

Chapitre OPP1 : Analyse dimensionnelle

Plan du cours

I. Grandeurs physiques, notion de dimension et d'unités	1
I. 1 - Grandeur physique	1
I. 2 - Dimension et unités des grandeurs physiques fondamentales	1
I. 3 - Sous-multiples et multiples d'unités, conversions (révisions de lycée)	2
I. 4 - Grandeurs physiques dérivées, dimensions correspondantes	3
II. L'analyse dimensionnelle, un outil de vérification et de prédiction	4
II. 1 - Vérifier l'homogénéité des formules	4
II. 2 - Prédire l'expression littérale d'une formule	5

Introduction

▷ En sciences physiques et chimiques, la réponse à un problème ne peut pas être simplement un résultat numérique. Il faut avoir conscience que le résultat numérique présenté est l'aboutissement d'une **démarche** englobant un raisonnement ; ce résultat quantifie une **grandeur physique** qui elle-même caractérise un **système d'étude** (objet d'étude). Cette grandeur physique est associée à une **dimension** et la valeur numérique de cette grandeur est exprimée dans une **unité**. On comprend alors l'intérêt de ce chapitre qui est au carrefour de tous ceux que vous rencontrerez lors de vos études supérieures.

I. Grandeurs physiques, notion de dimension et d'unités

I. 1 - Grandeur physique



Définition n°1 : Grandeur physique

▷ On appelle grandeur physique, ou simplement grandeur, toute propriété d'un phénomène physique, d'un corps ou d'une substance, qui peut être mesurée ou calculée, et dont les valeurs possibles s'expriment à l'aide d'un nombre (réel ou complexe) et d'une référence (comme une unité de mesure, une échelle de valeurs ou une échelle ordinale).



Exemples

- température
- vitesse
- tension électrique

I. 2 - Dimension et unités des grandeurs physiques fondamentales



Définition n°2 : Dimension d'une grandeur physique

▷ Propriété commune aux grandeurs physiques qui peuvent s'exprimer avec les mêmes unités. Seules des grandeurs de même dimension peuvent être comparées. Elles sont alors dites **homogènes**. La dimension d'une grandeur physique X est notée entre crochets $[X]$.

Exemple

La dimension de la largeur ℓ d'une feuille de papier A4 est une **longueur**. On la note $[L]$. La largeur ℓ de la feuille de papier A4 vaut 21,0 cm dans le système métrique et 0,689 pieds dans le système anglo-saxon. Écrire $\ell = 21,0 \text{ cm} = 0,689$ pieds a du sens, mais écrire $21,0 = 0,689$ est évidemment aberrant.

Définition n°3 : Unité de mesure

► Une représentation numérique d'une grandeur physique n'a de sens que si elle est accompagnée d'une **unité**. Plusieurs unités différentes peuvent être associées à une même dimension physique.

Remarques

- Une représentation numérique d'une grandeur physique n'a de sens que si elle est accompagnée d'une unité.
- Plusieurs unités différentes peuvent être associées à une même dimension physique.
- Certaines grandeurs sont sans dimension, comme les nombres, les angles, le rapport de deux grandeurs dimensionnées.
- L'exemple des angles montre qu'une grandeur sans dimension n'est pas forcément sans unité (rad et °).

► On comprend alors la nécessité d'un système d'unités cohérent au niveau international : c'est le fameux **système international (S.I.)**, datant de 1960. Il existe **7 grandeurs physiques fondamentales**, c'est-à-dire indépendantes et à partir desquelles on peut **déduire** toute grandeur physique. En classe de MPSI, il faut connaître par cœur ces 7 grandeurs fondamentales. ♥

Grandeur physique	Symbole de la dimension	Unité S.I. associée	Symbole de l'unité
Masse	M	Kilogramme	kg
Longueur	L	Mètre	m
Temps	T	Seconde	s
Température	Θ	Kelvin	K
Quantité de matière	N	Mole	mol
Intensité du courant électrique	I	Ampère	A
Intensité lumineuse	J	Candela	cd

I. 3 - Sous-multiples et multiples d'unités, conversions (révisions de lycée)

► Les puissances de 10 sont utiles pour écrire de manière condensée des petits nombres et des grands nombres.

Préfixe	femto	pico	nano	micro	milli	centi	déci	-	déca	hecto	kilo	Méga	Giga	Téra
Symbole	f	p	n	μ	m	c	d	-	da	h	k	M	G	T
Puissance de 10	-15	-12	-9	-6	-3	-2	-1	0	1	2	3	6	9	12

On cite aussi d'autres conversions utiles ♥ :

- conversion des volumes : $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$ et $1 \text{ m}^3 = 1 \text{ kL} = 1\,000 \text{ L}$,
- conversion des températures : $T(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273,15$,
- conversion des pressions : $1 \text{ bar} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$,
- conversion des temps : $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ et $1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$,
- conversion des vitesses : $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$,
- conversion des énergies : $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

**Application n°1 : Des conversions dans tous les sens**

▷ Dans chaque situation, convertir l'unité de départ dans l'unité d'arrivée demandée.

$$— 3,5 \text{ dm} = \dots\dots\dots \text{m}$$

$$— 5,4 \text{ L} = \dots\dots\dots \text{m}^3$$

$$— 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \dots\dots\dots \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$— 3,6 \text{ eV} = \dots\dots\dots \text{J}$$

$$— 3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = \dots\dots\dots \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$— 67 \text{ hL} = \dots\dots\dots \text{dm}^3$$

$$— 4,6 \text{ cm}^3 = \dots\dots\dots \text{L}$$

$$— 35^\circ\text{C} = \dots\dots\dots \text{K}$$

$$— 12 \text{ } \mu\text{m} = \dots\dots\dots \text{hm}$$

$$— 24 \text{ mL} = \dots\dots\dots \text{m}^3$$

$$— 12 \text{ mm}^2 = \dots\dots\dots \text{m}^2$$

$$— 3,6 \cdot 10^6 \text{ nm} = \dots\dots\dots \text{km}$$

I. 4 - Grandeurs physiques dérivées, dimensions correspondantes**Définition n°4 : grandeur physique dérivée**

▷ Grandeur physique découlant des 7 grandeurs physiques fondamentales, par multiplication ou division. La grandeur physique dérivée est obtenue par des relations qui peuvent être de deux types :

$$— \text{des } \underline{\text{définitions}} : \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \text{ dont on déduit "vitesse} = \frac{\text{longueur}}{\text{temps}} \text{"}.$$

$$— \text{des lois de } \underline{\text{physique}} : \vec{F} = m\vec{a} \text{ dont on déduit : "force} = \text{masse} \times \frac{\text{longueur}}{\text{temps} \times \text{temps}} = \text{masse} \times \frac{\text{longueur}}{\text{temps}^2} \text{"}.$$

▷ Des règles de calcul existent pour déterminer la dimension d'une grandeur physique, et elles sont à connaître par cœur.

**Propriété n°1 : Calculs portant sur les dimensions d'une grandeur physique**

— **La dimension d'une somme de grandeurs physiques** est unique : $[A + B] = [A] = [B]$.

Par contre, l'addition (ou soustraction) de deux dimensions différentes **N'A PAS DE SENS !** C'est à dire qu'il faut nécessairement $[A] = [B]$ pour pouvoir réaliser l'opération " $A + B$ ";

— **La dimension d'un produit de grandeurs** est le produit des dimensions de chaque grandeur : $[A \times B] = [A] \times [B]$;

— Lorsqu'une grandeur physique x n'admet pas de dimension (les angles par exemple), on note : $[x] = 1$. Ainsi multiplier une grandeur par un nombre sans dimension ne change pas la dimension de ce dernier ;

— **La dimension de la dérivée d'une grandeur** est la dimension de la grandeur divisée par la dimension de la variable par rapport à laquelle on dérive. La dérivée de X par une distance a la dimension de X divisée par une longueur ;

— **La dimension de l'intégrale d'une grandeur** est la dimension de la grandeur multipliée par celle de la variable par rapport à laquelle on intègre.

— **Les arguments des fonctions usuelles** (cos, sin, exp...) sont sans dimension.

— Attention à la fonction logarithme népérien où ceci n'est pas vérifié en raison de la propriété $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$.

**Remarque**

On dit d'une formule qu'elle est **homogène** lorsque les dimensions sont correctes. Dans le cas contraire, la formule est **inhomogène** (chose que je vous reprocherai souvent dans les copies).

Application n°2 : Déterminer la dimension et l'unité S.I de quelques grandeurs physiques dérivées

▷ Pour chaque grandeur physique dérivée, déterminer sa dimension ainsi que son unité S.I.

1. Charge électrique
2. Pression
3. Énergie
4. Puissance
5. Tension (ou différence de potentiel)
6. Résistance électrique

▷ Donner la dimension des grandeurs suivantes :

7. $m \times \tau$ où m est une masse et τ un temps
8. $i \times \frac{\tau}{v}$ où i est une intensité électrique, τ un temps et v une vitesse.
9. $\frac{dx}{dt}$ avec x une longueur et t un temps
10. $\frac{dv}{dx}$ avec v une vitesse et x une longueur
11. $\int v(t)dt$ avec $v(t)$ une vitesse dépendant du temps et t un temps
12. $\int x(t)dt$ avec $x(t)$ une position dépendant du temps et t un temps
13. $\int y(x)dx$ avec $y(x)$ une position dépendant d'une autre position et x cette autre position

▷ Vérifier si l'on peut calculer les fonctions suivantes :

14. $\cos\left(\frac{x}{v\tau}\right)$ où x est une longueur, τ un temps et v une vitesse
15. $e^{t/\tau}$ où t et τ sont des temps
16. $\sin(xL)$ où x et L sont des distances

II. L'analyse dimensionnelle, un outil de vérification et de prédiction

II. 1 - Vérifier l'homogénéité des formules

Attention !

Une relation inhomogène est forcément fausse ! Cependant, la réciproque n'est pas toujours vraie : une relation homogène n'est pas forcément bonne...

Méthode : déterminer ou vérifier la dimension d'une grandeur physique

— Pour déterminer la dimension d'une grandeur physique

1. Trouver une formule dans laquelle la grandeur apparaît, et isoler la grandeur physique en question.
2. En déduire l'équation aux dimensions, en mettant entre crochet chaque terme.
3. Remplacer chaque terme par sa dimension lorsqu'elle est connue.
4. Si des éléments ont une dimension inconnue, revenir à la première étape en utilisant une autre formule avec d'autres dimensions connues.
5. Simplifier le résultat.

— Pour vérifier l'homogénéité d'une équation, on applique la même méthode des deux côtés de l'équation et on vérifie que le résultat est identique des deux côtés.

**Application n°3 : Détermination et vérification de dimensions de grandeurs physiques**

▷ Indiquer, en justifiant la réponse si ces formules sont homogènes :

1. $v^2 = 2ax$ où v est une vitesse, a une accélération et x une position.
2. $I = \frac{E}{r + R^2}$ où I est une intensité électrique, E une tension, r et R des résistances.
3. $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ où T est un temps, ℓ est une longueur et g le champ de pesanteur terrestre.

▷ Déterminer la dimension des grandeurs physiques suivantes :

4. Raideur du ressort de constante de raideur k qui apparaît dans la loi de HOOKE : $F = -k(\ell - \ell_0)$ où F est une force, ℓ et ℓ_0 respectivement la longueur d'un ressort étiré ou comprimé et la longueur du ressort au repos.
5. Constante d'interaction gravitationnelle $\mathcal{G}$.

**Remarque**

La formule 3. est la formule reliant la période temporelle des oscillations d'un pendule simple à la longueur ℓ séparant le point d'accroche de la cordelette à la masse. C'est une formule très importante que nous démontrerons en cours dans les semaines/mois à venir.

II. 2 - Prédire l'expression littérale d'une formule

Il est possible d'utiliser les dimensions d'un système physique afin de prédire une formule. C'est ce que l'on appelle l'analyse dimensionnelle. Cette méthode très puissante vous servira de nombreuses fois dans les mois/années à venir.

**Méthode : Trouver une relation par analyse dimensionnelle**

1. S'intéresser d'abord aux grandeurs physiques pertinentes, celles qui peuvent avoir un lien avec la grandeur que l'on cherche. Les lister.
2. Supposer ensuite que ces grandeurs sont unies par une relation simple de puissance. L'écrire. On mettra en préfacteur une constante adimensionnée dont on ne connaît pas la valeur, car la méthode d'analyse dimensionnelle ne permet pas de la déterminer.
3. Déterminer la dimension de chaque terme présent dans la relation précédente.
4. En déduire l'équation aux dimensions.
5. Égaliser les puissances à droite et gauche de l'équation aux dimensions pour écrire un système d'équation algébriques.
6. Résoudre le système d'équations.
7. Écrire le résultat de l'analyse dimensionnelle.

**Application n°4 : Rayon d'un trou noir**

▷ Le rayon R d'un trou noir ne dépend que de sa masse M , et des constantes fondamentales $\mathcal{G}$ (constante de gravitation universelle $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$ USI) et c (vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8$ m·s⁻¹). Le trou noir supermassif présent au centre de notre galaxie a une masse estimée à environ 4 millions de fois la masse de notre Soleil.

- Q 1.** Déterminer par analyse dimensionnelle l'expression du rayon R d'un trou noir. On nommera K la constante adimensionnée présente dans l'expression.
- Q 2.** Les calculs de relativité générale montrent que $K = 2$. Calculer numériquement le rayon d'un trou noir ayant la masse que le Soleil sachant que la masse du Soleil a pour valeur : $M_{\odot} = 2,0 \times 10^{30}$ kg.
- Q 3.** Calculer le rayon du trou noir central de notre galaxie. Le comparer au rayon du soleil ($R_{\odot} = 7,0 \times 10^8$ m).