

TD OPP1 : Analyse dimensionnelle**EX 1 – Dimensions de grandeurs physiques dérivées**

▷ Donner les dimensions des grandeurs physiques dérivées suivantes en fonction des dimensions des grandeurs physiques fondamentales :

1. Constante k sachant que la force d'interaction électrostatique entre deux charges q et q' distantes de r s'écrit $f = \frac{kqq'}{r^2}$.
2. Constante R intervenant dans l'équation d'état des gaz parfaits.
3. Constante de BOLTZMANN k_B , sachant qu'on la trouve en physique dans des termes du type $\exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$ où m est une masse, g le champ de pesanteur, z une altitude et T la température.

EX 2 – Homogénéité de formules

- Q 1.** On exprime la vitesse d'un corps par l'équation $v(t) = At^3 - Bt$ où t représente le temps. Déterminer les dimensions de A et B ?
- Q 2.** Trois étudiants établissent les équations suivantes dans lesquelles x désigne la distance parcourue, a l'accélération, t le temps et l'indice 0 indique que l'on considère la quantité à l'instant $t = 0$ s :
- Cas n°1 : $x(t) = vt^2$;
 - Cas n°2 : $x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.
- Parmi ces équations, indiquer lesquelles sont possibles.

EX 3 – Analyse dimensionnelle

- Q 1.** Une étude physique montre que la célérité du son dans un gaz n'est fonction que de la masse volumique ρ et du coefficient de compressibilité χ (χ est homogène à l'inverse d'une pression). Établir la relation donnant la célérité v en fonction de ρ et χ .
- Q 2.** Les fréquences propres d'une corde vibrante ne dépendent que de sa longueur, sa tension, et sa masse linéique (masse par unité de longueur). Établir la relation donnant ces fréquences propres f_n en fonction de la longueur L , de la tension T (homogène à une force) et de la masse linéique μ .
- Q 3.** La vitesse d'un satellite en orbite autour de la Terre est susceptible de dépendre de la masse de la Terre M_T , du rayon de l'orbite R et de la constante de gravitation $\mathcal{G}$. En donner une expression plausible de la vitesse v du satellite.
- Q 4.** Un objet se déplaçant à une vitesse v par rapport à un fluide de masse volumique ρ et présentant une aire $\mathcal{A}$ à ce fluide subit une force de traînée $\vec{F}$ s'opposant à son mouvement. L'influence de la géométrie de l'objet est prise en compte par un coefficient de proportionnalité C (sans dimension), le coefficient de traînée. Déterminer l'expression de la force de traînée F .

EX 4 – Hauteur maximale d'une montagne sur une planète

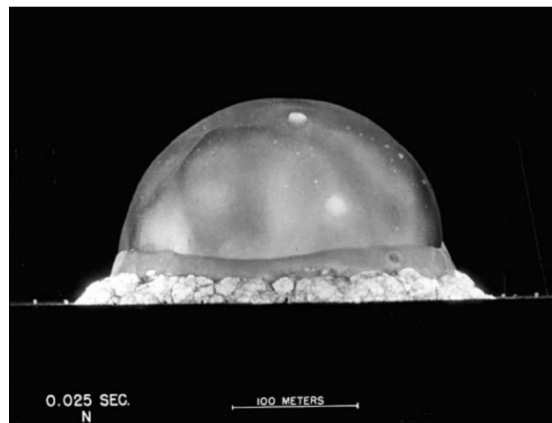
▷ On cherche à déterminer la hauteur maximale d'une montagne qu'une planète peut avoir. Une première approche consiste à construire une équation aux dimensions en utilisant les paramètres physiques du problème. On suppose que la montagne a une hauteur caractéristique H et qu'elle est soumise à une accélération de pesanteur g . On considère que sous l'effet de son propre poids, la roche située à sa base peut fondre et limiter la taille maximale atteinte. Cela fait intervenir dans le problème la chaleur latente de fusion de la roche, notée L_f , homogène à une énergie par unité de masse, ainsi que sa masse volumique ρ . Ces deux quantités sont propres à la roche.

- Q 1.** Donner la dimension des quatre grandeurs intervenant dans le problème.
- Q 2.** Déterminer par analyse dimensionnelle une expression de H en fonction des grandeurs ρ , g et L_f .

- Q 3.** L'accélération de la pesanteur est 2,6 fois plus faible sur Mars que sur la Terre. En déduire, à partir de vos connaissances (la plus haute montagne sur Terre culmine à ...), quelle peut être la taille maximale d'une montagne sur Mars. On supposera identiques les roches sur Mars et sur Terre. Comparer ce résultat à la hauteur du Mont Olympus sur Mars, dont l'altitude est de 22 km.

EX 5 – Énergie dégagée par l'explosion nucléaire Trinity

Trinity est le nom de code du premier essai nucléaire de l'histoire. L'explosion eut lieu le 16 juillet 1945 à Alamogordo dans le Nouveau Mexique dans une zone désertique nommée Jornada del Muerto. Étant l'ultime étape du projet Manhattan, lancé par les États-Unis durant la seconde guerre mondiale, les données concernant ce projet étaient classées secrètes par la CIA. Pourtant, le physicien anglais G.I. TAYLOR a pu estimer l'ordre de grandeur de l'énergie dégagée par cette explosion par une analyse dimensionnelle judicieuse sur la base d'un film. Le film permet de suivre au cours du temps le rayon $R(t)$ du "nuage" formé par l'explosion.



Des connaissances en mécanique des fluides et thermodynamique suggèrent que les paramètres influant sur le rayon du nuage sont évidemment le temps t s'étant écoulé depuis l'explosion, l'énergie E libérée par l'explosion mais aussi la masse volumique de l'air $\rho = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Plusieurs années plus tard, la CIA a révélé que les mesures réalisées sur place permettaient d'estimer que l'énergie libérée par la bombe était d'environ 20 kilotonnes de TNT (sachant que l'explosion de 1 kg de TNT libère environ $4 \times 10^6 \text{ J}$).

Question : Estimer, comme le physicien TAYLOR, la valeur numérique de l'énergie libérée par l'explosion en kilotonnes de TNT.

(Indication : On se contentera de prendre 1 comme coefficient adimensionné.)