

## Correction des applications de cours du chapitre OPP1

### Application n°1 : Des conversions dans tous les sens

- $3,5 \text{ dm} = 3,5 \times 10^1 \text{ m}$
- $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{60 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{60 \times 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \underline{17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$
- $3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = \frac{3 \text{ km}}{1 \text{ s}} = \frac{3 \text{ km}}{1/3600 \text{ h}} = \underline{1 \times 10^4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}$
- $4,6 \text{ cm}^3 = 4,6 \text{ mL} = \underline{4,6 \times 10^{-3} \text{ L}}$
- $12 \text{ } \mu\text{m} = 12 \times 10^{-6} \text{ m} = 12 \times 10^{-6} \times 10^{-2} \text{ km} = 12 \times 10^{-8} \text{ km}$   
 $= \underline{1,2 \times 10^{-7} \text{ km}}$
- $12 \text{ mm}^2 = 12 \times 10^{-3} \text{ m} \times 10^{-3} \text{ m} = 12 \times 10^{-6} \text{ m}^2 = \underline{1,2 \times 10^{-5} \text{ m}^2}$
- $5,4 \text{ L} = \underline{5,4 \times 10^{-3} \text{ m}^3}$
- $3,6 \text{ eV} = \underline{3,6 \times 10^{-19} \text{ J}}$
- $67 \text{ hL} = 67 \times 10^2 \text{ L} = 6,7 \times 10^3 \text{ L} = 6,7 \text{ m}^3 = \underline{6,7 \times 10^1 \text{ dm}^3}$
- $35^\circ \text{C} = \underline{3,1 \times 10^2 \text{ K}}$
- $24 \text{ mL} = 24 \times 10^{-3} \text{ L} = 24 \times 10^{-2} \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 24 \times 10^{-6} \text{ m}^3$   
 $= \underline{2,4 \times 10^{-5} \text{ m}^3}$
- $3,6 \times 10^6 \text{ mm} = 3,6 \times 10^6 \times 10^{-3} \text{ m} = 3,6 \times 10^6 \times 10^{-3} \times 10^{-3} \text{ km}$   
 $= \underline{3,6 \times 10^{-6} \text{ km}}$

### Application n°2 : Déterminer la dimension et l'unité SI de quelques grandeurs physiques dérivées

1. Par définition, l'intensité du courant électrique  $i$  est une charge  $q$  divisée par un temps  $\Delta t$ . En faisant à l'équation aux dimensions, il vient :

$$[i] = \frac{[q]}{[\Delta t]} \Leftrightarrow [q] = [i] \times [\Delta t]$$

$$[\Delta t] \Leftrightarrow \underline{[q] = \text{I} \cdot \text{T}} \quad (\text{en A} \cdot \text{s})$$

2. Par définition, la pression  $P$  est une force par unité de surface  $S$ . En passant à l'équation aux dimensions, il vient :

$$[P] = \frac{[F]}{[S]} \Rightarrow [P] = [F] \times [S].$$

Or  $[S] = L^2$  et  $[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$

D'où  $[P] = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^2$

$\Rightarrow [P] = M \cdot L^3 \cdot T^{-2}$  (en  $kg \cdot m^3 \cdot s^{-2}$ )

2<sup>ème</sup> loi de Newton à 1D  
 $F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$

3. Par définition de l'énergie cinétique :  $E_c = \frac{1}{2} mv^2$ .

D'où  $[E] = [m] \times [v]^2$

$\Rightarrow [E] = M \cdot (L \cdot T^{-1})^2$

Donc la dimension d'une énergie (que l'on note généralement  $E$ ) est :  $[E] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$  (en  $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$ )

4. Par définition, l'énergie  $E$  est une puissance  $P$  multipliée par un temps  $\Delta t$  (cf. cours d'enseignement scientifique de Terminale). D'où  $E = P \times \Delta t$ . En passant à l'équation aux dimensions, il vient :

$$[E] = [P] \times [\Delta t]$$

$$\Rightarrow M \cdot L^2 \cdot T^{-2} = [P] \times T$$

$$\Rightarrow [P] = M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \quad (\text{en } kg \cdot m^2 \cdot s^{-3})$$

5. Par définition, la puissance électrique  $P$  aux bornes d'un dipôle électrique parcouru par un courant  $i$  et soumis à une différence de potentiel  $U$  a pour expression :  $P = u \times i$ .

D'où  $[P] = [u] \times [i] \Rightarrow [u] = \frac{[P]}{[i]}$

$$\Rightarrow [u] = \frac{M \cdot L^2 \cdot T^{-3}}{I}$$

$\Rightarrow [u] = M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot I^{-1}$  (en  $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$ )



6. D'après la loi d'Ohm,  $U = RI^2$  d'où  $[R] = \frac{[U]}{[I]^2}$   
 Donc  $[R] = \frac{M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot I^{-1}}{I^2}$

$\Rightarrow [R] = M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot I^{-3}$  (en  $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-3}$ )

7.  $[m \times \tau] = [m] \times [\tau] = M \cdot T$

8.  $[i \times \frac{\tau}{v}] = [i] \times \frac{[\tau]}{[v]} = I \cdot T \cdot (L \cdot T^{-1})^{-1} = L^{-1} T^2 \cdot I$

9.  $\left[ \frac{dx}{dt} \right] = \frac{[dx]}{[dt]} = L \cdot T^{-1}$  *La dérivée d'une grandeur par rapport à une autre est un quotient de deux toutes petites quantités de ces grandeurs*

10.  $\left[ \frac{dv}{dx} \right] = \frac{[dv]}{[dx]} = \frac{L \cdot T^{-1}}{L} = T^{-1}$

11.  $\left[ \int v(t) dt \right] = [v(t)] \times [dt] = L \cdot T \cdot T^{-1} = L$   
*(l'intégrale correspond à une somme d'éléments finis)*

12.  $\left[ \int x(t) dt \right] = [x(t)] \times [dt] = L \cdot T$

13.  $\left[ \int y(x) dx \right] = [y(x)] \times [dx] = L \cdot L = L^2$

14.  $\left[ \frac{x}{v\tau} \right] = \frac{[x]}{[v] \times [\tau]} = \frac{L}{L \cdot T^{-1} \cdot T} = \frac{L}{L} = 1$

Le rapport est bien adimensionné, on peut donc prendre son cosinus

15.  $\left[ \frac{t}{\tau} \right] = \frac{[t]}{[\tau]} = \frac{T}{T} = 1$

Même remarque

16.  $[xL] = [x] \cdot [L] = L^2$  : on ne peut pas prendre le sinus d'une quantité qui possède une dimension.

### Application n° 3 : Détermination et vérification de dimensions de grandeurs physiques

1. D'une part :  $[v^2] = [v]^2 = (L \cdot T^{-1})^2 = \underline{L^2 \cdot T^{-2}}$   
 D'autre part :  $[2ax] = [a] \cdot [x] = L \cdot T^{-2} \cdot L = \underline{L^2 \cdot T^{-2}}$   
 $v^2$  et  $2ax$  ont la même dimension donc cette formule est homogène.

2. On remarque qu'une résistance et le carré d'une résistance sont additionnées au dénominateur du terme  $\frac{E}{R + R^2}$ . Cette relation n'est donc pas homogène.

3. D'une part  $[\tau] = T$   
 D'autre part  $\left[ 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right] = \left( \frac{[l]}{[g]} \right)^{1/2} = \left( \frac{L}{L \cdot T^{-2}} \right)^{1/2} = (T^2)^{1/2} = T$   
 Cette relation est donc homogène
- 2<sup>ème</sup> loi de Newton  
 $m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

4. D'après la loi de Hooke,  $F = k|l - l_0|$ . En passant à l'équation aux dimensions, il vient :  $[F] = [k|l - l_0|]$

Soit :  $[F] = [k] \times [l - l_0]$

$\Leftrightarrow M \cdot L \cdot T^{-2} = [k] \times L$

$\Leftrightarrow \underline{[k] = M \cdot T^{-2}}$

5. La force d'interaction gravitationnelle entre deux corps de masses  $m_A$  et  $m_B$  séparés d'une distance  $d$  a pour expression :  $F_g = G \frac{m_A m_B}{d^2}$  (en norme). D'où :

$$[F_g] = [G] \times \frac{[m_A] \times [m_B]}{[d]^2}$$

$$\Leftrightarrow M \cdot L \cdot T^{-2} = [G] \times \frac{M^2}{L^2} \Rightarrow \underline{[G] = M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}}$$



Application n° 4: Rayon d'un trou noir

Q1) Suivons la point méthode étape par étape.

$$1. R \text{ dépend de : } \left. \begin{array}{l} M \text{ (sa masse)} \\ g \text{ (constante de gravitation universelle)} \\ c \text{ (vitesse de la lumière)} \end{array} \right\}$$

2. On suppose que  $R = K \cdot M^\alpha \cdot g^\beta \cdot c^\gamma$ , où  $K$  est une constante adimensionnée.

$$3. [M] = M$$

$$[g] = M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2} \quad (\text{cf. application n° 3})$$

$$[c] = L \cdot T^{-1}$$

4. On en déduit l'équation aux dimensions:

$$[R] = [K] \cdot [M]^\alpha \cdot [g]^\beta \cdot [c]^\gamma$$

$$\Rightarrow L = M^\alpha \cdot (M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2})^\beta \cdot (L \cdot T^{-1})^\gamma$$

$$\Rightarrow L = M^{\alpha-\beta} \cdot L^{3\beta+\gamma} \cdot T^{-2\beta-\gamma}$$

$$L = M^0 \cdot L^1 \cdot T^0$$

5. et 6.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 3\beta + \gamma = 1 \\ -2\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ 3\beta - 2\beta = 1 \\ \gamma = -2\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -2 \end{cases}$$

7. On en déduit que  $R = K \cdot M^1 \cdot g^1 \cdot c^{-2}$

$$\Rightarrow R = K \cdot \frac{gM}{c^2}$$

Q2) En sachant que  $K=2$ , on a finalement  $R = \frac{2GM}{c^2}$

Si  $M = M_{\odot}$ , alors  $R = \frac{2GM_{\odot}}{c^2}$

AN :  $R = \frac{2 \times \overset{3CS}{6,67 \times 10^{-11}} \times \overset{2CS}{2,0 \times 10^{30}}}{(\overset{3CS}{3,00 \times 10^8})^2}$

$\Rightarrow R = 3,0 \times 10^3 \text{ m}$

$\Rightarrow \underline{R = 3,0 \text{ km}}$

↑ aux chiffres significatifs !  
↳ on n'en garde que deux.

Q3) La masse du trou noir au centre de notre galaxie est de  $M_{\text{TN}} = 4 \times 10^6 \times 2,0 \times 10^{30} \text{ kg} = 8 \times 10^{36} \text{ kg}$ .

D'où  $R_{\text{TN}} = \frac{2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 8 \times 10^{36}}{(3,00 \times 10^8)^2}$

$\Rightarrow R_{\text{TN}} = 1 \times 10^{10} \text{ m}$

$\Rightarrow \underline{R_{\text{TN}} = 1 \times 10^7 \text{ km}}$  ( $\approx 10$  millions de km)

Comparons ce rayon avec celui de notre Soleil :

$$\frac{R_{\text{TN}}}{R_{\odot}} = \frac{1 \times 10^{10}}{7,0 \times 10^8} \approx 1 \times 10^1$$

Le rayon du trou noir au centre de notre galaxie est environ 10 fois plus gros que celui de notre Soleil, sachant que sa masse est 4 millions de fois plus élevée : cela montre à quel point les trous noirs sont des objets denses.