

Corrigé du TD OPP1 : Analyse dimensionnelle
EX 1 – Dimensions de grandeurs physiques dérivées

1. $f = \frac{kqq'}{r^2} \Leftrightarrow k = \frac{fr^2}{qq'}$. Déterminons les dimensions des grandeurs f , r^2 et q (donc de q' par le même occasion) :

- D'après la deuxième loi de NEWTON, $f = ma$ donc $[f] = M \cdot L \cdot T^{-2}$.
- Par définition de l'intensité du courant électrique, $i = \frac{dq}{dt}$ d'où $I = \frac{[q]}{T} \Leftrightarrow [q] = I \cdot T$.
- r est une distance donc $[r^2] = L^2$.

Finalement,

$$[k] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^2}{(I \cdot T)^2} \Leftrightarrow [k] = M \cdot L^3 \cdot T^{-4} \cdot A^{-1}$$

2. L'équation des gaz parfaits s'écrit : $PV = nRT \Leftrightarrow R = \frac{PV}{nT}$. Déterminons les dimensions de P , V , n et T :

- Une pression désigne une force par unité de surface d'où $[P] = \frac{[F]}{L^2} \Leftrightarrow [P] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L^2} \Leftrightarrow [P] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$.
- V est un volume d'où $[V] = L^3$.
- n est une quantité de matière d'où $[n] = N$.
- T est une température d'où $[T] = \Theta$.

Finalement,

$$[R] = \frac{M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \cdot L^3}{N \cdot \Theta} \Leftrightarrow [R] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot \Theta^{-1}$$

3. L'argument d'une exponentielle est un terme adimensionné (=sans dimension).

D'où $[mgz] = [k_B T] \Leftrightarrow [k_B] = \frac{M \cdot L \cdot [g]}{\Theta}$. Or le champ de pesanteur g est homogène à une accélération : $[g] = L \cdot T^{-2}$.

Finalement :

$$[k_B] = \frac{M \cdot L \cdot L \cdot T^{-2}}{\Theta} \Leftrightarrow [k_B] = M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$$

EX 2 – Homogénéité de formules

R 1. Dans l'expression $v(t) = At^3 - Bt$, les termes At^3 et Bt se doivent d'avoir la même dimension puisqu'ils sont additionnés : ils ont donc la même dimension qu'une vitesse puisque tous les termes d'une égalité ont la même dimension physique. D'où, en passant à l'équation aux dimensions il vient :

$$\begin{cases} [A] \cdot T^3 = L \cdot T^{-1} \Leftrightarrow [A] = L \cdot T^{-4} \\ [B] \cdot T = L \cdot T^{-1} \Leftrightarrow [B] = L \cdot T^{-2} \end{cases}$$

R 2. Dans le cas n°1, $x(t) = vt^2$. D'une part $[x(t)] = L$, d'autre part $[vt^2] = L \cdot T^{-1} \cdot T^2 \Leftrightarrow [vt^2] = L \cdot T \neq [x(t)]$.
La relation n'est pas homogène.

Dans le cas n°2, $x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. D'une part $[v_0 t] = L \cdot T^{-1} \cdot T \Leftrightarrow [v_0 t] = L$.

D'autre part $\left[\frac{1}{2}at^2\right] = L \cdot T^{-2} \cdot T^2 \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}at^2\right] = L$.

La relation est homogène.

NB : Dans tous les exercices à venir, nous noterons K le pré-facteur multiplicatif lorsque nous déterminerons des expressions littérales de grandeurs physiques grâce à de l'analyse dimensionnelle.

EX 3 – Déterminer des expressions littérales de lois physiques grâce à l'analyse dimensionnelle

R 1. Supposons que c soit une fonction de ρ et χ : $c = f(\rho, \chi)$. Déterminons les dimensions de ces deux grandeurs :

— $[\rho] = \left[\frac{m}{V} \right] \Leftrightarrow [\rho] = M \cdot L^{-3}$.

— $[\chi] = [P^{-1}]$ et $[P] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$ (cf. exercice 1) d'où $[\chi] = M \cdot L^{-1} \cdot T^2$.

La dimension de la célérité c de l'onde est donc liée aux dimensions des grandeurs ρ et χ par l'équation aux dimensions suivantes :

$$[c] = [\rho]^\alpha \cdot [\chi]^\beta$$

où α et β sont des exposants à trouver. Pour cela, on va résoudre un système.

$$\begin{aligned} [c] &= [\rho]^\alpha \cdot [\chi]^\beta \\ \Leftrightarrow L \cdot T^{-1} &= (M \cdot L^{-3})^\alpha \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2})^\beta \\ \Leftrightarrow L \cdot T^{-1} &= M^{\alpha-\beta} \cdot L^{-3\alpha+\beta} \cdot T^{-2\beta} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ -3\alpha + \beta = 1 \\ 2\beta = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où $c = K \cdot \rho^{-\frac{1}{2}} \chi^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \boxed{c = K \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho\chi}}}$.

R 2. Supposons que f_n soit une fonction de L , T et μ : $c = f(L, T, \mu)$. Déterminons les dimensions de ces trois grandeurs :

— $[L] = L$.

— $[T] = M \cdot L \cdot T^{-2}$ (T est une force).

— $\mu = M \cdot L^{-1}$.

La dimension de la fréquence propre du mode n est donc liée aux dimensions des grandeurs L , T et μ par l'équation aux dimensions suivantes :

$$[f_n] = [L]^\alpha \cdot [T]^\beta \cdot [\mu]^\gamma$$

où α et β et γ sont des exposants à trouver.

$$\begin{aligned} [f_n] &= [L]^\alpha \cdot [T]^\beta \cdot [\mu]^\gamma \\ \Leftrightarrow T^{-1} &= L^\alpha \cdot (M \cdot L \cdot T^{-2})^\beta \cdot (M \cdot L^{-1})^\gamma \\ \Leftrightarrow T^{-1} &= M^{\beta+\gamma} \cdot L^{\alpha+\beta-\gamma} \cdot T^{-2\beta} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -2\beta = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } f_n = K_n \cdot L^{-1} T^{\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \boxed{f_n = K_n \cdot \frac{1}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}}.$$

R 3. Supposons que v soit une fonction de M_T , R et $\mathcal{G}$: $f = f(M_T, R, \mathcal{G})$. Déterminons les dimensions de ces trois grandeurs :

— $[M_T] = M$.

— $[R] = L$.

— La force d'interaction gravitationnelle régnant entre deux corps de masses m_A , et m_B séparés d'une distance d a pour norme $F = \frac{\mathcal{G} m_A m_B}{d^2} \Leftrightarrow \mathcal{G} = \frac{F d^2}{m_A m_B}$ d'où en passant à l'équation aux dimensions il vient : $[\mathcal{G}] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^2}{M^2} \Leftrightarrow [\mathcal{G}] = M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}$.

La dimension de la fréquence propre de la vitesse v est donc liée aux dimensions des grandeurs M_T , R et $\mathcal{G}$ par l'équation aux dimensions suivantes :

$$[v] = [M_T]^\alpha \cdot [R]^\beta \cdot [\mathcal{G}]^\gamma$$

où α et β et γ sont des exposants à trouver.

$$\begin{aligned} [v] &= [M_T]^\alpha \cdot [R]^\beta \cdot [\mathcal{G}]^\gamma \\ \Leftrightarrow L \cdot T^{-1} &= M^\alpha \cdot L^\beta \cdot (M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2})^\gamma \\ \Leftrightarrow L \cdot T^{-1} &= M^{\alpha-\gamma} \cdot L^{\beta+3\gamma} \cdot T^{-2\gamma} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ \beta + 3\gamma = -1 \\ -2\gamma = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } v = K \cdot M_T^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} \mathcal{G}^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \boxed{v = K \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{R}}}.$$

R 4. Supposons que F soit une fonction de ρ , $\mathcal{A}$ et v : $f = f(\rho, \mathcal{A}, v)$.

NB : Le coefficient C étant adimensionné, nous le mettons en pré-facteur, à l'instar du pré-facteur K . D'après l'équation aux dimensions, il vient :

$$\begin{aligned} [F] &= [\rho]^\alpha \cdot [\mathcal{A}]^\beta \cdot [v]^\gamma \\ \Leftrightarrow M \cdot L \cdot T^{-2} &= (M \cdot L^{-3})^\alpha \cdot (L^2)^\beta \cdot (L \cdot T^{-1})^\gamma \\ \Leftrightarrow M \cdot L \cdot T^{-2} &= M^\alpha \cdot L^{-3\alpha+2\beta+\gamma} \cdot T^{-\gamma} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ -3\alpha + 2\beta + \gamma = 1 \\ -\gamma = -2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } F = K \cdot C \rho^1 \mathcal{A}^1 v^2 \Leftrightarrow \boxed{F = K \cdot \rho C \mathcal{A} v^2}.$$

EX 4 – Hauteur maximale d'une montagne sur une planète

R 1. Supposons que H soit une fonction de g , L_f et $\rho = H = f(g, L_f, \rho)$. Déterminons les dimensions de ces grandeurs :

— $[g] = L \cdot T^{-2}$ (cf. exercice 1).

— $[L_f] = [E] \cdot M^{-1}$ et $[E] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$ (se servir de l'expression de l'énergie cinétique par exemple $E = E_c = \frac{1}{2}mv^2$)

d'où $[L_f] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot M^{-1} \Leftrightarrow [L_f] = L^2 \cdot T^{-2}$.

— $[\rho] = M \cdot L^{-3}$ (cf. exercice 3).

R 2. D'après l'équation aux dimensions, il vient :

$$\begin{aligned} [H] &= [g]^\alpha \cdot [L_f]^\beta \cdot [\rho]^\gamma \\ \Leftrightarrow L &= (L \cdot T^{-2})^\alpha \cdot (L^2 \cdot T^{-2})^\beta \cdot (M \cdot L^{-3})^\gamma \\ \Leftrightarrow L &= M^\gamma \cdot L^{\alpha+2\beta-3\gamma} \cdot T^{-2\alpha-2\beta} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta - 3\gamma = 1 \\ -2\alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où $H = K \cdot C g^{-1} L_f^1 g^0 \Leftrightarrow H = K \cdot \frac{L_f}{g}$.

R 3. K est une constante indépendante des grandeurs physiques. L_f est identique sur Terre et sur Mars (d'après les hypothèses de l'énoncé). Donc $K L_f = H g$ est une constante. D'où :

$$H_{\text{Terre}} g_{\text{Terre}} = H_{\text{Mars}} g_{\text{Mars}} \Leftrightarrow H_{\text{Mars}} = \frac{g_{\text{Terre}}}{g_{\text{Mars}}} H_{\text{Terre}}$$

A.N : Sur Terre, le mont Everest $H_{\text{Terre}} = 8,8$ km donc $H_{\text{Mars}} = 23$ km, ce qui est cohérent avec la hauteur du Mont Olympus sur Mars.

EX 5 – Énergie dégagée par l'explosion nucléaire Trinity

Déterminons l'expression du rayon $R(t)$ à l'instant t de l'explosion en fonction de l'énergie dégagée par l'explosion E , le temps t et la masse volumique de l'air ρ . On suppose donc que $E = f(R(t), t, \rho)$. D'après l'équation aux dimensions, il vient :

$$\begin{aligned} [R(t)] &= [E]^\alpha \cdot [t]^\beta \cdot [\rho]^\gamma \\ \Leftrightarrow L &= (M \cdot L^2 \cdot T^{-2})^\alpha \cdot T^\beta \cdot (M \cdot L^{-3})^\gamma \\ \Leftrightarrow L &= M^{\alpha+\gamma} \cdot L^{2\alpha-3\gamma} \cdot T^{-2\alpha+\beta} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\alpha - 3\gamma = 1 \\ -2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{5} \\ -5\gamma = 1 \Leftrightarrow \gamma = -\frac{1}{5} \\ -2\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{2}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où, en prenant $K = 1$, $R(t) = E^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}} \rho^{-\frac{1}{5}} \Leftrightarrow \boxed{R(t) = \left(\frac{Et^2}{\rho} \right)^{\frac{1}{5}}}.$

Sur la photo, on mesure à l'instant $t = 0,025$ s un rayon $R(t) = 2,1$ cm (feuille).

Or l'échelle est : 1,65 cm (feuille) $\leftrightarrow$ 100 m (réalité) d'où $R(t) \simeq 130$ m (réalité) à l'instant $t = 0,025$ s. Donc l'expression de l'énergie est :

$$R(t) = \left(\frac{Et^2}{\rho} \right)^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{\rho R(t)^5}{t^2}}$$

A.N : À l'instant $t = 0,025$ s, $E = 5,9 \times 10^{13}$ J. Or 1 kg de TNT correspond à un dégagement d'une énergie de 4×10^6 J. D'où après conversion $E \simeq 15$ tonnes de TNT ce qui est cohérent avec les chiffres de la CIA (les incertitudes résident dans l'approximation $K = 1$ et la mesure du rayon $R(t)$).