

# TD 4 : Schéma-bloc fonctionnel et transformée de Laplace

## EXERCICE 1 : LES BASES (HYP : HEAVISIDE EST VERIFIÉ)

- Donner les trois entrées-test du cours en leurs transformées de Laplace.

- Un système est globalement régi par l'équation différentielle :

$$10 \cdot \frac{d^3 s(t)}{dt^3} + 5 \cdot \frac{ds(t)}{dt} = 2 \cdot \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \frac{de(t)}{dt} + 3 \cdot e(t) \quad \text{reliant son entrée et sa sortie.}$$

Le comportement est-il causal (expliquer). Donner son ordre.

Calculer sa fonction de transfert  $H(p)$ . La mettre sous forme canonique et préciser sa classe, son ordre et son gain statique.

Donner la forme canonique, le gain statique, la classe et l'ordre des fonctions qui suivent

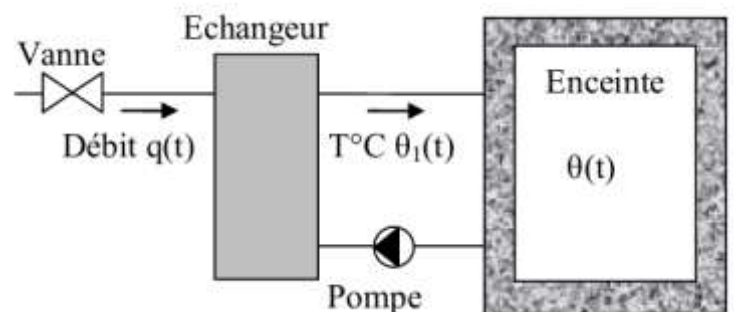
$$H_1(p) = \frac{10}{(1 + 0,5.p).(1 + 0,25.p)}$$

$$H_2(p) = \frac{5.(4 + p)}{p.(2.p + p)}$$

$$H_3(p) = \frac{1000.(2 + 10.p)}{100 + 8.p + p^2}$$

## EXERCICE 2 : MODÉLISATION D'UNE ENCEINTE CHAUFFANTE

Le système représenté ci-contre est chargé de maintenir la température d'une enceinte. Le chauffage est assuré par un échangeur thermique. Une vanne permet de réguler le débit dans l'échangeur. On note  $\alpha(t)$  l'angle d'ouverture de la vanne,  $q(t)$  le débit dans l'échangeur,  $\theta_1(t)$  la température en sortie de l'échangeur,  $\theta(t)$  la température de l'enceinte.



On donne les modèles de connaissance qui régissent le système :

- $q(t) = k_0 \cdot \alpha(t)$  (loi de fonctionnement de la vanne donnant le débit en fonction de l'angle d'ouverture de la vanne).
- $\theta_1(t) + \tau_1 \cdot \frac{d\theta_1(t)}{dt} = k_1 \cdot q(t)$  (loi de transfert de chaleur dans l'échangeur).
- $\theta(t) + \tau_2 \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = k_2 \cdot \theta_1(t)$  (loi de transfert de chaleur dans l'enceinte).

### Commande manuelle de la vanne :

On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles. L'entrée du système est l'angle d'ouverture de la vanne  $\alpha(t)$ , et la sortie la température de l'enceinte  $\theta(t)$ .

Q1. Traduire dans le domaine de Laplace les équations du modèle de connaissance.

Q2. Représenter le système par un schéma-bloc faisant intervenir les 3 blocs précédemment définis.

## Commande asservie de la vanne :

Afin de réguler la température, on choisit de motoriser la vanne. On installe un capteur dans l'enceinte qui mesure la température et la traduit en une tension  $u_{mes}(t)$  (on peut modéliser ce capteur par un gain pur  $K_{mes} = 0,02$ ). La tension  $u_{mes}(t)$  est comparée à la tension de consigne  $u_c(t)$  issue d'un transducteur de fonction de transfert  $T(p)$  à partir de la consigne de température  $\theta_c(t)$ . En fonction de cet écart amplifié par un correcteur de gain  $K_c$ , le moteur est alimenté par une tension  $u_{mot}(t)$ . La vitesse  $\omega_{mot}(t)$  du moteur est réduite par un réducteur par engrenage à deux étages, de rapport de réduction  $K_{red}$ , jusqu'à la vitesse  $\omega_{red}(t) = \dot{\alpha}(t)$ . La vanne motorisée s'ouvre plus ou moins d'un angle  $\alpha(t)$  pour réguler le débit.

Les schémas et figures ci-dessous précisent l'architecture du système.

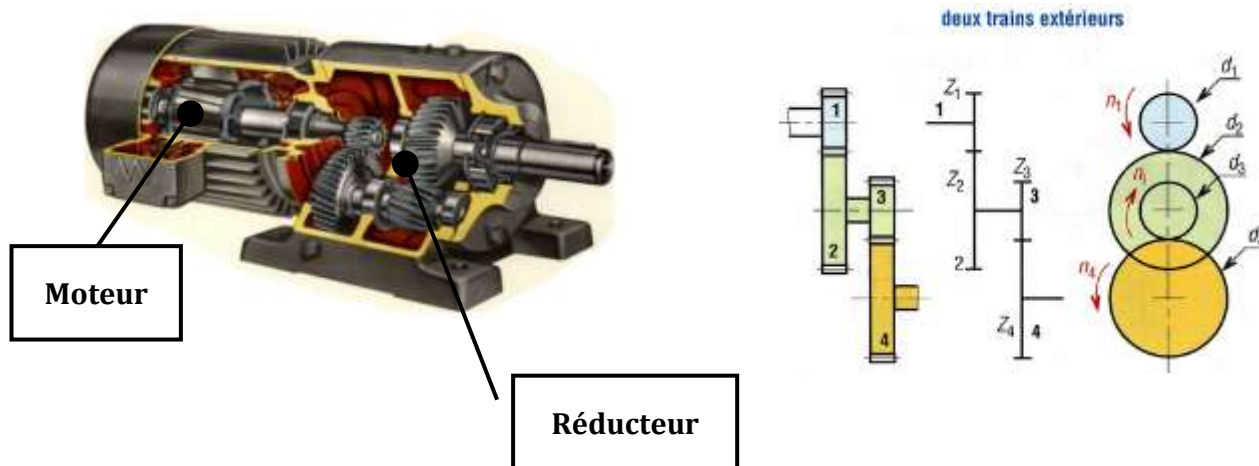
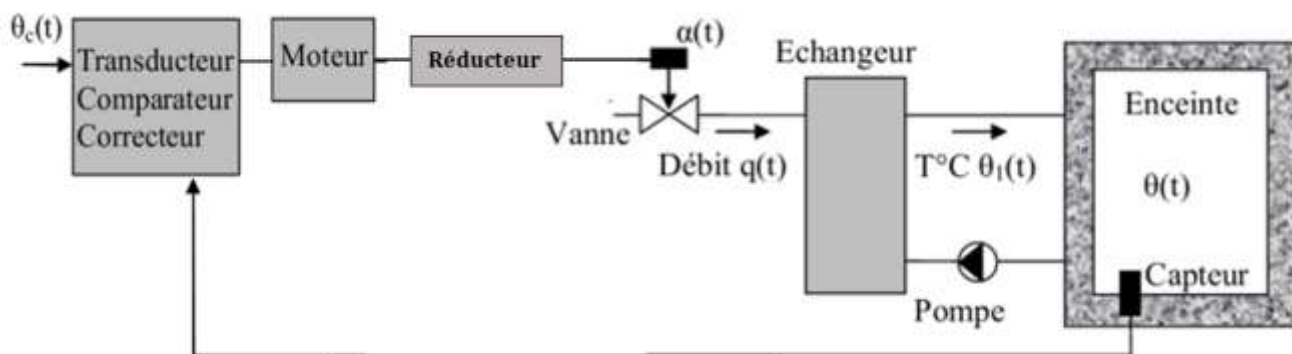


Schéma technologique de l'installation



On donne la fonction de transfert du moteur qui est :

$$M(p) = \frac{\Omega_{mot}(p)}{U_{mot}(p)} = \frac{k}{1 + \tau \cdot p}$$

Q3. Représenter par un schéma-bloc le système régulé dont l'entrée est la température  $\theta_c(p)$ . Remarque : il faut repérer dans les texte et schéma les grandeurs physiques intervenant dans le système et déterminer de quel bloc elles sont l'entrée ou la sortie. Cela donne, par la même occasion, le nombre de blocs à prévoir (les conditions de Heaviside sont vérifiées).

Q4. Quelle doit être la fonction de transfert du transducteur de façon à annuler l'écart  $\varepsilon(p)$  quand la température de consigne et la température de l'enceinte sont égales ?

Q5. Exprimer  $H(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_c(p)}$  sous forme canonique.

## EXERCICE 3 : MOTEUR ÉLECTRIQUE A COURANT CONTINU (CLASSIQUE EN CONCOURS)

Le moteur électrique à courant continu (MCC) est un actionneur très utilisé.

L'analyse de la partie électrique permet d'obtenir les équations suivantes :

$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = u_c(t) \quad (1)$$

$$u_c(t) = u_m(t) - e(t) \quad (2)$$

L'analyse de la partie mécanique de la chaîne d'action permet d'obtenir l'équation suivante :

$$J_{eq} \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) + c_r(t) - f \cdot \omega_m(t) \quad (3)$$

Les équations de couplage reliant les grandeurs mécaniques et électriques sont données ci-après :

$$c_m(t) = K_i \cdot i(t) \quad (4)$$

$$e(t) = K_e \cdot \omega_m(t) \quad (5)$$

Avec :

- $u_m(t)$  : tension d'alimentation de l'induit ;
- $i(t)$  : courant d'induit ;
- $e(t)$  : tension correspondant à la force contre électromotrice ;
- $c_m(t)$  : couple moteur ;
- $c_r(t)$  : couple résistant du récepteur ;
- $\theta(t), \omega(t)$  : position et vitesse de rotation angulaires de l'arbre moteur ;

Caractéristiques électriques du moteur :

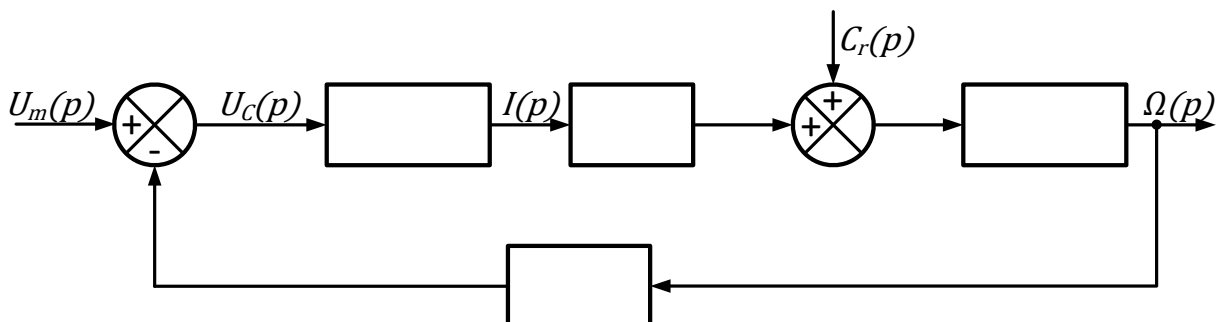
- $R$  résistance de l'induit  $R$  en ohm ( $\Omega$ ) ;
- $L$  inductance de l'induit :  $L$  en Henry ( $H$ ) ;
- $K_i$  : constante de couple  $K_i$  en  $N \cdot m \cdot A^{-1}$  ;
- $K_e$  : constante de force contre-électromotrice (en  $V \cdot s \cdot rad^{-1}$ ).

Caractéristiques mécaniques du moteur :

- $J_{eq}$  : moment d'inertie de la partie mécanique (moteur, réducteur etc.)  $J_{eq}$  en  $kg \cdot m^2$  ;
- $f$  : coefficient de frottement visqueux : en  $N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}$ .

Q1. Passer les 5 équations précédentes dans le domaine de Laplace et tracer les schéma-blocs élémentaires correspondant à chacune des équations (les conditions de Heaviside sont vérifiées).

Q2. En combinant les 5 blocs élémentaires précédents, compléter le schéma bloc ci-dessous.



## EXERCICE 4 : QUILLE PENDULAIRE (SUJET DE CONCOURS)

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire (figures 6 et 7). Cette quille est en liaison pivot d'axe ( $O ; ZN$ ) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci. La mise en mouvement et le blocage en position de la quille sont réalisés par des chaînes d'énergie et d'information.



Figure 7 : Voilier avec sa quille pendulaire écartée au maximum sur « bâbord »

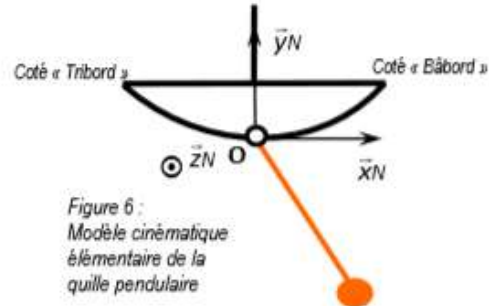


Figure 6 :  
Modèle cinématique  
élémentaire de la  
quille pendulaire

La commande des manœuvres de la quille s'effectue via un pupitre (voir TD 1.3) placé à proximité du poste de barre.

La quille est manœuvrée par deux vérins hydrauliques. Chacun d'eux est piloté par une servovalve de débit délivrant un débit  $q(t)$  proportionnel à sa tension de commande  $v(t)$ .

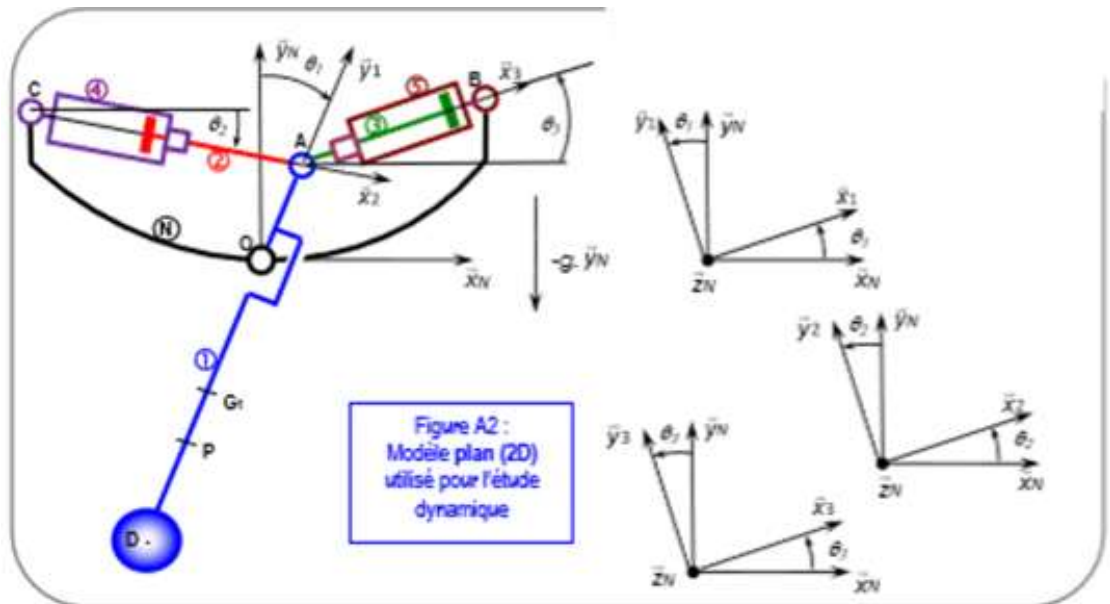


Figure A2 :  
Modèle plan (2D)  
utilisé pour l'étude  
dynamique

**Modélisation du vérin :** le comportement du vérin est défini par le modèle de la figure 11.

1 : Variable temporelle ; 2 : Transformée de Laplace correspondante.

| 1                                                                                        | Définition (unité)                                             | 2           | 1         | Définition (unité)                                                                                                                  | 2        |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| $q(t)$                                                                                   | Débit d'alimentation du vérin ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )           | $Q(p)$      | $f_R(t)$  | Composante selon l'axe de la tige de vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille. (N) | $F_R(p)$ |
| $\alpha(t)$                                                                              | Différence de pression entre les deux chambres du vérin (Pa)   | $\Sigma(p)$ |           |                                                                                                                                     |          |
| $x(t)$                                                                                   | Position de la tige du vérin (m)                               | $X(p)$      |           |                                                                                                                                     |          |
| <b>Constantes : Définitions et unités ( N.B. : toutes ces constantes sont positives)</b> |                                                                |             |           |                                                                                                                                     |          |
| $S$                                                                                      | Section du vérin ( $m^2$ )                                     |             | $M$       | Masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenée sur la tige de vérin (kg)                                               |          |
| $k$                                                                                      | Raideur mécanique du vérin ( $N \cdot m^{-1}$ )                |             | $\lambda$ | Coefficient de frottements visqueux ( $N \cdot m^{-1} \cdot s$ )                                                                    |          |
| $V$                                                                                      | Volume d'huile de référence ( $m^3$ )                          |             |           |                                                                                                                                     |          |
| $B$                                                                                      | Coefficient de compressibilité de l'huile ( $N \cdot m^{-2}$ ) |             |           |                                                                                                                                     |          |

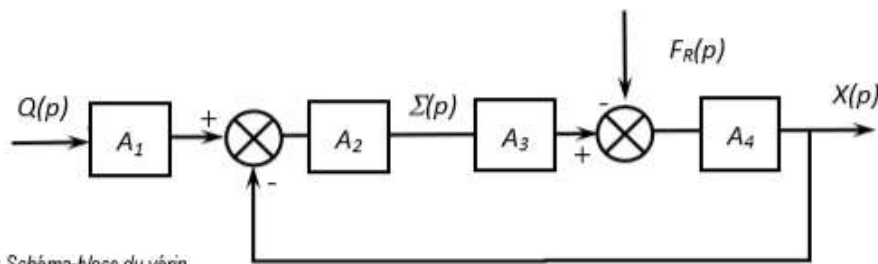


Figure 11 : Schéma-blocs du v nin.

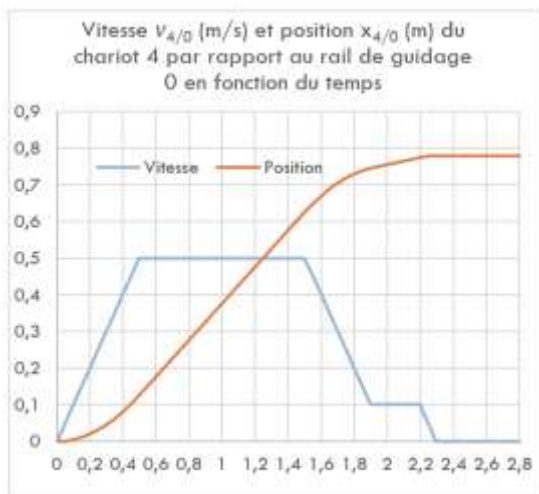
$$(1) q(t) = S \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2.B} \cdot \frac{d\sigma(t)}{dt}$$

$$(2) M \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S \cdot \sigma(t) - k \cdot x(t) - \lambda \cdot \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t)$$

Q1. Ecrire les équations (1) et (2) dans le domaine de Laplace (les conditions de Heaviside sont v rifi es).

Q2. Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  en fonction de  $p$  la variable de Laplace et des constantes.

## EXERCICE 5 : APPLICATIONS DES QUATRE TH  OREMES DE BASE



- On pilote un système (Robot Cooksee voir cours C6) par la consigne de vitesse  $v_{4/0}$  ci-contre :

Construire, à partir des entrées-test, la fonction  $v_{4/0}$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $t \rightarrow v_{4/0}(t)$  puis donner sa transform e de Laplace  $V_{4/0}(p)$ .

- Donner la fonction temporelle (transform e de Laplace inverse) de  $\Omega(p) = \frac{e^{-3 \cdot (p+5)}}{(p+5)} - \frac{2}{(4 \cdot p+1)^2}$ .

La transform e de Laplace de la fonction  $f: t \rightarrow \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t)$  est  $F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ .

Q1. Donner la transform e de Laplace de la fonction  $\tilde{f}: t \rightarrow e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t)$ .

Q2. Donner la fonction temporelle  $\check{f}$  qui est la fonction retard e de  $T$  de la fonction  $\tilde{f}$ .

Q3. Donner la transform e de Laplace de la fonction  $\check{f}$ .

Q4. Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{f}(t)$  par le théorème de la valeur finale. Le résultat est-il cohérent ?

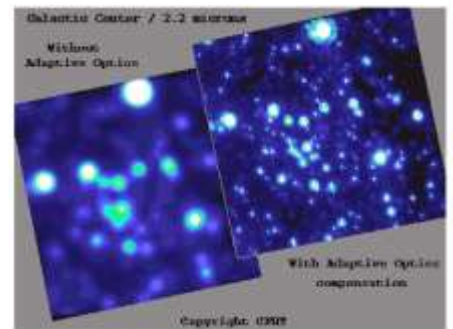
Q5. Calculer  $\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{f}(t)$  par le théorème de la valeur initiale. Le résultat est-il cohérent ?

## EXERCICE 6 : TIP-TILT MIRROR

L'objet de l'étude est un sous-système de correction du miroir tilt (Tip-Tilt Mirror ou TTM) conçu pour le VLT (Very Large Telescope) par le Département de Recherche Spatiale (DESPA) de l'Observatoire de Paris-Meudon.

Le sous-système de correction du miroir tilt est schématisé **figure 2**. Il comprend :

- un système mécanique et le miroir ;
- deux moteurs électriques selon deux axes perpendiculaires ;
- deux capteurs de positions angulaires ;
- un amplificateur convertisseur Tension-Courant ;
- un carte électronique avec correcteurs et comparateurs.



Des essais ont permis de valider des modèles de connaissances et de proposer des modèles de comportements valides. Ainsi :

- Système mécanique et miroir, d'équation  $\theta(t) + \frac{c}{k} \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{J}{k} \cdot \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{k} \cdot c_m(t)$ , avec  $\theta(t)$  angle de rotation,  $c_m(t)$  couple moteur,  $k$  raideur ( $k = 24 \text{ N.m.rad}^{-1}$ ),  $T = \frac{c}{k}$  constante liée à l'amortissement ( $T = 10^{-3} \text{ s}$ ) et  $J$  moment d'inertie ( $J = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$ );
- Amplificateur de gain pur  $K_2 = 0,1 \text{ A.V}^{-1}$ ;
- Moteur électrique de gain pur  $K_3 = 1,2 \text{ N.m.A}^{-1}$  alimenté par un courant  $i(t)$ ;
- Capteur de position de gain pur  $K_4 = 4125 \text{ V.rad}^{-1}$ ;
- Correcteur PD (Proportionnel-Dérivé), de constantes  $T_5$  et  $K_5$  et d'équation d'entrée-sortie

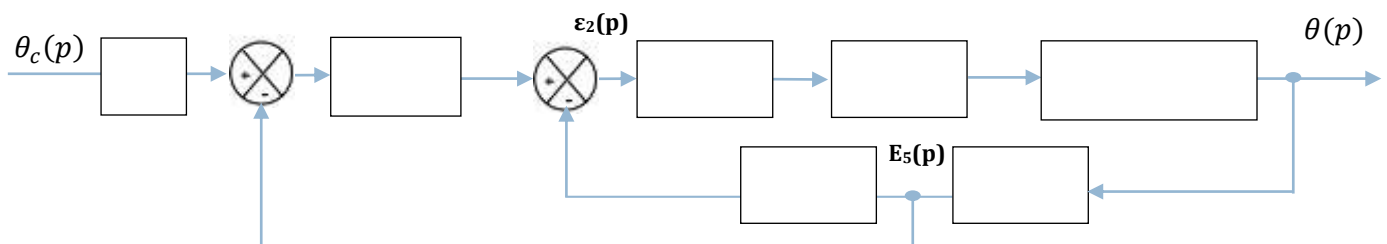
$$e_5(t) + T_5 \cdot \frac{de_5(t)}{dt} = \frac{1}{K_F} \cdot s_5(t) ;$$

- Correcteur PI (Proportionnel-Intégral), de constantes  $T_1$  et  $K_1$  et d'équation d'entrée-sortie

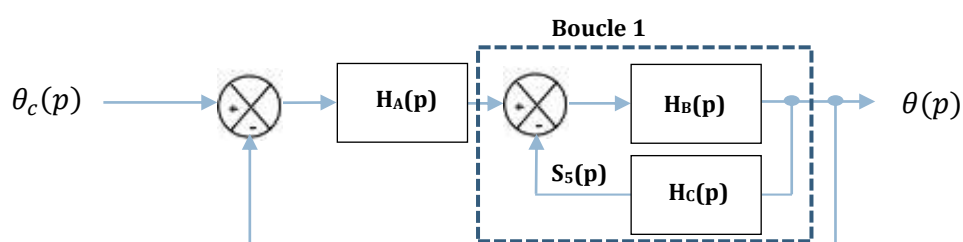
- $K_1 \cdot (\varepsilon_1(t) + T_1 \cdot \frac{d\varepsilon_1(t)}{dt}) = T_1 \cdot \frac{d\varepsilon_2(t)}{dt}.$

Q1. Grâce à la figure 2, au schéma-blocs de la question Q2 et aux unités des grandeurs physiques mettre les équations de ses différents composants dans le domaine de Laplace (6 équations attendues).

Q2. Compléter le schéma-bloc ci-dessous (blocs et grandeurs physiques).



Q3. Indiquer (en rouge) les modifications que vous proposez pour obtenir le schéma-bloc ci-dessous. Vous indiquerez l'expression des fonctions de transfert de chaque bloc.



## Annexes :

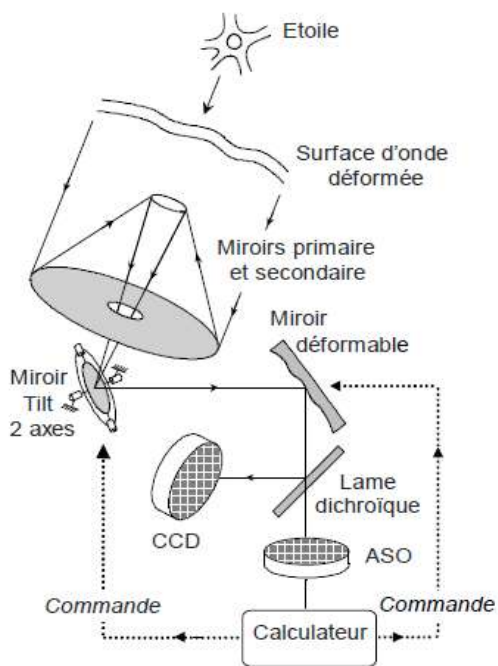
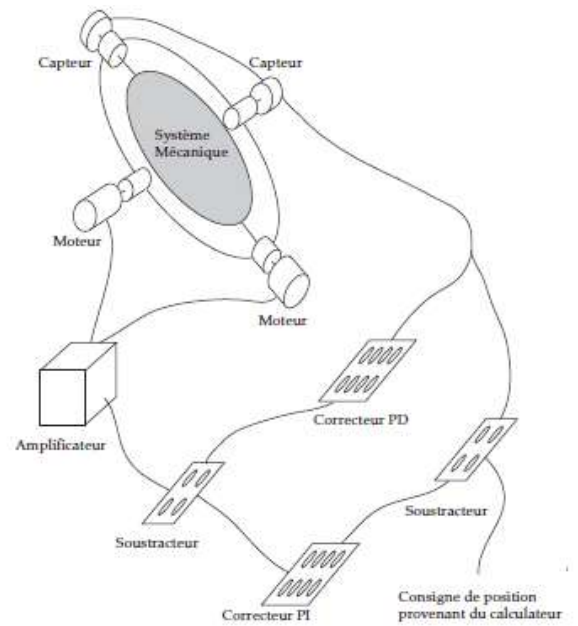


Figure 1 : Installation sur un télescope

Figure 2 :  
Système de  
correction  
du miroir  
tilt



## C4 Annexe : tableau des transformées de Laplace usuelles

| Domaine temporel                                                                                                                                                                       | Domaine de Laplace        | Domaine temporel                                                                                      | Domaine de Laplace                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| $\delta(t)$                                                                                                                                                                            | $1$                       | $\left(t - \frac{1 - e^{-at}}{a}\right) \cdot u(t)$                                                   | $\frac{a}{p^2(p+a)}$                |
| $K \cdot u(t)$                                                                                                                                                                         | $\frac{K}{p}$             | $\sin \omega t \cdot u(t)$                                                                            | $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$     |
| $Kt \cdot u(t)$                                                                                                                                                                        | $\frac{K}{p^2}$           | $\cos \omega t \cdot u(t)$                                                                            | $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$          |
| $e^{-at} \cdot u(t)$                                                                                                                                                                   | $\frac{1}{p+a}$           | $\sinh \omega t \cdot u(t)$                                                                           | $\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$     |
| $t \cdot u(t)$                                                                                                                                                                         | $\frac{1}{p^2}$           | $\cosh \omega t \cdot u(t)$                                                                           | $\frac{p}{p^2 - \omega^2}$          |
| $t^n \cdot u(t)$                                                                                                                                                                       | $\frac{n!}{p^{n+1}}$      | $e^{-at} \cdot \sin \omega t \cdot u(t)$                                                              | $\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$ |
| $\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot u(t)$                                                                                                                                      | $\frac{1}{p(1 + \tau p)}$ | $e^{-at} \cdot \cos \omega t \cdot u(t)$                                                              | $\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$    |
| $t^n e^{-at} \cdot u(t)$                                                                                                                                                               | $\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$  | $(e^{-at} - e^{-bt}) \cdot u(t)$                                                                      | $\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$            |
| $(1 - (1+at)e^{-at}) \cdot u(t)$                                                                                                                                                       | $\frac{a^2}{p(p+a)^2}$    | $\left(1 + \frac{b}{a-b} e^{-at} - \frac{a}{a-b} e^{-bt}\right) \cdot u(t)$                           | $\frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$            |
| Domaine temporel                                                                                                                                                                       |                           | Domaine de Laplace                                                                                    |                                     |
| $\frac{\omega_0}{\sqrt{1-z^2}} \cdot e^{-z\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-z^2} \cdot t) \cdot u(t)$                                                                                  |                           | $\frac{1}{1 + 2z \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$ avec $z < 1$                |                                     |
| $\left[1 - \frac{\omega_0}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-z^2} \cdot t + \varphi)\right] \cdot u(t)$<br>avec $\sin \varphi = \sqrt{1-z^2}$ et $\cos \varphi = z$ |                           | $\frac{1}{p \left(1 + 2z \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2\right)}$ avec $z < 1$ |                                     |
| $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p \cdot F(p) - f(0^-)$                                                                                                                     |                           | $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0)}{p}$                          |                                     |
| <b>Retard :</b> $\mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-T \cdot p} \cdot F(p)$                                                                                                                      |                           | <b>Amortissement :</b> $\mathcal{L}[e^{-a \cdot t} \cdot f(t)] = F(p+a)$                              |                                     |