

# C7 - Cinématique des chaînes de solides


1. CINÉMATIQUE DU POINT ET DÉRIVATION VECTORIELLE ..... 1
2. CINÉMATIQUE DU SOLIDE – RELATION DE VARIGNON ET TORSEURS ..... 4
3. COMPOSITION DES VITESSES ET DES TORSEURS CINÉMATIQUES ..... 6
4. FERMETURE CINÉMATIQUE ..... 8
5. TRANSLATIONS PARTICULIÈRES ..... 8


## Compétences attendues

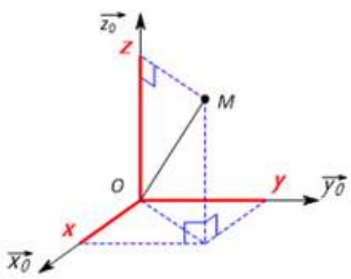
Connaître les **3 systèmes de coordonnées** classiques
Connaître la relation de **dérivation vectorielle**
Savoir calculer **la vitesse et l'accélération** d'un point d'un solide **par dérivation**
Connaître les propriétés de vecteurs **vitesse et accélération** par rapport à une **trajectoire**
Savoir écrire le **torseur cinématique et sa validité** pour une **liaison** quelconque dans sa **base locale (tableau Cours 6)**
Connaître la relation fondamentale sur les torseurs (ou **relation de Varignon**)
Savoir écrire la **composition des torseurs cinématiques** (des **vitesses de rotation** et des **vitesses de déplacement**)
Savoir écrire une **fermeture cinématique**
**Savoir calculer la vitesse de déplacement d'un point quelconque d'un solide**

# 1. CINÉMATIQUE DU POINT ET DÉRIVATION VECTORIELLE

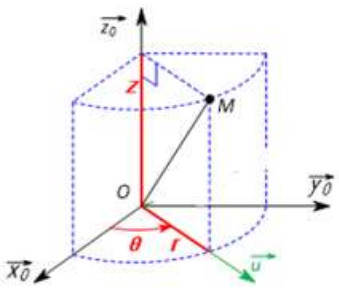
## 1.1. Paramétrage de la position d'un point $M$ dans $\mathcal{R}$

On utilise usuellement les 3 types de coordonnées suivantes pour définir la position d'un point $M$ dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

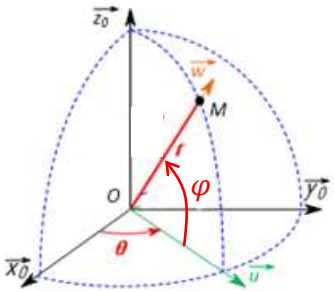
Coordonnées cartésiennes




Coordonnées cylindriques



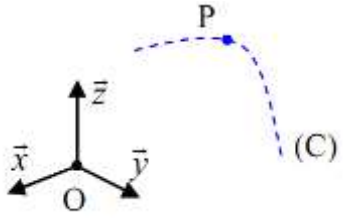

Coordonnées sphériques




| | | |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{OM} = x(t).\overrightarrow{x_0} + y(t).\overrightarrow{y_0} + z(t).\overrightarrow{z_0}$ | $\overrightarrow{OM} = r(t).\vec{u} + z(t).\overrightarrow{z_0}$<br>$\overrightarrow{OM} = r(t).\cos(\theta(t)).\overrightarrow{x_0} + r(t).\sin(\theta(t)).\overrightarrow{y_0} + z(t).\overrightarrow{z_0}$ | $\overrightarrow{OM} = r(t).\vec{w}$<br>$\overrightarrow{OM} = r(t).\cos(\varphi(t)).\vec{u} + r(t)\sin(\varphi(t)).\overrightarrow{z_0}$<br>$= r(t).\cos(\varphi(t)).\cos(\theta(t)).\overrightarrow{x_0}$<br>$+ r(t).\cos(\varphi(t)).\sin(\theta(t)).\overrightarrow{y_0}$<br>$+ r(t)\sin(\varphi(t)).\overrightarrow{z_0}$ |

## 1.2. Vecteur position et trajectoire d'un point

Soit $(t, \mathcal{R})$ un système de référence et $P$ un point mobile par rapport à $\mathcal{R}$.




$P(t)$ est la **position** dans $\mathcal{R}$ de $P$ à la date $t$. La **trajectoire** $(C)$ de $P$ entre les instants $t_1$ et $t_2$ est l'ensemble des points $P(t)$ quant $t$ décrit $[t_1, t_2]$.

On définit la position du point $P$ dans $\mathcal{R}$ par :

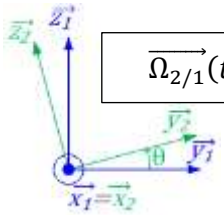
Le **vecteur position $\overrightarrow{OP}$ du point $P$ dans $\mathcal{R}$**

(où $O$ est l'origine du repère $\mathcal{R}$).

## 1.3. Formule de dérivation vectorielle ou formule de BOUR

Soit $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux repères mobiles l'un par rapport à l'autre et $\vec{u}(t)$ un vecteur quelconque. La formule de dérivation vectorielle composée s'écrit :

$$\left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{\mathcal{B}_1} = \left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{\mathcal{B}_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}}(t) \wedge \vec{u}(t)$$




$$\overrightarrow{\Omega_{2/1}}(t) = \dot{\theta}(t).\overrightarrow{x_1}$$

où $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}}(t)$ est le vecteur rotation (aussi appelé vecteur taux de rotation) de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Démonstration : Soit $\vec{u}(t) = x(t).\overrightarrow{x_2} + y(t).\overrightarrow{y_2} + z(t).\overrightarrow{z_2}$

alors $\left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{\mathcal{B}_1} = \underbrace{\dot{x}(t).\overrightarrow{x_2} + \dot{y}(t).\overrightarrow{y_2} + \dot{z}(t).\overrightarrow{z_2}}_{=\left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{\mathcal{B}_2}} + x(t).\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right|_{\mathcal{B}_1} + y(t).\left.\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right|_{\mathcal{B}_1} + z(t).\left.\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right|_{\mathcal{B}_1}$ *(dérivation d'un produit)*

Or $\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right|_{\mathcal{B}_1} = \left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right|_{\mathcal{B}_1} = \vec{0}$ ; $\left.\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right|_{\mathcal{B}_1} = \underbrace{\frac{d(\cos(\theta(t)).\overrightarrow{y_1}+\sin(\theta(t)).\overrightarrow{z_1})}{dt}}_{\text{on exprime } \overrightarrow{y_2} \text{ dans } \mathcal{B}_1} = \dot{\theta}(t).\underbrace{\left[-\sin(\theta(t)).\overrightarrow{y_1} + \cos(\theta(t)).\overrightarrow{z_1}\right]}_{=\overrightarrow{z_2}=\overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{y_2}} = (\dot{\theta}(t).\overrightarrow{x_2}) \wedge \overrightarrow{y_2}$

De même, on trouverait que : $\left.\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right|_{\mathcal{B}_1} = (\dot{\theta}(t).\overrightarrow{x_2}) \wedge \overrightarrow{z_2}$

Et finalement, $\left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{\mathcal{B}_1} = \left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{\mathcal{B}_2} + y(t).(\dot{\theta}(t).\overrightarrow{x_2}) \wedge \overrightarrow{y_2} + z(t).(\dot{\theta}(t).\overrightarrow{x_2}) \wedge \overrightarrow{z_2}$

$$= \left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{\mathcal{B}_2} + \underbrace{(\dot{\theta}(t).\overrightarrow{x_2}) \wedge \{x(t).\overrightarrow{x_2} + y(t).\overrightarrow{y_2} + z(t).\overrightarrow{z_2}\}}_{=\overrightarrow{\Omega_{2/1}}(t)\wedge\vec{u}(t)}$$

## 1.4. Vecteur vitesse d'un point d'un solide

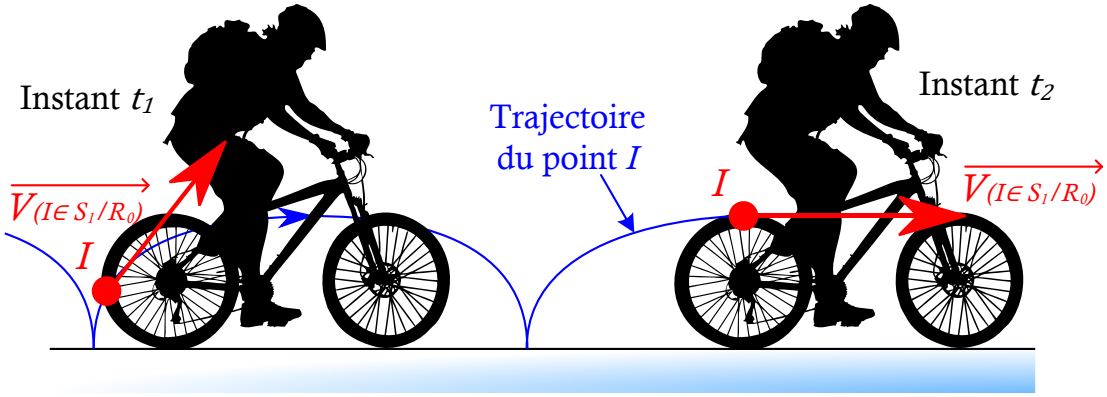
On note le vecteur vitesse du point P du repère $\mathcal{R}_i$ associé au solide $(S_i)$ par rapport au repère $\mathcal{R}_j$ :

$$\vec{V}(P \in i\ /\ j) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AP}}{\mathrm{dt}}\right|_{R_j} \text{ avec } A \text{ point fixe de } \mathcal{R}_j.$$

Le calcul du vecteur vitesse d'un point d'un solide par cette méthode sera parfois qualifié de « calcul direct » en cinématique.

Propriété du vecteur vitesse :

$\vec{V}(P \in i/j)$ « est tangente » en $P(t)$ à la trajectoire de $P$ de $\mathcal{R}_i$ par rapport au repère $\mathcal{R}_j$.

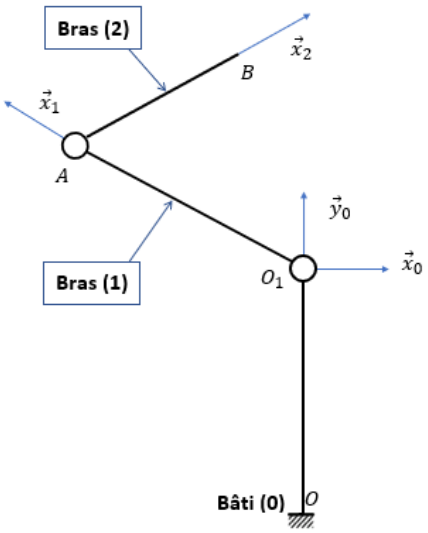



## 1.5. Vecteur accélération d'un point d'un solide

On note le vecteur accélération du point P de $\mathcal{R}_i$ par rapport à $\mathcal{R}_j$ : $\vec{\Gamma}_{P\in i/j}$ ou $\vec{\Gamma}_{P,i/j}$ ou $\vec{\Gamma}(P \in i/j)$

$$\vec{\Gamma}(P \in i/j) = \frac{d\vec{V}(P\in i/j)}{dt}\Big|_{\mathcal{R}_j} = \frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2}\Big|_{\mathcal{R}_j}$$

## 1.6. Exemple de calcul direct des vecteurs vitesse et accélération du robot KUKA.




On pose :

$\begin{cases} \mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \vec{z}) \text{ le repère associé au Socle} \\ \mathcal{R}_1 = (O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \vec{z}) \text{ le repère associé à } S_1 \\ \alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) \\ \beta = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \\ \overrightarrow{OO_1} = h.\overrightarrow{y_0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O_1A} = a.\overrightarrow{x_1} \quad \text{avec } h \text{ et } a \text{ constantes.} \end{cases}$

Tracer les figures planes des paramètres de mouvement :

Par définition : $\overrightarrow{V(A \in 1/0)} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\Big|_{\mathcal{B}_0} = \frac{d(\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1A})}{dt}\Big|_{\mathcal{B}_0} = \frac{d(h.\overrightarrow{y_0} + a.\overrightarrow{x_1})}{dt}\Big|_{\mathcal{R}_0} = \frac{d(h.\overrightarrow{y_0})}{dt}\Big|_{\mathcal{B}_0} + \frac{d(a.\overrightarrow{x_1})}{dt}\Big|_{\mathcal{B}_0}$

$\overrightarrow{V(A \in 1/0)} = \left.\frac{d(h.\overrightarrow{y_0})}{dt}\right|_{\mathcal{B}_0} + \left.\frac{d(a.\overrightarrow{x_1})}{dt}\right|_{\mathcal{B}_0}$ $car\ h = cste\ et\ \overrightarrow{y_0}\ est\ fixe\ dans\ \mathcal{B}_0$

Puis, formule de Bour,

$\overrightarrow{V(A \in 1/0)} = \left.\frac{d(a.\overrightarrow{x_1})}{dt}\right|_{\mathcal{B}_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge (a.\overrightarrow{x_1})$ $a = cste$ et $\overrightarrow{x_1}$ fixe dans $\mathcal{B}_1$ $donc$ $\left.\frac{d(a.\overrightarrow{x_1})}{dt}\right|_{\mathcal{B}_1} = \vec{0}$

$\overrightarrow{V(A \in 1/0)} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1} \wedge (a.\overrightarrow{x_1})$

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{V(A \in 1/0)} = \dot{\alpha}.a.\overrightarrow{y_1}}$ AN : $\left\|\overrightarrow{V(A \in 1/0)}\right\| = |\dot{\alpha}|.a$

Par définition : $\overrightarrow{\Gamma(A \in 1/0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{V(A \in 1/0)}}{dt}\right|_{\mathcal{B}_0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{\Gamma(A \in 1/0)} =$

$=$

$=$

$=$ car $\dot{\alpha} = cste$ et $\overrightarrow{y_1}$ fixe dans $\mathcal{R}_1$

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{\Gamma(A \in 1/0)} =}$ AN : $\left\|\overrightarrow{\Gamma(A \in 1/0)}\right\| =$

## 2. CINÉMATIQUE DU SOLIDE – RELATION DE VARIGNON ET TORSEURS

Vous avez acquis des **compétences** dans le domaine de la cinématique du solide (C6) :

- aborder la notion de **solide (S) et repère associé (R) ;**
- écrire le **vecteur d'une base** d'un repère associé à un solide **dans une autre base** quelconque ;
- pratiquer des calculs vectoriels, **produits scalaire et vectoriel.**

Ces compétences vont vous être utiles par la suite. Cependant, le champ des vitesses **d'un solide** peut être décrit plus aisément grâce à un outil particulier et efficace :

**le torseur cinématique**.

Par définition, un solide est indéformable si bien que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\,, \forall\, (A,B) \in\ R_i\,, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{cste}\ dans\ R_i\ \ (R_i\ repère\ associé\ au\ solide\ S_i).$$

Dérivons ce vecteur par rapport à un repère $R_j$ $\left(repère\ associé\ au\ solide\ S_j\right)$. On peut écrire que :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R_j} = \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R_i} + \vec{\Omega}_{i/j} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

Par ailleurs, $O_j$ étant l'origine du repère $R_j$, on a d'après Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O_jB} - \overrightarrow{O_jA}$ $(et\ (A,B) \in\ R_i)$

La relation précédente devient :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_jB}}{dt}\right|_{R_j} - \left.\frac{d\overrightarrow{O_jA}}{dt}\right|_{R_j} = \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R_i} + \overrightarrow{\Omega_{i/j}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$soit\ \overrightarrow{V(B \in i/j)} - \overrightarrow{V(A \in i/j)} = \overrightarrow{\Omega_{i/j}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$ou\ encore\ \overrightarrow{V(B \in i/j)} - \overrightarrow{V(A \in i/j)} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{i/j}}$$

Et finalement,



$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{V(B \in i/j)}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V(A \in i/j)}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{i/j}}}}$$

**(Relation fondamentale des torseurs ou de Varignon)**

**En conclusion**, quel que soit le point B de $R_i$, sa vitesse par rapport à $R_j$ peut être calculer simplement, sans dérivation, si on connait :

- le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(A \in i/j)}$ d'un point **A quelconque** de $R_i$ par rapport à $R_j$ ;
- le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{i/j}}$.

Le regroupement de ces deux vecteurs constitue le **torseur cinématique du mouvement de $R_i$ par rapport à $R_j$**. On le note :

$$\{\mathcal{V}(i/j)\} : \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{i/j}}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{V(A \in i/j)}}\end{array}\right\}_A$$

Ces deux vecteurs sont aussi nommés **éléments de réduction du torseur** ou **résultante et moment du torseur.**
**A est le point de réduction du torseur**

**Un torseur est une fonction** qui pour tout point ***A*** de l'espace et pour tout instant *t* renvoie deux vecteurs.

L'écriture de ces vecteurs dans le torseur cinématique peut se faire de deux manières :



$$\{\mathcal{V}(i/j)\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega_{i/j}} = \omega_{xi/j}.\vec{x} + \omega_{yi/j}.\vec{y} + \omega_{zi/j}.\vec{z} \\ \overrightarrow{V(A \in i/j)} = V_{xi/j}.\vec{x} + V_{yi/j}.\vec{y} + V_{zi/j}.\vec{z}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll}\omega_{xi/j} & V_{xi/j} \\ \omega_{yi/j} & V_{yi/j} \\ \omega_{zi/j} & V_{zi/j}\end{array}\right\}_{\substack{A \\ B}}$$



La **notation en ligne est à privilégier** car elle permet d'éviter de faire des projections lorsqu'un vecteur possède des composantes exprimées dans des bases différentes (voir les TD précédents).

La notation en colonne permet une visualisation aisée lors de modélisation de mécanisme par des liaisons mécanique (paragraphe 5).



*Remarque : Le champ des accélérations d'un solide, par contre, n'est pas décrit par un torseur.* ***L'accélération s'obtiendra toujours par dérivation*** *du vecteur vitesse (il ne faut donc pas oublier cette compétence !).*

# 3. COMPOSITION DES VITESSES ET DES TORSEURS CINÉMATIQUES

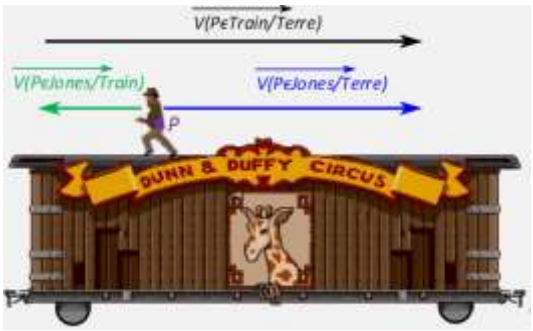
## 3.1. Composition des vecteurs vitesses

Soit 2 solides $S_1$ et $S_2$ en mouvement dans le référentiel $(t, \mathcal{R}_0)$. $\mathcal{R}_i$ est le repère lié au solide $S_i$. On a alors :

$$\overrightarrow{V(P \in 2/0)} = \overrightarrow{V(P \in 2/1)} + \overrightarrow{V(P \in 1/0)}$$

**Exemple :** Marche dans un train

Soit un train se déplaçant en translation avec une vitesse $\overrightarrow{V(P \in Train/Terre)}$, soit un personnage ayant peur des serpents se déplaçant dans le train à une vitesse $\overrightarrow{V(P \in Jones/Train)}$.



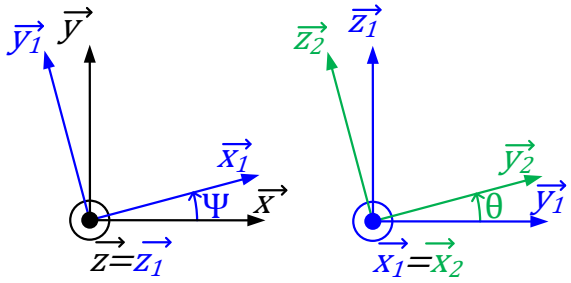

Alors, la vitesse du personnage par rapport à la Terre $\overrightarrow{V(P \in Jones/Terre)}$ sera donnée par :

## 3.2. Composition des vecteurs rotations.

Soit deux vecteurs vitesse instantanée de rotation $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\Psi} \cdot \overrightarrow{z_1}$ et $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{x_1}$

On a simplement composition :

$$\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$




Soit : $\overrightarrow{\Omega_{2/0}} =$

**Démonstration :**

Considérons 3 repères $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ et un vecteur $\vec{u}(t)$ quelconque. En appliquant la formule de dérivation composée précédente, on obtient :

$$\left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = \left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_0/\mathcal{R}_1}}(t) \wedge \vec{u}(t) \quad \text{et} \quad \left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_2} = \left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2}}(t) \wedge \vec{u}(t)$$

$$\left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0}}(t) \wedge \vec{u}(t)$$

D'où, en additionnant les trois relations : $\vec{0} = \left(\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0}}(t) + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_0/\mathcal{R}_1}}(t) + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2}}(t)\right) \wedge \vec{u}(t)$

$\vec{u}(t)$ étant quelconque, on en déduit la **composition des vecteurs vitesses de rotations** :

$$\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0}}(t) = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}(t) + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}}(t) \quad (plus\ simplement, \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}})$$

## 3.3. Relation de Chasles ou de composition des torseurs cinématiques



La relation de CHASLES s'applique aux torseurs cinématiques (généralisation) :

Soit 3 repères, $R_i$, $R_j$ et $R_k$ alors, on a la relation torsorielle suivante :

$$\{\mathcal{V}(i/k)\} = \{\mathcal{V}(i/j)\} + \{\mathcal{V}(j/k)\}$$

Et pour un point A quelconque de l'espace, on a les deux relations vectorielles ci-dessous :

$$\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{i/k}} \\ \overrightarrow{V(A \in i/k)}\end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{i/j}} \\ \overrightarrow{V(A \in i/j)}\end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{j/k}} \\ \overrightarrow{V(A \in j/k)}\end{matrix}\right\}_A$$

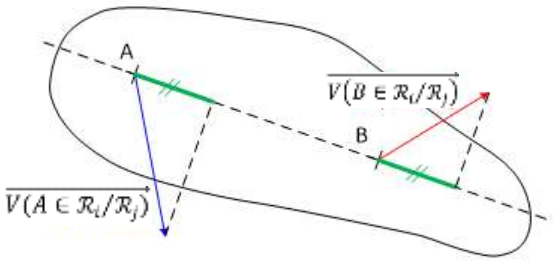
*Cette composition permet de passer d'un mouvement complexe à une somme de mouvements simples, faciles à écrire, associés aux torseurs cinématiques de liaisons normalisées.*

*Elle va aussi nous permettre d'écrire 6 équations scalaires reliant les paramètres des mouvements du mécanisme.*

## 3.4. Champ équiprojectif

On montre que les vecteurs vitesse des points d'un solide vérifient la relation d'équiprojectivité :

$\forall A$ et $B \in \mathcal{R}_i$, $\quad \overrightarrow{V(A \in i/j)}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V(B \in i/j)}.\overrightarrow{AB}$




Démonstration :

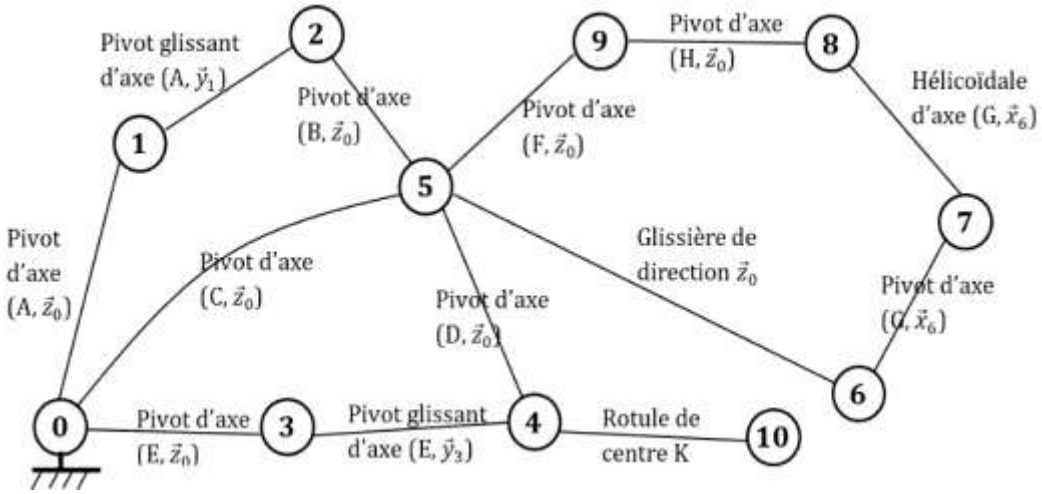
D'après Varignon, $\overrightarrow{V(A \in i/j)} = \overrightarrow{V(B \in i/j)} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{i/j}}$

Donc, $\overrightarrow{V(A \in i/j)}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{V(B \in i/j)} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{i/j}}).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V(B \in i/j)}.\overrightarrow{AB}$

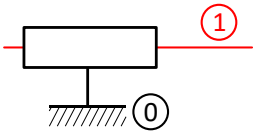
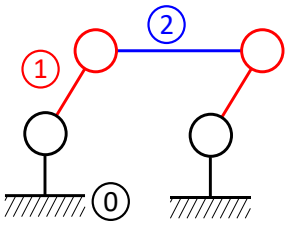
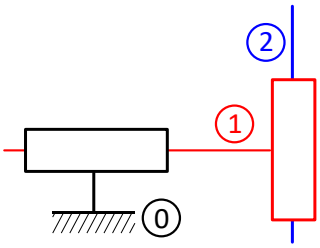
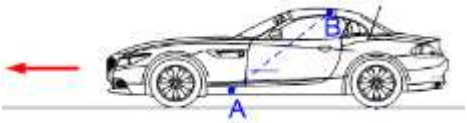
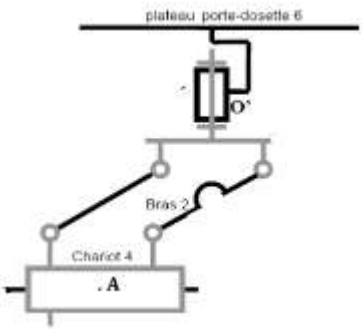
## 4. FERMETURE CINÉMATIQUE

Lorsque le graphe de liaison présente un ou plusieurs chaînes fermées indépendantes, on écrit des **fermetures cinématiques**. Chaque fermeture génère 6 équations scalaires liant les paramètres de mouvement du mécanisme. Une fermeture cinématique est équivalente à une composition des torseurs cinématiques.

Exemple :




## 5. TRANSLATIONS PARTICULIÈRES

| Si ces trajectoires sont des droites, on parle de mouvement de **translation rectiligne**. | Si ces trajectoires sont des cercles, on parle de mouvement de **translation circulaire** | Si ces trajectoires sont quelconques, on parle de **translation**. |
|---|---|---|
|  |  |  |
| 1/0 = translation rectiligne (Cas classique : 1 et en liaison glissière avec 0) | 2/0 = translation circulaire (Parallélogramme déformable par utilisation de liaisons pivots) | 2/0 = translation (Association de plusieurs liaisons glissières) |
| <br>Véhicule en ligne droite<br><br>Le châssis (1) de la voiture est en translation par rapport au sol (0). | <br>5 par rapport à 4 | <br>Machine à mesurer tridimensionnelle |