

Corrigé des applications de cours
du chapitre 01

Application n°1: Démonstration des lois de Snell - Descartes à l'aide du principe de Fermat.

Q1) Pour la réflexion: $(SM)(x) = (SI)(x) + IM(x)$

D'après le théorème de Pythagore, on a: $SI^2 = h_1^2 + x^2$

D'où $SI(x) = \sqrt{h_1^2 + x^2}$

De même, $IM(x) = \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}$

Donc on obtient par somme: $SM(x) = \sqrt{h_1^2 + x^2} + \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}$

Or $(SM)(x) = n_1 \times SM(x)$ $(SI)(x) = n_1 \times SI(x)$ et $(IM)(x) = n_1 \times IM(x)$

Donc on conclut: $(SM)(x) = n_1 \left(\sqrt{h_1^2 + x^2} + \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2} \right)$

Par la réfraction: $(SM)(x) = (SI)(x) + (IM)(x)$ (identique!)

les calculs sont identiques sauf que $(IM)(x) = n_2 \times IM(x)$.

Donc on a:

$$(SM)(x) = n_1 \sqrt{h_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}$$

Q2) Notons τ le temps de parcours du rayon lumineux.

Dans les deux cas, $\tau = \frac{(SM)(x)}{c}$

D'après le principe de Fermat, le RL choisit le parcours qui minimise le temps de son trajet.

Il faut donc résoudre $\frac{d\tau}{dx} = 0$.

Q3) Par la réflexion:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dx} &= \frac{n_1}{c} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{h_1^2 + x^2} + \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2} \right) \\ &= \frac{n_1}{c} \left(\frac{2x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{2(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2} &= \frac{2x(-1)(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} \\ &= \frac{-2(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} \end{aligned}$$

D'où $\frac{d\tau}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{2n_1}{c} \left(\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} \right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{h_2^2 + x^2}}$$

Or $\begin{cases} \sin(i_1) = \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} \\ \sin(i_1') = \frac{d-x}{\sqrt{h_2^2 + x^2}} \end{cases}$ CAH SOH TOA

Donc $\sin(i_1) = \sin(i_1')$.

Or $i_1 \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et $i_1' \in [0; \frac{\pi}{2}]$ or $x \mapsto \sin(x)$ est injective de $[0; \frac{\pi}{2}]$ dans $[0; 1]$ d'où $i_1 = i_1'$.

Pour la réflexion :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{n_1}{c} \frac{d}{dx} \sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{n_2}{c} \frac{d}{dx} \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}$$

$$\text{D'où } \frac{dT}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{n_1}{\cancel{c}} \cdot \frac{\cancel{x}}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{n_2}{\cancel{c}} \cdot \frac{\cancel{x}(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow n_1 \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = n_2 \frac{d-x}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}$$

$$\text{Or } \sin(i_1) = \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} \text{ et } \sin(i_2) = \frac{d-x}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}$$

Donc on obtient finalement : $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$.

Application n°2 : quel milieu sera le plus réfringent ?

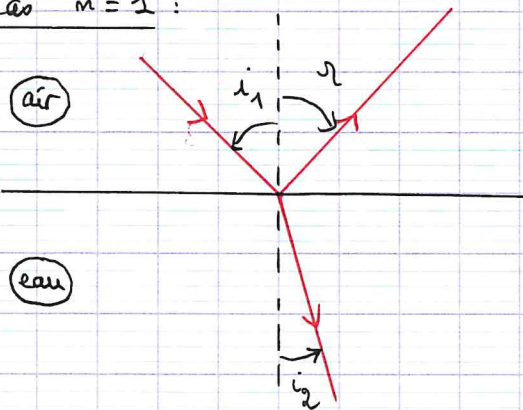
- À gauche, on remarque que : $i_1 > i_2$
 $\Leftrightarrow \sin(i_1) > \sin(i_2)$ } car $x \mapsto \sin(x)$ est $\uparrow$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
- $\Leftrightarrow \frac{n_2}{n_1} \sin(i_2) > \sin(i_2)$ } S.D.
- $\Leftrightarrow n_2 > n_1$.

À droite, cette fois-ci on observe que $i_2 > i_1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow n_1 > n_2$

↳ Le milieu le plus réfringent est le milieu d'indice optique n le plus élevé : lorsque la lumière entre dans ce milieu, la lumière se rapproche de la normale.

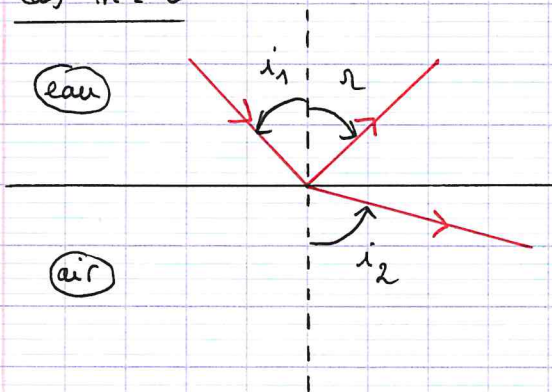
Application n° 3 : Réflexion totale à une interface air/eau.

Cas $n = 1$:

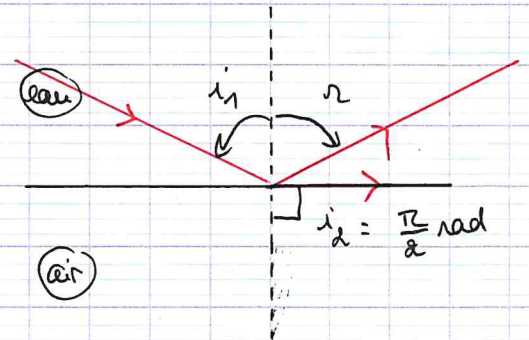


$n_{\text{air}} < n_{\text{eau}}$ donc il ne peut JAMAIS y avoir réflexion totale puisque le RL passe d'un milieu moins réfringent à un milieu plus réfringent.

Cas $n = 2$

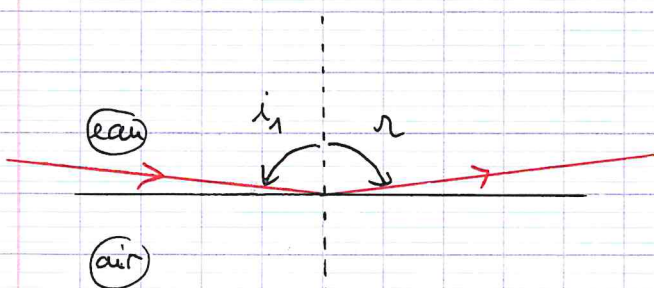


$$i_1 < i_{1,\text{lim}}$$



$$i_1 = i_{1,\text{lim}}$$

Si $i_1 > i_{1,\text{lim}}$ il y a réflexion totale.



$i_1 > i_{1,\text{lim}}$: pas de rayon réfracté.

À la limite de la réflexion totale, on a :

$$n_{\text{eau}} \sin(i_{1,\text{lim}}) = n_{\text{air}} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}$$

$$\Leftrightarrow \sin(i_{1,\text{lim}}) = \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}}$$

$$\Leftrightarrow i_{1,\text{lim}} = \text{Arcsin}\left(\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}}\right)$$

CS: chiffre significatif.

AN: On a donc $i_{1,\text{lim}} = \text{Arcsin}\left(\frac{1,00}{1,33}\right)$ ^{3CS}

La calculatrice $\Leftrightarrow i_{1,\text{lim}} = 0,851 \text{ rad}$ ^{3CS}

va vous renvoyer

une valeur

d'angle en rad

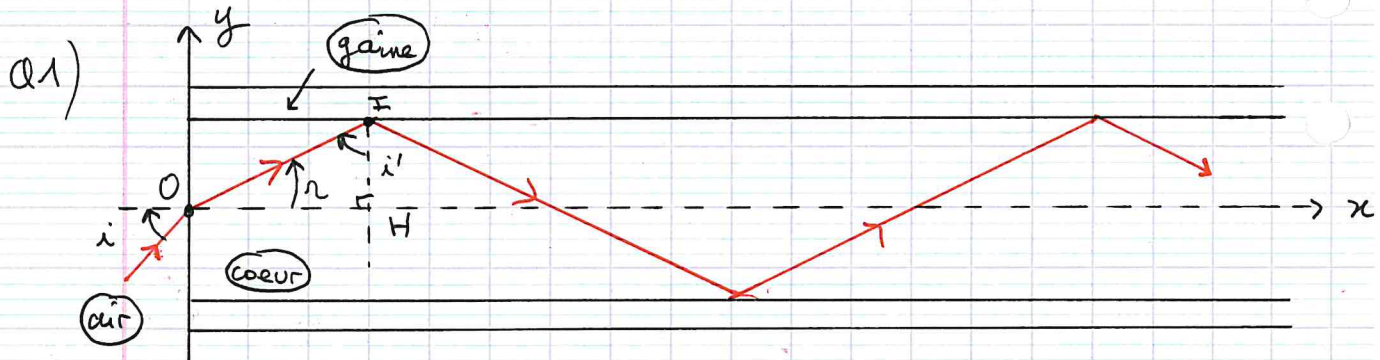
et pas en degrés!

$$\Leftrightarrow i_{1,\text{lim}} = 49,8^\circ$$
 ^{3CS}

$$\times \frac{180^\circ}{\pi}$$

$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$
 $\Leftrightarrow \pi \text{ rad} = 180^\circ$

Application n° 4: Détermination du cône d'acceptance d'une fibre à saut d'indice



Pour qu'il y ait réflexion totale, il faut que $i' > i'_{\text{lim}}$
 tel que $i'_{\text{lim}} = \text{Arcsin}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

Q2) À l'entrée de la fibre, en appliquant la 2^{ème} loi de Snell Descartes de la réfraction, on obtient.

$$\begin{aligned} n_a \sin(i) &= n_c \sin(r) \\ \Rightarrow \sin(i) &= n_c \sin(r) \quad (*) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{en prenant } n_a = 1,00 \\ \text{pour simplifier.} \end{array} \right\}$$

Or dans le triangle rectangle OIH, $r + i' + \frac{\pi}{2} = \pi$
 d'où $r = \frac{\pi}{2} - i'$. (C) donc $\sin(i) = n_c \sin\left(\frac{\pi}{2} - i'\right)$
 $\Rightarrow \sin(i) = n_c \cos(i') \quad (\Delta)$

Enfin $i' > i'_{\text{lim}}$
 $\Rightarrow \sin(i') > \sin(i'_{\text{lim}})$
 $\Rightarrow \sin(i') > \frac{n_g}{n_c}$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \cos^2(i')} > \frac{n_g}{n_c}$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2(i') > \frac{n_g^2}{n_c^2}$$

$$\Rightarrow \cos^2(i') < 1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}$$

$$\Rightarrow \cos(i') < \sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}} \quad (\square)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

$$\Rightarrow \sin(x) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(x)}$$

$$\text{Pci, } \sin(i') > 0 \text{ car } i' \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{car } x \mapsto x^2 \text{ est str } \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}^+.$$

$$\cos(i') > 0 \text{ car } i' \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{et } x \mapsto \sqrt{x} \text{ str } \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}^+.$$

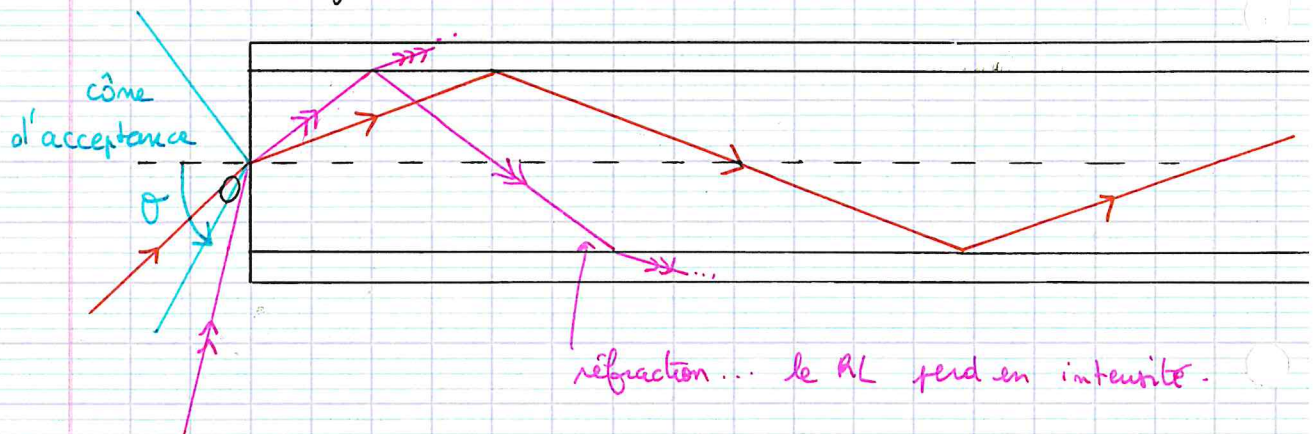
(□) dans (Δ) donne: $\sin(i) < n_c \sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}}$

$$\Rightarrow \sin(i) < \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$$

$$\Rightarrow \sin(i) < \text{O.N. ou } \text{O.N.} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$$

Tant que les RL incidents vérifient $\sin(i) < \text{O.N.}$, alors ils sont guidés dans la fibre optique (un phénomène de réflexion totale a lieu).

- Q3) $\sin(i) < 0.N$ défini un cône d'acceptance de demi-angle au sommet θ vérifiant $\sin(\theta) = 0.N$



D'où $\sin(\theta) = 0.N \Leftrightarrow \theta = \text{Arcsin}\left(\sqrt{n_c^2 - n_g^2}\right)$

AN: $\theta = \text{Arcsin}\left(\sqrt{1,53^2 - 1,49^2}\right)$
 $\Leftrightarrow \theta = 0,355 \text{ rad}$
 $\Leftrightarrow \theta = 20,3^\circ$ $\times \frac{180}{\pi}$

Application n°5 : Débit d'une fibre optique à saut d'indice

Q1)

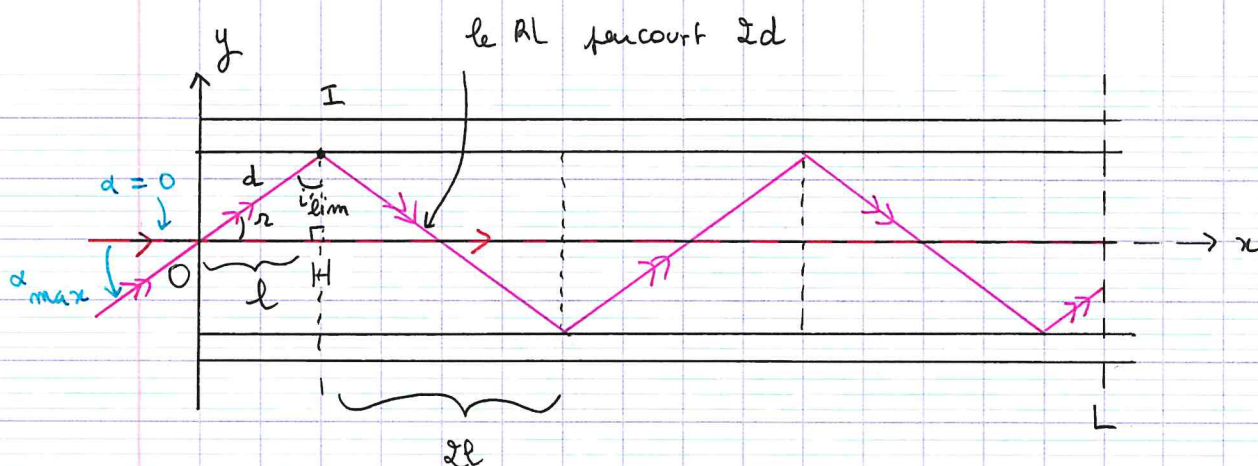
Changement de notation : $\theta_{\max} = \theta$.

La vitesse de propagation de la lumière dans le cœur de la fibre a pour expression : $c = \frac{c_0}{n_c}$ (cours)

On choisit des sources monochromatiques car λ dépend de l'indice optique du milieu : on s'affranchit de ce problème ici : toutes les ODM se propageront à la même vitesse.

Q2)

Le RL qui se propage le plus vite est celui qui se propage en ligne droite : $T_1 = \frac{L}{c} \Leftrightarrow T_1 = \frac{n_c L}{c_0}$



Q3) Le rayon lumineux qui met le plus de temps à parcourir la fibre est celui qui arrive avec une incidence $\alpha = \alpha_{\max}$. (voir schéma de la Q2)

$$T_2 = \frac{L'}{c} = \frac{n_c L'}{c_0} \quad \text{avec } L' \text{ la longueur parcourue par le RL}$$

Déterminons la distance d : $\cos(r) = \frac{l}{d} \Leftrightarrow d = \frac{l}{\cos(r)}$
 Or $\cos(r) = \sqrt{1 - \sin^2(r)}$
 et $\sin(\alpha_{\max}) = 0.N = n_c \sin(r) \Rightarrow \sin(r) = \frac{\sqrt{n_c^2 - n_g^2}}{n_c}$

$$= \sqrt{\frac{n_c^2 - n_g^2}{n_c^2}}$$

Donc $\sin^2(r) = \frac{n_c^2 - n_g^2}{n_c^2}$ donc $\cos(r) = \sqrt{\frac{n_c^2 - n_g^2 + n_g^2}{n_c^2}} = \frac{n_g}{n_c}$

D'où $d = \frac{l n_c}{n_g} \quad (1)$

À chaque réflexion, le RL parcourt une distance $2d$. On suppose qu'il y a N réflexions lors du trajet du RL.

D'où $L' = 2Nd \quad (2)$

Par ailleurs, on remarque que $L = 2Nl$

D'où $2Nd = \frac{2Nl n_c}{n_g}$

$\Rightarrow L' = L \frac{n_c}{n_g} > L$ et donc

$$T_2 = \frac{n_c^2 L}{n_g c_0}$$

Q4) D'où $\delta T = T_2 - T_1$

$$\Rightarrow \delta T = \frac{m_c^2 L}{m_g c_0} - \frac{m_c L}{c_0}$$

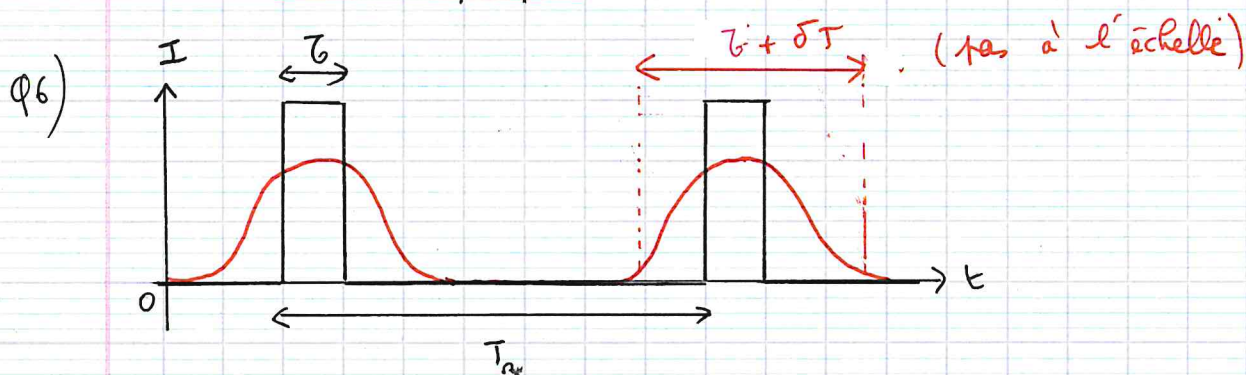
$$\Rightarrow \delta T = \frac{m_c^2 L - m_c m_g L}{m_g c_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta T = \frac{m_c(m_c - m_g)}{m_g} \times \frac{L}{c_0}}$$

Q5) AN: $\delta T = \frac{1,53(1,53 - 1,49)}{1,49} \times \frac{10 \times 10^3}{3,00 \times 10^8}$

$$\Rightarrow \delta T = 1,4 \times 10^{-6} \text{ s}$$

$$\Rightarrow \underline{\delta T = 1,4 \text{ } \mu\text{s}}$$



En sortie de fibre, le signal a été malgué tout atténué, et étalé^(*) à cause du retard du rayon incident tq $\alpha = \alpha_{\text{max}}$ par rapport au rayon incident tq $\alpha = 0$.

Q7) Pour ne pas avoir de superposition, il faut que $\delta T \leq T_r$ sinon on aurait:

D'où $\boxed{T_{r, \text{min}} = \delta T}$

Q8) D'où $D_{\text{max}} = \frac{1}{\delta T} \Rightarrow \underline{D_{\text{max}} = 7,3 \times 10^5 \text{ bits/s}}$

Q9) Pour rappel 1 octet = 8 bits donc dans un fichier d'une taille de 100 Mo, il y a $N = 8 \times 100 \times 10^6$ bits

D'où le temps de transmission est $\boxed{\Delta t = \frac{N}{D_{\text{max}}}}$ AN: $\underline{\Delta t = 18 \text{ min.}}$ (très long...)