}_3 = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2}$$

Pour $\ddot{x}_3$, prenons sa valeur maxi autorisée $\ddot{x}_3 = -3,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

$$\text{Alors, } t_3 = t_2 - \frac{v_2}{\ddot{x}_3} \text{ soit } t_3 = 4,33 \text{ s}$$

Q2.5. Calculer la position x_3 du VAG.

On sait que $\int_{t_2}^{t_3} dx(t) = \int_{t_2}^{t_3} v(t) \cdot dt \Leftrightarrow x_3 - x_2 = \int_{t_2}^{t_3} v(t) \cdot dt$ mais il faut connaître v comme à la Q 2.2.

On intègre donc l'accélération entre t_2 et t

$$\int_{t_2}^t dv(t) = \int_{t_2}^t \ddot{x}(t) \cdot dt \Rightarrow v(t) - v_2 = \int_{t_2}^t \ddot{x}_3 \cdot dt \Rightarrow v(t) = v_2 + \ddot{x}_3 \cdot (t - t_2)$$

On peut aussi affirmer (figure 9) que $\ddot{x}_3 = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{v(t) - v_2}{t - t_2} \dots$

L'intégration de la vitesse entre t_2 et t_3 donne :

$$x_3 - x_2 = v_2 \cdot (t_3 - t_2) + \frac{1}{2} \ddot{x}_3 \cdot (t_3 - t_2)^2 \text{ soit } x_3 - x_2 = 0,2 \text{ m } (\leq 0,25 \text{ m})$$

Ou l'aire sous la courbe ...

Q2.6. L'exigence du cahier des charges concernant la distance d'arrêt est-elle satisfaite ?

L'exigence sur la distance d'arrêt est satisfaite.

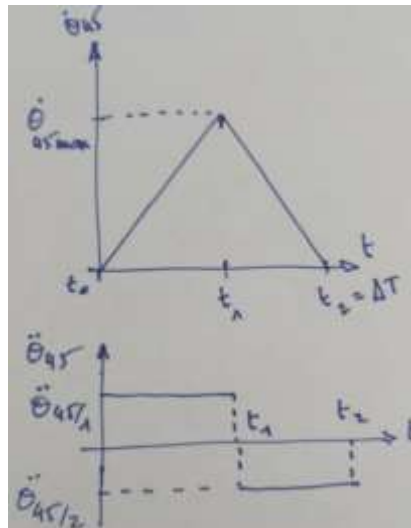
3. Equations du mouvement : profil triangle

La loi des vitesses de rotation de l'avant-bras 4 d'un robot par rapport à son bras 5 a été choisie **en triangle**. Ce qui signifie que le mouvement se décompose en deux phases.

Q3.1. Que peut-on affirmer pour t_1 ?

L'accélération et la décélération sont identiques en module donc $t_1 = \frac{t_2}{2} = \frac{\Delta T}{2}$

Q3.2. Tracer la loi des vitesses.



Q3.3. Le cahier des charges impose :

Exigence	Critère	Niveau
Rapidité	Délai ΔT pour un angle de rotation $\Delta\theta_{45} = 150^\circ$ de l'avant-bras.	$\Delta T \leq 0,5 \text{ s}$

Déterminer la valeur de $\ddot{\theta}_{45/1}$ qui satisfera à l'exigence de rapidité.

On dispose, comme données de $\Delta\theta_{45}$ et ΔT . Il faut donc Partir de là.

On sait que $\int_{t_0}^{t_1} d\theta_{45}(t) = \int_{t_0}^{t_1} \omega_{45}(t) \cdot dt \Leftrightarrow \frac{\Delta\theta_{45}}{2} = \int_{t_0}^{t_1} \omega_{45}(t) \cdot dt$

Il faut donc déterminer la fonction ω_{45} soit la intégration de l'accélération entre t_0 et t soit en affirmant que :

$$\omega_{45}(t) = \ddot{\theta}_{45/1} \cdot t$$

$$\text{Alors, } \frac{\Delta\theta_{45}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \ddot{\theta}_{45/1} \cdot t_1^2 \Leftrightarrow \Delta\theta_{45} = \ddot{\theta}_{45/1} \cdot \left(\frac{\Delta T}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \underbrace{\ddot{\theta}_{45/1} = 4 \cdot \frac{\Delta\theta_{45}}{\Delta T^2}}_{\text{homogène}} \text{ soit } \ddot{\theta}_{45/1} = 41,9 \text{ rad.s}^{-2}$$

Q3.4. Calculer la vitesse maximale de rotation $\dot{\theta}_{45/\max}$.

$$\text{Comme un phase 1, } \omega_{45}(t) = \ddot{\theta}_{45/1} \cdot t \Rightarrow \dot{\theta}_{45/\max} = \ddot{\theta}_{45/1} \cdot t_1 \Rightarrow \dot{\theta}_{45/\max} = 4 \cdot \frac{\Delta\theta_{45}}{\Delta T^2} \cdot \frac{\Delta T}{2}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}_{45/\max} = 2 \cdot \frac{\Delta\theta_{45}}{\Delta T} \text{ soit } \dot{\theta}_{45/\max} = 10,47 \text{ rad.s}^{-1} \quad (= 100 \text{ tr.min}^{-1})$$

Le moteur d'entraînement de l'avant-bras tourne à $N_{\text{mot}} = 4000 \text{ tr/min}$.

Q3.5. Faut-il prévoir un réducteur ? Si oui, calculer le rapport de réduction

Un moteur tourne généralement « vite ». Il faut prévoir un réducteur de rapport de réduction $k = \frac{1}{40}$

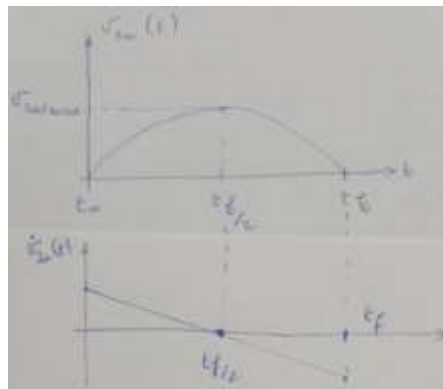
4. Equations du mouvement : profil parabolique

Q4.1. Justifier l'expression de la vitesse.

La vitesse doit être nulle au début et à la fin du mouvement. On a bien $v_{20}(t_0) = v_{20}(t_f) = 0$.

Remarquons, pour la vérification de l'homogénéité des relations que A est en m.s^{-3} .

Q4.2. Tracer son allure.



Q4.3. Cahier des charges

Montrer que le respect de cette exigence impose que $A = \frac{|\ddot{x}_{20/\max}|}{t_f}$.

Sur les courbes de la question Q.4.2., les accélérations maximale et minimale sont au début et à la fin du mouvement. (droite affine).

$$\text{Alors, } \ddot{x}_{20/\max} = \ddot{x}_{20}(t_0) \text{ avec } \ddot{x}_{20}(t) = A \cdot ((t_f - t) - t) \text{ d'où } \ddot{x}_{20/\max} = A \cdot t_f \Rightarrow A = \frac{|\ddot{x}_{20/\max}|}{t_f}$$

Q4.4. Déterminer la durée du mouvement.

$$\text{On a } L = 6 \text{ m et } \int_{t_0}^{t_f} dx_{20}(t) = \int_{t_0}^{t_f} v_{20}(t) \cdot dt \Rightarrow L = \int_{t_0}^{t_f} A \cdot t \cdot (t_f - t) \cdot dt$$

$$\Leftrightarrow L = \left[\frac{A \cdot t_f \cdot t^2}{2} - \frac{A \cdot t^3}{3} \right]_{t_0}^{t_f} \Leftrightarrow L = \frac{A \cdot t_f^3}{6} \Rightarrow t_f = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot L}{|\ddot{x}_{20/\max}|}}$$

Numériquement, $t_f = 19 \text{ s}$

Q4.5. Déterminer la vitesse maximale $v_{20/\max}$.

Et $v_{20/\max} = v_{20}\left(\frac{t_f}{2}\right) = \frac{A \cdot t_f^2}{4} \Rightarrow v_{20/\max} = \frac{|\ddot{x}_{20/\max}| \cdot t_f}{4}$ numériquement, $v_{20/\max} = 0,475 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

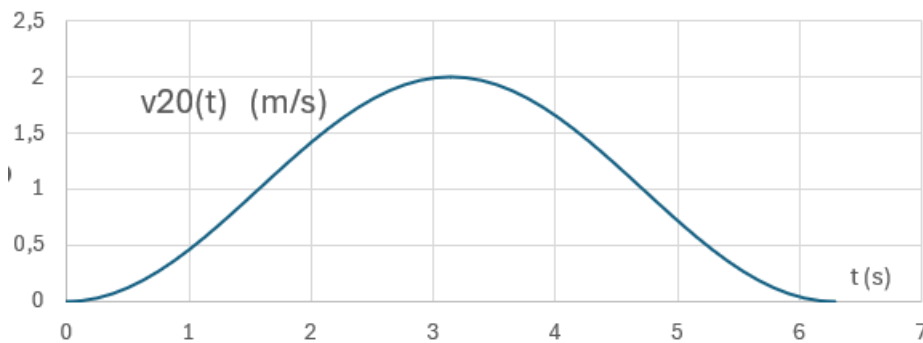
Remarque, $A = \frac{|\ddot{x}_{20/\max}|}{t_f} = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-3}$

5. Equations du mouvement : Profil sinusoïdal

On souhaite maintenant réaliser en démarrage et un arrêt en « douceur » en utilisant un profil sinusoïdal tel que :

$$v_{20}(t) = A \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t)) ; t_0 \leq t \leq t_f ; A \text{ et } \omega \text{ deux constantes strictement positives.}$$

Q5.1. Tracer sa courbe représentative pour $A = 1 \text{ m/s}$ et $\omega = 1 \text{ rad/s}$.



Q5.2. Le démarrage et l'arrêt est-il conforme aux attentes ? Expliquer.

La vitesse est nulle pour $t = t_0 = 0$ et $t = t_f$ (démarrage et arrêt). Par ailleurs, l'accélération est nulle aux mêmes instant indiquant un démarrage et arrêt en « douceur » (produits fragiles).

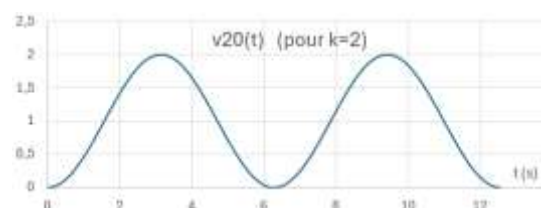
Q5.3. Le cahier des charges impose :

Exigence	Critère	Niveau
Limiter l'accélération	$\ddot{x}_{20/\max}$	$ \ddot{x}_{20/\max} = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Calculer les valeurs de t_f , A et ω . La distance parcourue par la tablette est $L = 6 \text{ m}$.

On veut $v_{20}(t_f) = 0$ ① $\Leftrightarrow \omega \cdot t_f = 2 \cdot k \cdot \pi$

Cependant, les mathématiques nous donnent toutes les solutions de ① y compris celles non physiques et/ou non techniques. $k = 0$ correspond à $t_f = t_0$ (début du mouvement, ce n'est pas celle qui est recherchée), $k = 1$ correspond à $t_f =$



$\frac{2\pi}{\omega}$ (1^{er} arrêt, celui qui est recherché), $k = 2$ correspond à $t_f = \frac{4\pi}{\omega}$ (2^{ème} arrêt, non souhaité car cela signifierait qu'il y aurait un arrêt intermédiaire pour $t_i = \frac{2\pi}{\omega}$).

On a donc $t_f = \frac{2\pi}{\omega}$ ou $\omega = \frac{2\pi}{t_f}$

Par ailleurs, $\ddot{x}_{20}(t) = A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$ dont le maximum est atteint, on le sait sans démonstration, pour $\omega \cdot t_M = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t_M = \frac{t_f}{4}$. Alors,

$$\ddot{x}_{20/\max} = A \cdot \omega$$

Enfin, $\int_{t_0}^{t_f} dx_{20}(t) = \int_{t_0}^{t_f} v_{20}(t) \cdot dt \Leftrightarrow L = A \cdot t_f \Rightarrow L = \frac{\ddot{x}_{20/\max}}{2\pi} \cdot t_f^2$

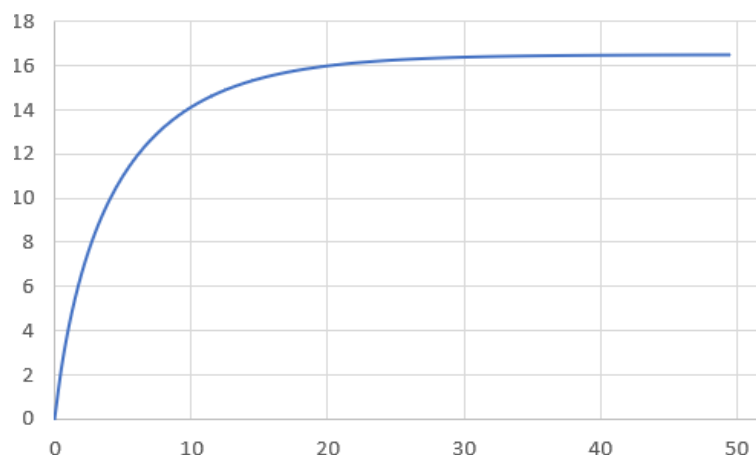
On obtient $t_f = \sqrt{\frac{2\pi \cdot L}{\ddot{x}_{20/\max}}}$ (numériquement $t_f = 19,4 \text{ s}$).

Alors, $\omega = 0,32 \text{ rad.s}^{-1}$ et $A = 0,31 \text{ m.s}^{-1}$ ($v_{20/\max} = 2 \cdot A$)

6. Tapis transbordeur de mine

Q6.1. La vitesse de consigne est $V_c = 16 \text{ m/s}$. On demande la valeur asymptotique de la vitesse, l'erreur statique et le temps de réponse à 5%.

$v(t)$ en fonction du temps t en seconde



Q6.2. Donner les unités de a, μ et K

a est en s.m^{-1} ; μ est sans unité K est en kg.m^{-1}

Q6.3. Ecrire le PFD appliqué au tapis 1 en translation par rapport à 0 selon $\vec{x}$.

Le PFD appliqué au tapis 1 en translation par rapport à 0 selon $\vec{x}$ s'écrit : $\sum F_{\text{ext} \rightarrow 1} = M \cdot \Gamma_{1/0}(t)$

$$F_{\text{mot}}(t) - T_{fr}(t) - T_{aéro}(t) = M \cdot \ddot{x}_{1/0}(t)$$

$$\text{Soit } F_{\text{mot}} \cdot e^{-a \cdot \dot{x}_{10}(t)} - \frac{1}{3} \cdot M \cdot g \cdot \mu - K \cdot (\dot{x}_{10}(t))^2 = M \cdot \ddot{x}_{1/0}(t)$$

Q6.4. Citer les quatre exigences principales imposées aux asservissements (SLCI).

Stabilité, précision, rapidité et amortissement-dépassement

Q6.5. Donner les instants t_1 et t_2 .

On lit $t_1 = 12 \text{ s}$ et $t_2 = 20 \text{ s}$

Dans les calculs qui suivent, comme la vitesse est affine par morceaux, on utilisera de préférence des calculs d'aires.

Q6.6. Calculer les accélérations $\ddot{x}_i$.

Elles sont constantes par morceaux donc $\ddot{x}_i = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t}$ et,

$$\ddot{x}_1 = +1,23 \text{ m.s}^{-2} ; \ddot{x}_2 = +0,156 \text{ m.s}^{-2} ; \ddot{x}_3 = 0 \text{ m.s}^{-2}$$

Q6.7. Calculer la distance parcourue par le tapis à l'instant t_1 .

$$\text{On a, } \int_{t_0}^{t_1} dx_{10}(t) = \int_{t_0}^{t_1} v_{10}(t).dt \Rightarrow x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \ddot{x}_1 \cdot t \cdot dt \Leftrightarrow x_1 = \frac{\ddot{x}_1 \cdot t_1^2}{2} \left(= \frac{v_1 \cdot t_1}{2} \text{ aire} \right)$$

$$x_1 = 88,5 \text{ m}$$

Q6.8. Calculer la distance parcourue par le tapis à l'instant t_2 .

$$\text{On a } x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_{10}(t).dt \text{ avec } v_{10}(t) - v_1 = \ddot{x}_2 \cdot (t - t_1) \text{ pour la phase 2.}$$

$$\text{Ou (aire du trapèze), } x_2 - x_1 = (t_2 - t_1) \cdot \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow x_2 = 211,5 \text{ m}$$

Q6.9. Calculer la distance parcourue $X = x_{10}(40)$ par le tapis à l'instant $t = 40 \text{ s}$.

$$\text{On a (aire du rectangle pour } t \geq t_2), X = x_2 + v_2 \cdot (t - t_2) \Rightarrow X = 531,5 \text{ m}$$

Q6.10. Calculer la durée T pour parcourir $L = 10 \text{ km}$.

$$\text{On reprend la relation précédente avec } L = x_2 + v_2 \cdot (T - t_2) \Leftrightarrow T = t_2 + \frac{L - x_2}{v_2}$$

$$\Rightarrow T = 611,8 \text{ s}$$