C5 - Fonction de transfert (Méthodes d'obtention)

1. FORME RECHERCHÉE DE REPRÉSENTATION DES SYSTÈMES COMPLEXES 1
2. VOCABULAIRE (GÉNÉRAL, FTBF ET FTBO) 3
3. MANIPULATIONS DES SCHÉMAS BLOCS 4
4. SYSTÈMES À PLUSIEURS ENTRÉES : PRINCIPE DE SUPERPOSITION 7
5. APPLICATION 8

Compétences à acquérir

Connaître la forme classique condensée en fonctions de transfert en **Poursuite** et en **Régulation**

Connaître la différence entre une **consigne** et une **perturbation**

Connaître la forme générique du schéma-blocs d'un système asservi (comparateur, chaîne directe, chaîne retour, **FTBO, FTBF**, …)

Connaître les méthodes de manipulations de schémas-blocs

Savoir appliquer la *formule de Black*

Savoir appliquer le *principe de superposition*

1. FORME RECHERCHÉE DE REPRÉSENTATION DES SYSTÈMES COMPLEXES

La modélisation d'un système complexe commence par l'identification des éléments le constituant et la transformée de Laplace des équations modélisant son comportement. **Chaque élément est schématisé par un bloc** et l'ensemble forme **le schéma-blocs** comme présenté ci-dessous :

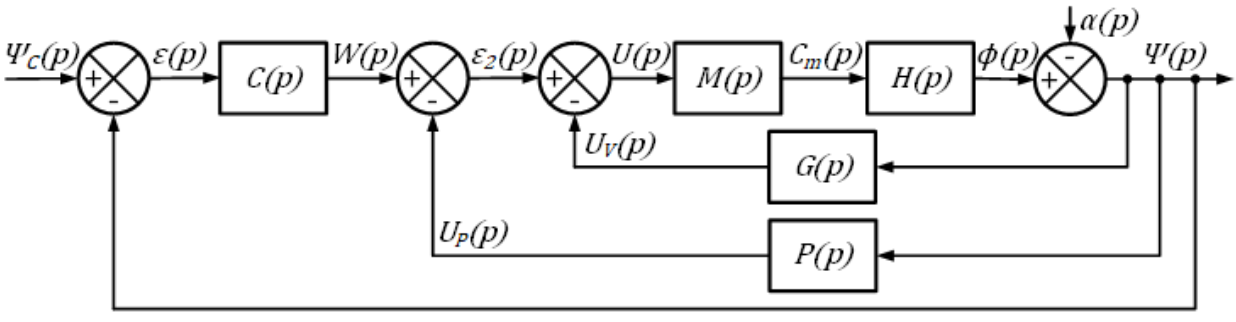
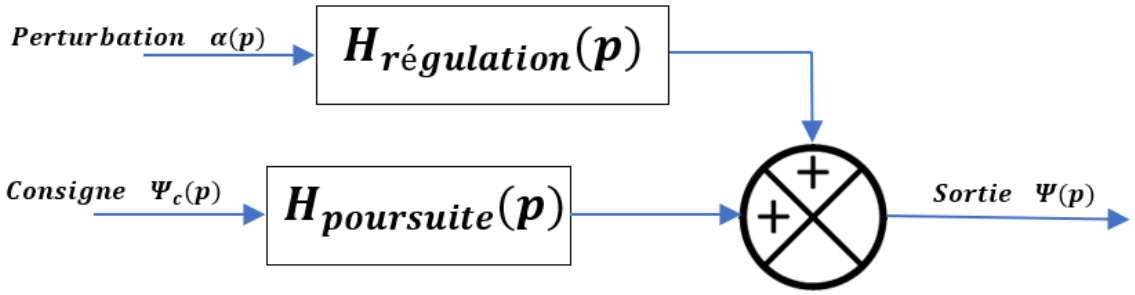


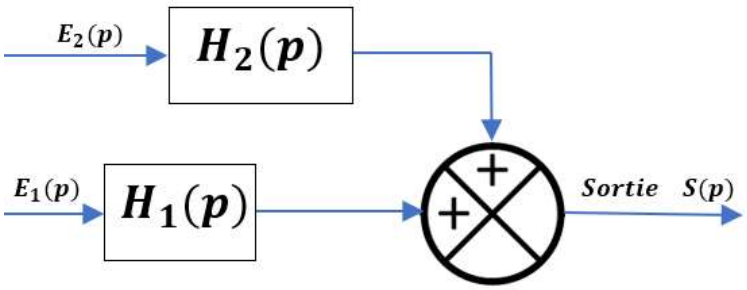
Fig 1 schéma blocs du Segway

Les grandeurs d'entrée (consigne ou signal) identifiées, chaque bloc opère une transformation de ces grandeurs en signal de sorties. Les principes physiques (équations éventuellement différentielles de la mécanique, l'électromagnétique, …) sont exprimés par leur **transformée de Laplace**. Le **schéma bloc** permet de représenter la succession de transformation de l'entrée vers la sortie, chaque bloc contenant une équation.

Par des techniques spécifiques développées ci-dessous, on obtiendra la forme suivante recherchée :



Et de manière générique, dans le cas où il y a plusieurs entrées, on cherche à écrire $S(p) = \sum_i H_i(p).E_i(p)$ (en général $i \in \{1;2\}$).



Dans notre exemple, on trouvera :

$$\Psi(p) = \frac{M(p).H(p).C(p)}{1 + M(p).H(p).[G(p) + P(p) + C(p)]}.\Psi_c(p) + \frac{-1}{1 + M(p).H(p).[G(p) + P(p) + C(p)]}.\alpha(p)$$

La recherche de la FT et de sa représentation sous forme de schéma bloc (ou schéma fonctionnel) conduit à adopter généralement la démarche suivante :

1. Identification de l'entrée, de la sortie et des blocs fonctionnels qui les relient.
2. À partir des équations issues des modèles de connaissance, linéarisation éventuelle et passage dans le domaine de Laplace de ces équations.
3. Construction du schéma-blocs (permet de relier graphiquement ces équations).
4. Manipulation des blocs et calcul de la fonction de transfert du système.

2. VOCABULAIRE (GÉNÉRAL, FTBF ET FTBO)

2.1. Structure générale (voir aussi le C4 page 6/9)

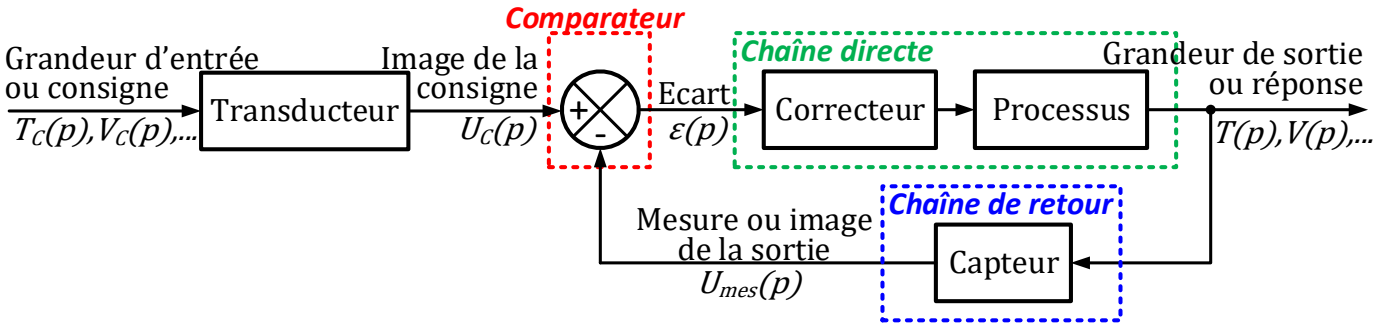


Figure 2 : Schéma bloc d'un système asservi (vocabulaire à connaître).

2.2. FTBF : Fonction de transfert en boucle fermée

Partant de la structure générale d'un système asservi, on définit la **fonction de transfert en boucle fermée** d'un système par le rapport entre la sortie S(p) et l'entrée E(p). On a donc :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\mathrm{D(p)}}{1 + \mathrm{D(p).R(p)}}$$

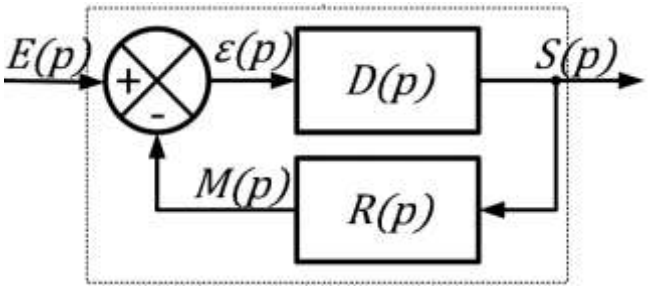


Figure 3 : FTBF

Démonstration : par définition : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

$$\text{Avec : } \begin{cases} S(p) &= \varepsilon(p).D(p) \\ \varepsilon(p) &= E(p) - M(p) \\ M(p) &= R(p).S(p) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} alors, S(p) &= \big(E(p) - M(p)\big).D(p) \\ &= \big(E(p) - R(p).S(p)\big).D(p) \\ \Longrightarrow S(p).\big(1 + R(p).D(p)\big) &= E(p).D(p) \end{aligned}$$

Attention aux signes dans le comparateur ! Si le – dans le comparateur devient +, on a alors :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{D(p)}{1 - D(p).R(p)}$$

2.3. FTBO : Fonction de transfert en boucle ouverte

Partant de la structure générale d'un système asservi, la **fonction de transfert en boucle ouverte** $T(p)$ est définie comme la fonction de transfert du système lorsque le retour sur le sommateur est coupé. Elle comprend la chaîne directe et la chaîne de retour. Dans le cas de la $FTBO$, on ne s'intéresse pas à la sortie $S(p)$ mais à la mesure $M(p)$ en fonction de $\varepsilon(p)$. On a donc :

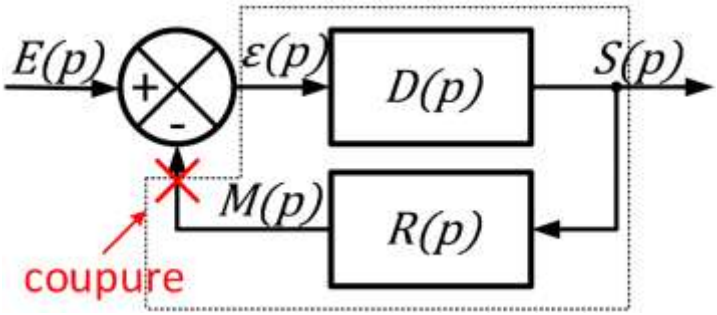


Figure 4 : FTBO

$$FTBO(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = D(p).R(p)$$

La FTBO servira par la suite à déterminer les performances du système (stabilité, précision, ...).

2.4. Retour unitaire

Un système asservi peut toujours être mis sous la forme d'un système à retour unitaire si l'entrée $E(p)$ et la sortie $S(p)$ sont comparables (même dimension).

L'avantage pratique d'un **système à retour unitaire** est que la FTBF est calculée très facilement à partir de la FTBO :

$$FTBF = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{FTBO}{1 + FTBO}$$

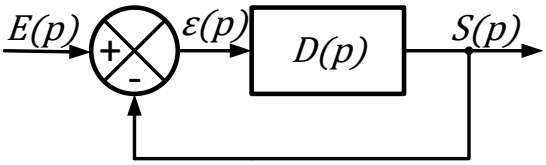


Figure 5 : Système à retour unitaire

Cette formule est un cas particulier, uniquement valable en cas de retour unitaire. On préfèrera alors retenir le cas général.

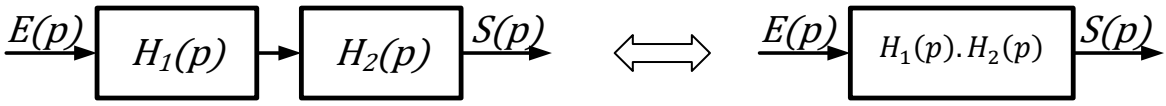
3. MANIPULATIONS DES SCHÉMAS BLOCS

La seule difficulté dans l'analyse d'un système automatisé décrit par un schéma-bloc complexe, est de réussir à obtenir les FTBO et FTBF du système pour étudier ses performances. L'idée générale de la méthode est de manipuler le schéma-bloc initial complexe pour faire apparaître des sous-systèmes à boucle fermée pour lesquels la FTBF est évidemment simple à calculer.

3.1. Opérations élémentaires sur les schémas blocs

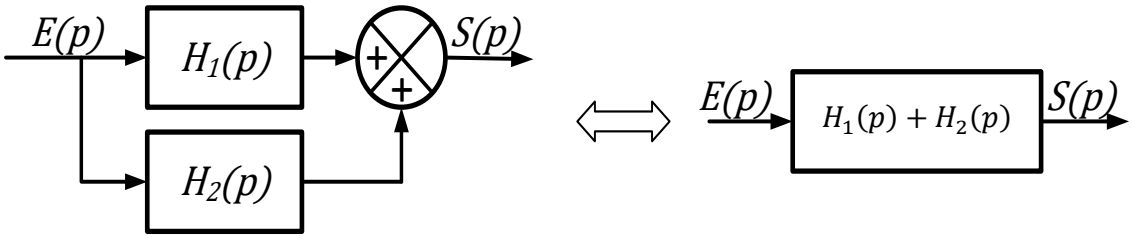
3.1.1. Blocs en série

Dans le cas des blocs en série, on effectue le produit des fonctions de transfert de chaque bloc :



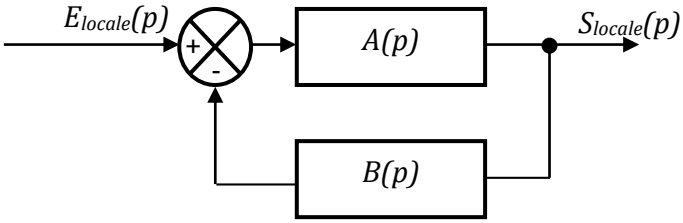
3.1.2. Blocs en parallèle

Dans le cas des blocs en parallèle, on utilise la relation du sommateur pour déduire simplement l'expression de la fonction de transfert du système :



3.2. Boucle classique et formule de Black

Lorsque le schéma bloc global présente une boucle locale ou interne du type ci-dessous, on peut directement utiliser la formule de Black :

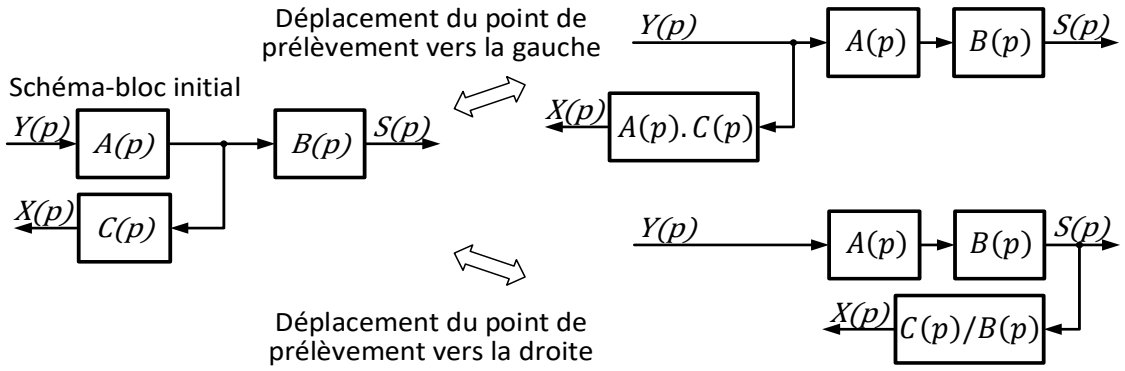


et, $\frac{S_{locale}(p)}{E_{locale}(p)} = \frac{A(p)}{1+A(p).B(p)}$

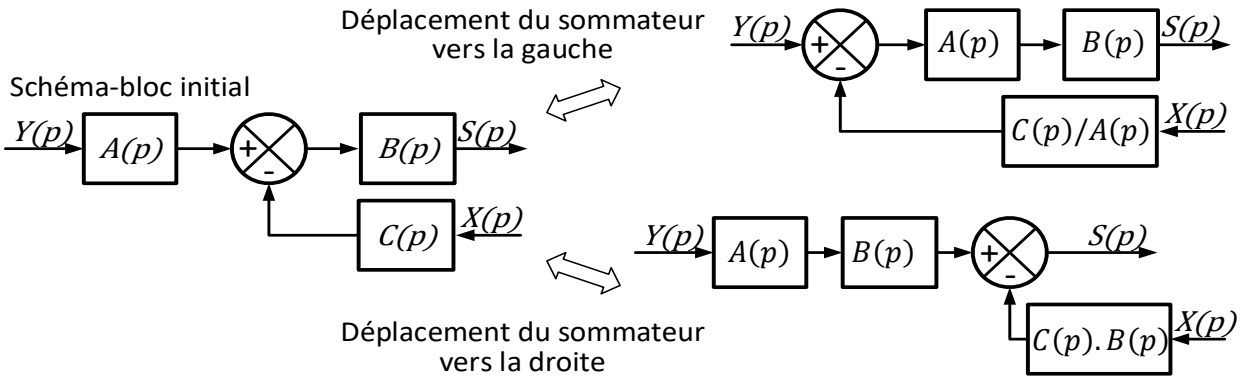
Dans notre exemple du début, en supposant $\alpha(p) = 0$, on a localement une boucle entre $\Psi(p)$ *et* $\varepsilon_2(p)$:

$$\frac{\Psi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{M(p).H(p)}{1 + M(p).H(p).G(p)}$$

3.3. Permutation de jonctions et blocs

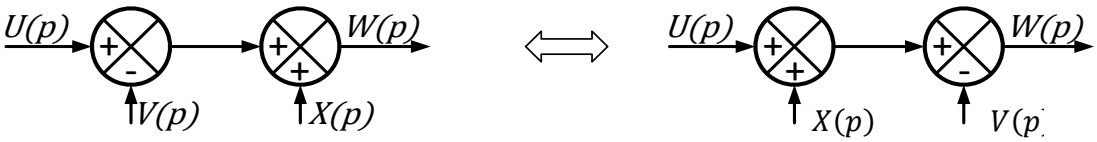


3.4. Permutation de sommateurs et blocs



3.5. Permutation de sommateurs

L'objectif est de déplacer un sommateur vers un autre sommateur. Il est ensuite possible de les alterner (de façon à faire disparaître un sommateur gênant en plein milieu d'une boucle fermée).

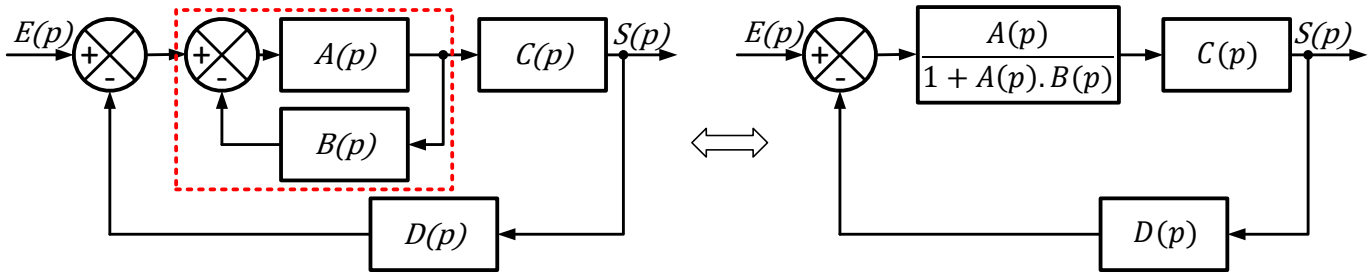


Remarque : On ne peut pas permuter une jonction et un sommateur car il y a une perte d'informations.

3.6. Simplification des boucles

3.6.1. Systèmes à boucles concentriques

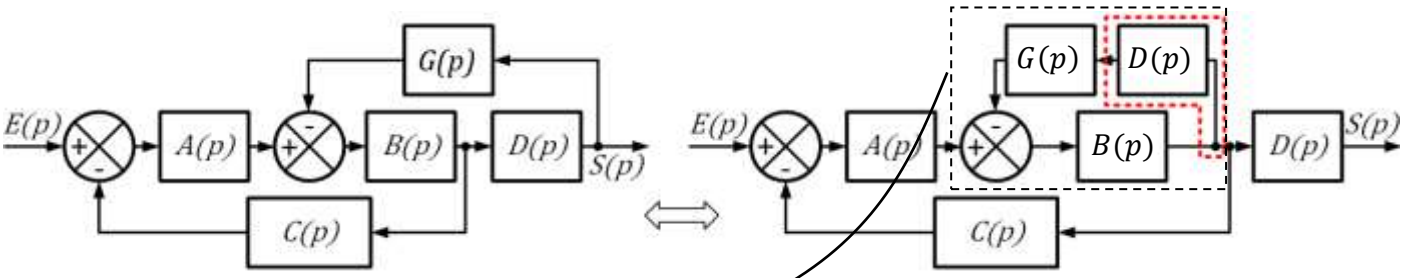
C'est le cas le plus simple : il suffit de commencer par calculer la FTBF de la boucle interne :



On reconnait ensuite une boucle fermée que l'on sait bien traiter.

3.6.2. Systèmes à boucles imbriquées

Pour ce type de système, il faut toujours commencer par déplacer les points de prélèvement pour se ramener à un système de boucles concentriques :



On se retrouve ensuite devant un système à boucles concentriques que l'on sait traiter.

Calculs :

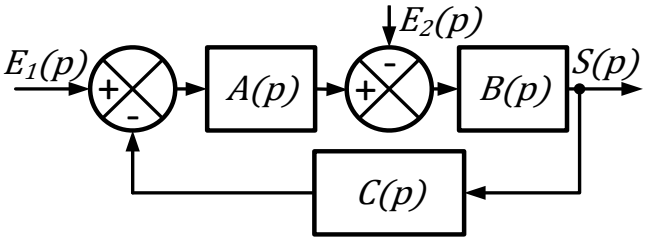
Alors, $H_{eq}(p) = \frac{B(p)}{1+B(p).D(p).G(p)}$

Puis, $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p).H_{eq}(p)}{1+A(p).H_{eq}(p).C(p)}.D(p) = \frac{A(p).\frac{B(p)}{1+B(p).D(p).G(p)}}{1+A(p).\frac{B(p)}{1+B(p).D(p).G(p)}.C(p)}.D(p)$

$$H(p) = \frac{A(p).B(p)}{1+B(p).D(p).G(p)+A(p).B(p).C(p)}.D(p)$$

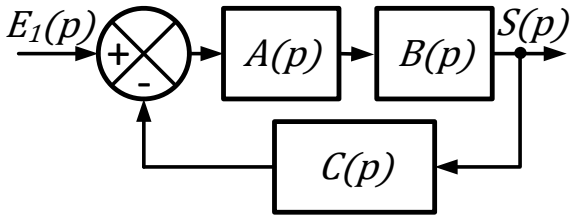
4. SYSTÈMES À PLUSIEURS ENTRÉES : PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Dans un système réel, plusieurs entrées peuvent venir modifier la sortie. Ces entrées comprennent non seulement l'entrée principale (grandeur par rapport à laquelle on détermine la sortie = consigne) mais aussi des entrées supplémentaires très souvent correspondant à des perturbations (bruit, effort résistant...). Ci-dessous, un exemple de système à plusieurs entrées :



Pour déterminer la fonction de transfert sur ce type de système, on utilise le principe de superposition des SLCI. On superpose deux modes : un 1er mode pour lequel l'entrée $E_2(p)$ est considérée comme nulle et un 2nd mode pour lequel l'entrée $E_1(p)$ est considérée comme nulle.

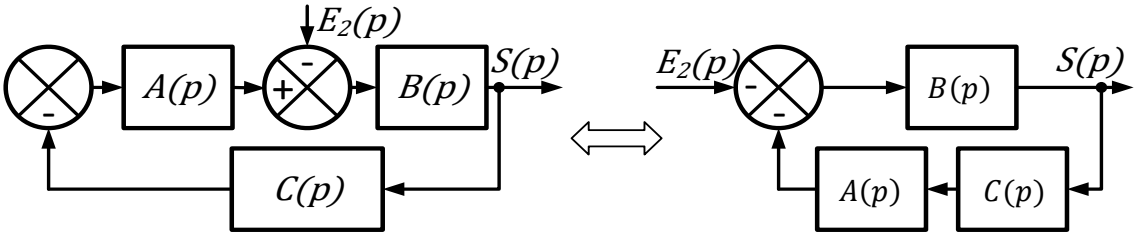
- Entrée $E_2(p) = 0$



$$H_1(p) = \left.\frac{S(p)}{E_1(p)}\right|_{E_2(p)=0} = \frac{A(p).B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)}$$

$H_1(p)$ est la fonction de transfert en **poursuite**

- Entrée $E_1(p) = 0$



$$H_2(p) = \left.\frac{S(p)}{E_2(p)}\right|_{E_1(p)=0} = \frac{-B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)}$$

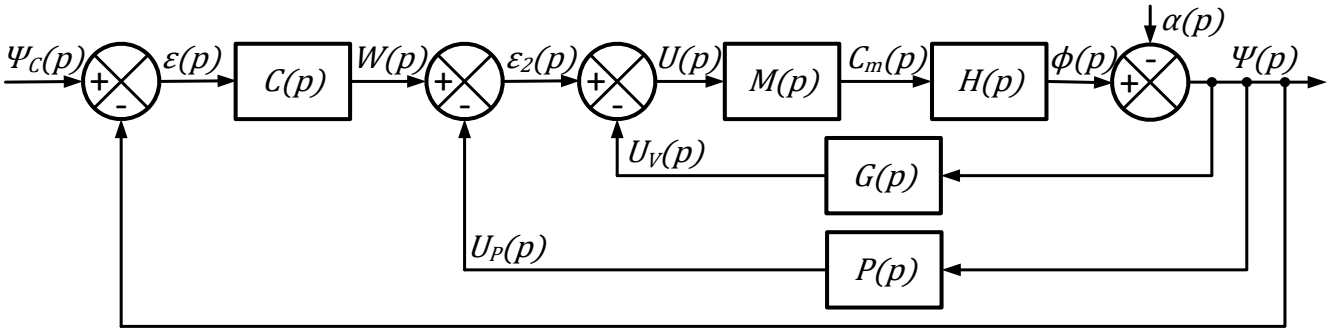
$H_2(p)$ est la fonction de transfert en **régulation**.

La superposition permet d'obtenir la fonction de transfert boucle fermée du système :

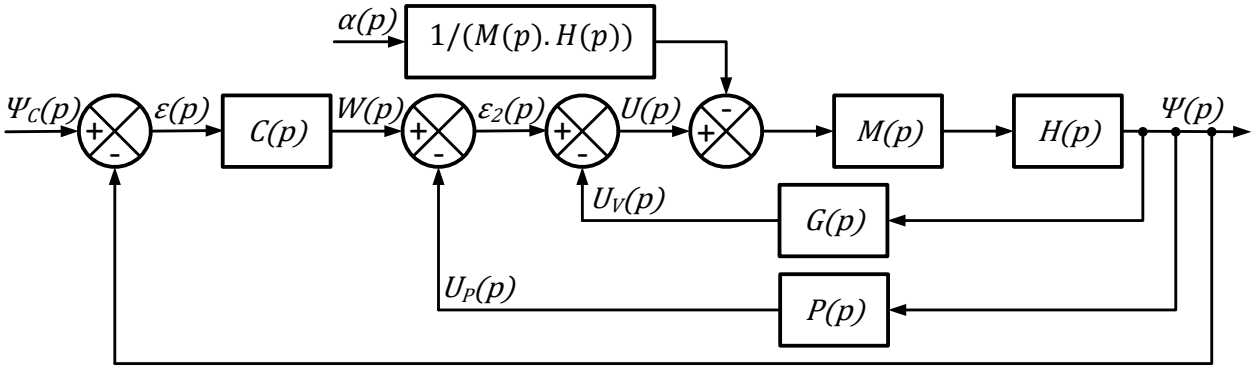
$$S(p) = \frac{A(p).B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)}.\boldsymbol{E_1(p)} - \frac{B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)}\boldsymbol{E_2(p)}$$

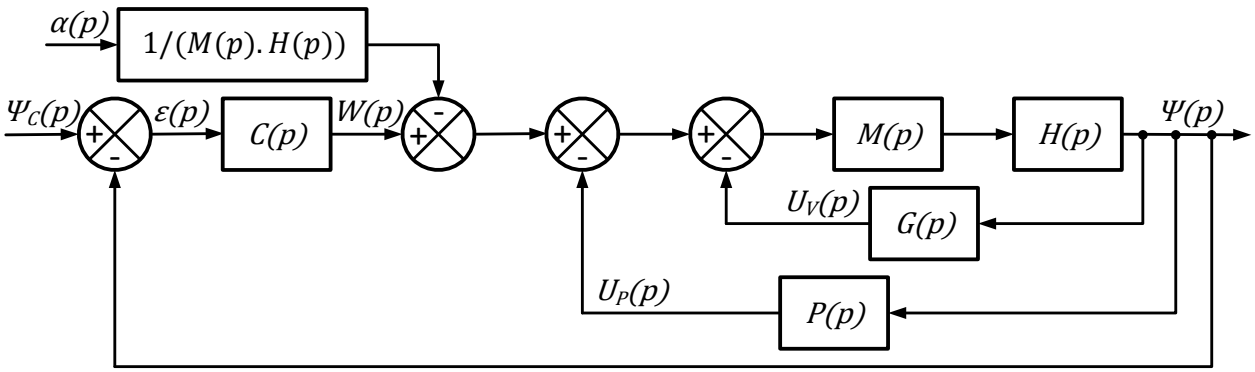
5. APPLICATION

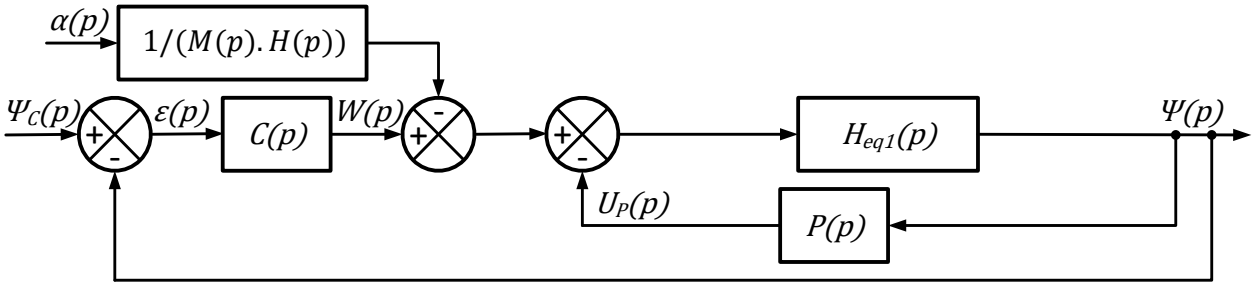
Calcul de la fonction de transfert du Segway à partir du schéma bloc initial :



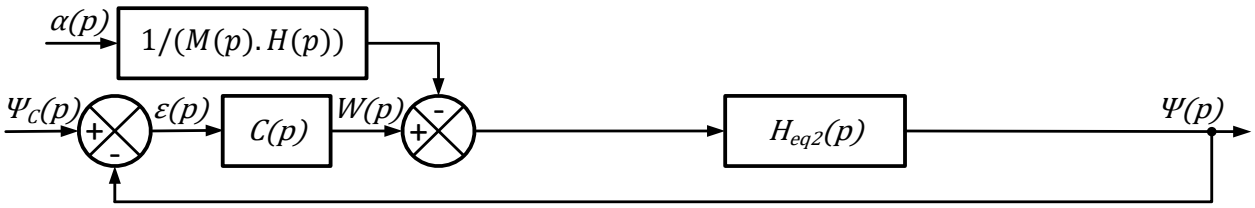
On constate que le schéma-bloc du système est complexe avec notamment deux variables d'entrées et plusieurs boucles imbriquées. Calculer la fonction de transfert boucle fermée du système par **réductions successives** du schéma bloc.





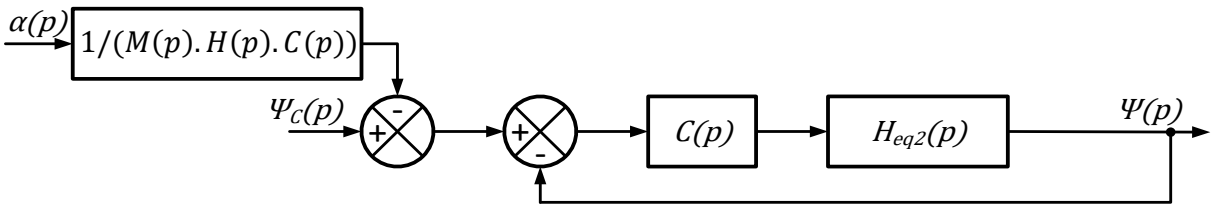


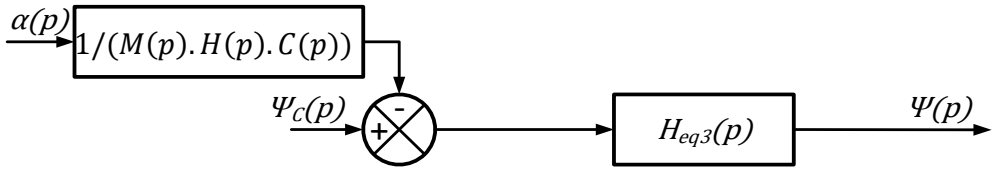
$$H_{eq1} = \frac{M(p).H(p)}{1 + M(p).H(p).G(p)}$$



$$H_{eq2} = \frac{H_{eq1}(p)}{1 + H_{eq1}(p).P(p)} = \frac{\dfrac{M(p).H(p)}{1 + M(p).H(p).G(p)}}{1 + \dfrac{M(p).H(p)}{1 + M(p).H(p).G(p)}.P(p)}$$

$$= \frac{M(p).H(p)}{1 + M(p).H(p).G(p) + M(p).H(p).P(p)}$$





$$H_{eq3}(p) = \frac{C(p).H_{eq2}(p)}{1 + C(p).H_{eq2}(p)} = \frac{C(p).\dfrac{M(p).H(p)}{1 + M(p).H(p).G(p) + M(p).H(p).P(p)}}{1 + C(p).\dfrac{M(p).H(p)}{1 + M(p).H(p).G(p) + M(p).H(p).P(p)}}$$

$$= \frac{C(p).M(p).H(p)}{1 + M(p).H(p).G(p) + M(p).H(p).P(p) + C(p).M(p).H(p)}$$

$$\psi(p) = \left(\psi_C(p) - \frac{1}{M(p).H(p).C(p)}.\alpha(p)\right).H_{eq3}(p)$$