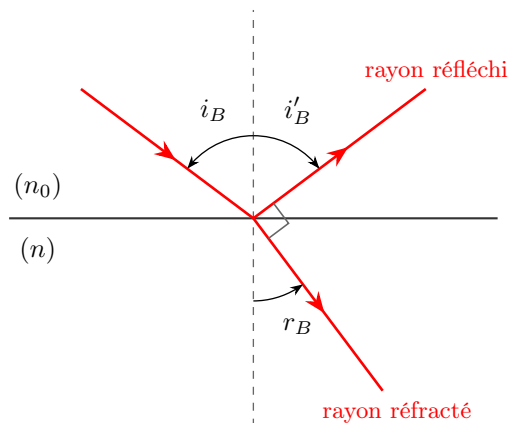


Corrige du TD O1 : Sources lumineuses, réflexion et réfraction des rayons lumineux

EX 1 – Incidence de Brewster

R 1. Complétons le schéma en faisant apparaître les trois rayons et les angles associés :



Les lois de SNELL-DESCARTES donnent :

- pour la réfraction : $n_0 \sin(i_B) = n \sin(r_B)$;
- pour la réflexion : $i'_B = i_B$ (en valeur absolue).

Par ailleurs, on observe un angle plat vérifiant :

$$i'_B + \frac{\pi}{2} + r_B = \pi \Leftrightarrow i_B + \frac{\pi}{2} + r_B = \pi \Leftrightarrow r_B = \frac{\pi}{2} - i_B$$

En reportant dans la loi de la réfraction, il vient :

$$\begin{aligned} n_0 \sin(i_B) &= n \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_B\right) \\ \Leftrightarrow n_0 \sin(i_B) &= n \cos(i_B) \\ \Leftrightarrow \tan(i_B) &= \frac{n}{n_0} \end{aligned}$$

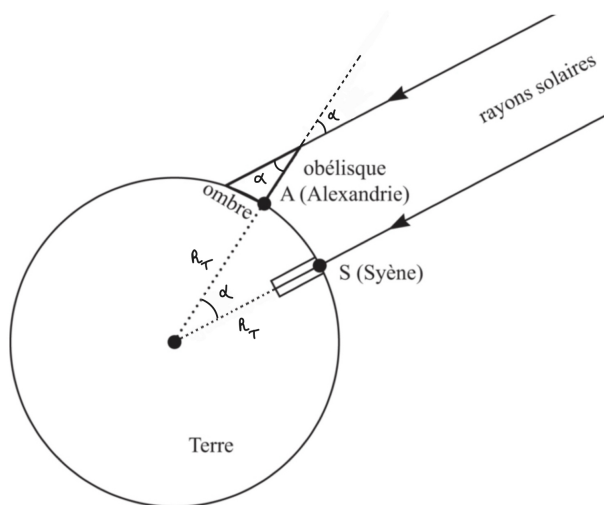
D'où, puisque $i_B \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel $\arctan(\tan(i_B)) = i_B$:

$$i_B = \arctan\left(\frac{n}{n_0}\right)$$

R 2. A.N : pour l'eau, $i_B = \arctan(1,33) = 0,93$ rad, soit $i_B = 53,1^\circ$.
 Pour le verre, $i_B = \arctan(1,5) = 0,98$ rad, soit $i_B = 56,3^\circ$.

EX 2 – Ératosthène et la mesure du rayon de la Terre

R 1. Complétons le schéma à l'aide de quelques grandeurs utiles :



Posons $d = \widehat{AS} = 5000 \times 157,5$ m, soit $d = 7,9 \times 10^5$ m, et $OS = R_T$.

Du fait des dimensions de la Terre, on peut approximer l'arc $\widehat{AS}$ par le segment $[AS]$, si bien que dans le triangle rectangle formé par O , S et A :

$$\tan(\alpha) = \frac{AS}{OS} \Leftrightarrow \boxed{R_T = \frac{d}{\tan(\alpha)}}$$

A.N : En convertissant l'angle $\alpha = 7^\circ 12'$ en radians,

$$R_T = \frac{7,9 \times 10^5 \text{ m}}{\tan\left(\left(7 + \frac{12}{60}\right) \times \frac{\pi}{180}\right)} \Leftrightarrow R_T = 6,2 \times 10^6 \text{ m} \Leftrightarrow \boxed{R_T = 6,2 \times 10^3 \text{ km} = 6\,200 \text{ km}}$$



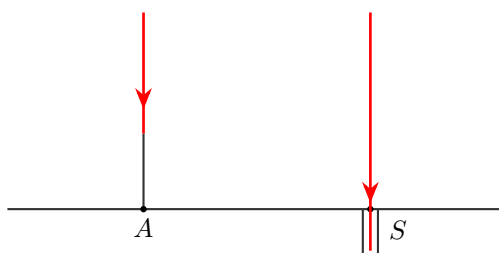
Attention à bien convertir les degrés en radians avant d'appliquer la fonction tangente.

R 2. La valeur obtenue est très proche de la valeur réelle : l'écart relatif est de l'ordre de 3 %. Les sources d'erreur sont au nombre de deux :

- la mesure de la distance SA ;
- la mesure de l'angle α .

Les Grecs savaient mesurer les angles avec une très bonne précision : on considère donc que l'incertitude sur SA domine.

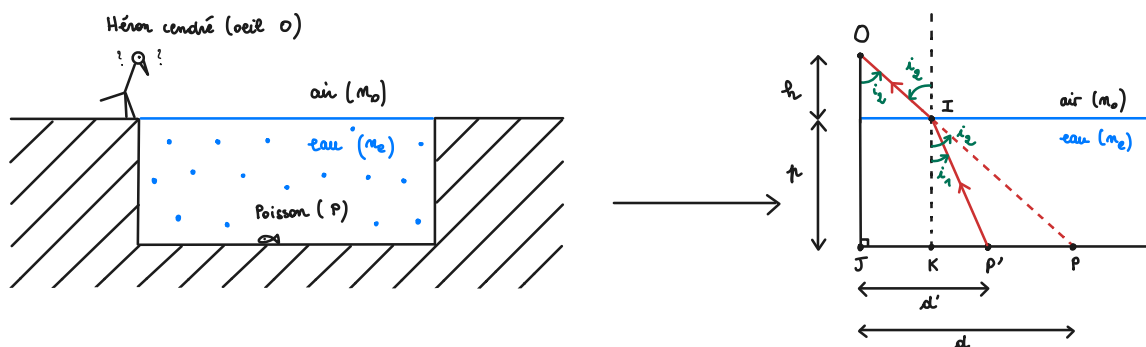
R 3. Si la Terre était plate, les rayons du Soleil arriveraient verticalement en *tout* point de sa surface, et non plus seulement à Syène :



Il n'y aurait alors pas d'ombre projetée de l'obélisque.

EX 3 – Un héron cendré et un poisson

R 1. Schématisons la situation en notant I le point d'incidence sur la surface de l'eau, P la position apparente du poisson (dans la direction (OI) prolongée) et P' sa position réelle :



Le héron a l'impression que le poisson se situe dans la direction (OI) , à la distance $d = JP$ du bord. Cependant, à cause de la réfraction du rayon lumineux émis par le poisson à la surface de l'eau, le poisson se situe en réalité à une distance $d' < d$.

R 2. Exploitions les trois triangles rectangles de la figure :

- dans le triangle rectangle OJP : $\tan(i_2) = \frac{JP}{JO}$ d'où $d = (p + h) \tan(i_2)$ (1) ;
- dans le triangle rectangle KIP : $\tan(i_2) = \frac{KP}{KI}$ d'où $KP = p \tan(i_2)$ (2) ;
- dans le triangle rectangle KIP' : $\tan(i_1) = \frac{KP'}{KI}$ d'où $KP' = p \tan(i_1)$ (3).

On veut exprimer d' à l'aide de d , p , n_e et n_0 . En utilisant la relation de CHASLES puis (1), (2) et (3) :

$$\begin{aligned}
 d' &= JP' = JP - KP + KP' \\
 \Leftrightarrow d' &= (p + h) \tan(i_2) - p \tan(i_2) + p \tan(i_1) \\
 \Leftrightarrow d' &= d - p(\tan(i_2) - \tan(i_1)) \\
 \Leftrightarrow d' &= d - p \left(\frac{d}{p + h} - \tan(i_1) \right)
 \end{aligned}$$

Posons $\alpha = \frac{d}{p + h}$ et $\beta = \frac{n_0}{n_e}$. Il reste à exprimer $\tan(i_1)$ en fonction de α et β .

D'après la loi de SNELL-DESCARTES de la réfraction, $n_e \sin(i_1) = n_0 \sin(i_2)$, soit :

$$\sin(i_1) = \beta \sin(i_2)$$

Par ailleurs, d'après (1), $\tan(i_2) = \frac{d}{p + h} = \alpha$, donc $i_2 = \arctan(\alpha)$ et :

$$\sin(i_2) = \sin(\arctan(\alpha)) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \quad \text{d'où} \quad \sin(i_1) = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

Comme $i_1 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(i_1) = \sqrt{1 - \sin^2(i_1)} > 0$, si bien que :

$$\tan(i_1) = \frac{\sin(i_1)}{\sqrt{1 - \sin^2(i_1)}} = \frac{\frac{\alpha\beta}{\sqrt{1 + \alpha^2}}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2\beta^2}{1 + \alpha^2}}} = \frac{\frac{\alpha\beta}{\sqrt{1 + \alpha^2}}}{\frac{\sqrt{1 + \alpha^2 - \alpha^2\beta^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2}}} = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{1 + \alpha^2(1 - \beta^2)}}$$

D'où le résultat demandé :

$$d' = d - p f(\alpha, \beta) \quad \text{où} \quad f(\alpha, \beta) = \alpha - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{1 + \alpha^2(1 - \beta^2)}} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{d}{p + h} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{n_0}{n_e}$$

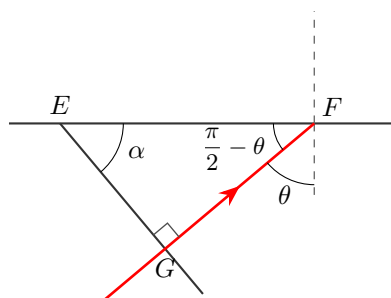
$$\underline{A.N} : \alpha = \frac{1,0}{1,2 + 0,95} = 0,47 \text{ et } \beta = \frac{1,00}{1,33} = 0,75, \text{ d'où}$$

$$f(\alpha, \beta) = 0,47 - \frac{0,47 \times 0,75}{\sqrt{1 + 0,47^2 (1 - 0,75^2)}} = 0,13$$

et finalement $d' = 1,0 - 1,2 \times 0,13$, soit $d' = 0,84 \text{ m}$: le héron doit plonger son bec environ 16 cm en deçà de la position apparente du poisson !

EX 4 – Détection de pluie sur un pare-brise

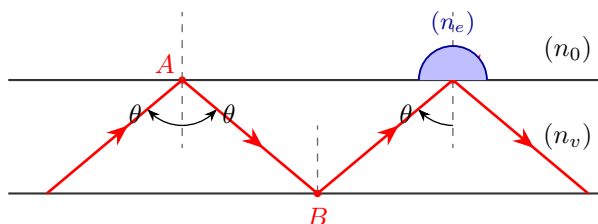
- R 1.** Le rayonnement infrarouge n'est pas visible par l'œil humain : on l'utilise pour ne pas éblouir le conducteur ni les autres usagers de la route, et pour que le dispositif fonctionne sans être perçu.
- R 2.** Schématisons le trajet du pinceau dans le biseau. Comme la lumière arrive en incidence normale sur le biseau, elle n'y est pas déviée et se propage perpendiculairement à celui-ci :



Dans le triangle rectangle EFG , la somme des angles vaut π :

$$\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \theta = \pi \Leftrightarrow \alpha - \theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\theta = \alpha}$$

- R 3.** En l'absence de pluie, l'interface rencontrée en A (comme en C) sépare le verre de l'air. Schématisons le trajet du pinceau lumineux dans le pare-brise :



D'après la loi de SNELL-DESCARTES appliquée en A à l'interface verre/air, en notant r l'angle de réfraction :

$$n_v \sin(\theta) = n_0 \sin(r) \Leftrightarrow \sin(r) = \frac{n_v}{n_0} \sin(\theta) = 1,5 \times 0,77 = 1,15 > 1$$

C'est impossible : il n'existe donc pas de rayon réfracté en A , on observe une **réflexion totale**. On retrouve exactement la même situation au point C , puisque l'angle d'incidence y vaut également θ .

- R 4.** En présence d'une goutte de pluie en C , l'interface rencontrée sépare cette fois le verre de l'eau :

$$\sin(r) = \frac{n_v}{n_e} \sin(\theta) = 1,13 \times 0,77 = 0,86 < 1$$

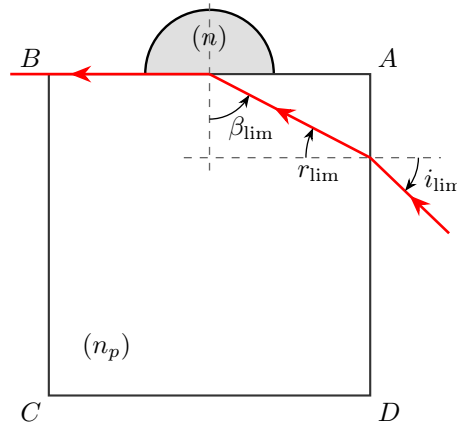
Cette fois la relation admet une solution : il existe bien un rayon réfracté en C , qui part dans la goutte d'eau. Il n'y a plus réflexion totale.

- R 5.** À chaque goutte rencontrée, une partie de l'énergie lumineuse est transmise à l'eau au lieu d'être intégralement renvoyée dans le pare-brise par réflexion totale. Plus il y a de gouttes, plus le pinceau perd d'énergie au fil de ses

réflexions, et donc plus l'intensité lumineuse reçue par le capteur est faible : c'est cette baisse d'intensité qui pilote la vitesse de balayage de l'essuie-glace.

EX 5 – Réfractomètre de Pulfrich

- R 1.** La goutte apparaît lumineuse dès qu'un rayon issu du cube est réfracté en son sein et parvient aux yeux de l'observateur : autrement dit, dès qu'il n'y a plus réflexion totale à l'interface verre/liquide. Cela est possible si $\beta < \beta_{\text{lim}}$. Si $i \nearrow$ alors $r \nearrow$ et donc $\beta \searrow$ puisque $r + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi = \text{cste}$. On en déduit que si $i > i_{\text{lim}}$ alors $\beta < \beta_{\text{lim}}$ et un rayon réfracté existe dans la goutte.
- R 2.** Schématisons la situation à la limite de la réflexion totale : le rayon réfracté dans la goutte est alors rasant, c'est-à-dire réfracté à $\frac{\pi}{2}$.



À la limite de la réflexion totale à l'interface verre/liquide, la loi de SNELL-DESCARTES s'écrit :

$$n_p \sin(\beta_{\text{lim}}) = n \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{\sin(\beta_{\text{lim}}) = \frac{n}{n_p}} \quad (1)$$

Or, à l'entrée dans le cube, $n_0 \sin(i_{\text{lim}}) = n_p \sin(r_{\text{lim}})$, et la normale à la face d'entrée étant perpendiculaire à celle de la face supérieure :

$$r_{\text{lim}} + \beta_{\text{lim}} + \frac{\pi}{2} = \pi \Leftrightarrow r_{\text{lim}} = \frac{\pi}{2} - \beta_{\text{lim}}$$

Donc $\sin(r_{\text{lim}}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_{\text{lim}}\right) = \cos(\beta_{\text{lim}})$, d'où en combinant avec (1) :

$$\begin{aligned} \cos(\beta_{\text{lim}}) &= \frac{n_0}{n_p} \sin(i_{\text{lim}}) \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 - \sin^2(\beta_{\text{lim}})} &= \frac{n_0}{n_p} \sin(i_{\text{lim}}) \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{n^2}{n_p^2}} &= \frac{n_0}{n_p} \sin(i_{\text{lim}}) \\ \Leftrightarrow \sin(i_{\text{lim}}) &= \frac{n_p}{n_0} \sqrt{1 - \frac{n^2}{n_p^2}} = \frac{\sqrt{n_p^2 - n^2}}{n_0} \end{aligned}$$

Soit $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{n_p^2 - n^2}}{n_0}\right)$. En inversant cette relation, il vient :

$$\begin{aligned} \sqrt{n_p^2 - n^2} &= n_0 \sin(i_{\text{lim}}) \\ \Leftrightarrow n_p^2 - n^2 &= n_0^2 \sin^2(i_{\text{lim}}) \\ \Leftrightarrow n^2 &= n_p^2 - n_0^2 \sin^2(i_{\text{lim}}) \\ \Leftrightarrow \boxed{n} &= \sqrt{n_p^2 - n_0^2 \sin^2(i_{\text{lim}})} \end{aligned}$$

R 3. La mesure n'est possible que si les deux angles β_{lim} et i_{lim} existent, ce qui impose deux conditions :

- l'existence de β_{lim} dans (1) impose $\sin(\beta_{\text{lim}}) = \frac{n}{n_p} \leq 1$, soit $\boxed{n \leq n_p}$. Physiquement, il n'y a réflexion totale que si le liquide est *moins* réfringent que le verre ;
- l'existence de i_{lim} impose $\sin(i_{\text{lim}}) \leq 1$, soit :

$$\begin{aligned} \sin^2(i_{\text{lim}}) &\leq 1 \\ \Leftrightarrow -n_0^2 \sin^2(i_{\text{lim}}) &\geq -n_0^2 \\ \Leftrightarrow n_p^2 - n_0^2 \sin^2(i_{\text{lim}}) &\geq n_p^2 - n_0^2 \\ \Leftrightarrow n &\geq \sqrt{n_p^2 - n_0^2} \end{aligned}$$

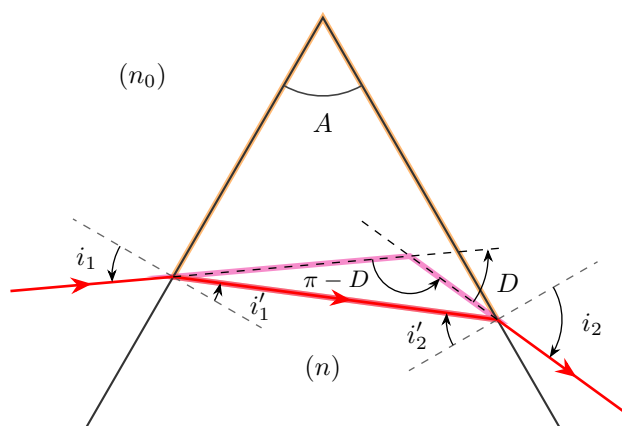
Finalement, le réfractomètre ne permet de mesurer que les indices vérifiant :

$$\boxed{n \in [\sqrt{n_p^2 - n_0^2}; n_p]}$$

A.N : $\sqrt{1,50^2 - 1,00^2} = 1,12$, d'où $n \in [1,12; 1,50]$. La plupart des liquides usuels (eau, éthanol, huiles) sont bien dans cet intervalle.

EX 6 – Étude d'un prisme

R 1. Complétons le schéma en notant i'_1 et i'_2 les angles de réfraction à l'intérieur du prisme, et en faisant apparaître l'angle de déviation D à l'intersection des supports des rayons incident et émergent :



NB : le triangle **orange** est formé par le sommet du prisme et les deux points d'incidence ; le triangle **magenta** est formé par les deux points d'incidence et le point de croisement des supports des rayons incident et émergent.

R 2. Écrivons la somme des angles dans chacun de ces deux triangles.

- Dans le triangle **magenta**, les angles au niveau des points d'incidence valent respectivement $i_1 - i'_1$ et $i_2 - i'_2$ (déviations successives du rayon), et l'angle au sommet vaut $\pi - D$:

$$(i_1 - i'_1) + (\pi - D) + (i_2 - i'_2) = \pi \quad (1)$$

- Dans le triangle **orange**, les normales aux faces étant perpendiculaires à celles-ci :

$$\left(\frac{\pi}{2} - i'_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - i'_2\right) + A = \pi \Leftrightarrow \boxed{i'_1 + i'_2 = A} \quad (2)$$

En reportant (2) dans (1) :

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + \pi - \underbrace{(i'_1 + i'_2)}_{=A} - D &= \pi \\ \Leftrightarrow i_1 + i_2 - A - D &= 0 \end{aligned}$$

Donc on obtient finalement :

$$D = i_1 + i_2 - A$$

R 3. a) Pour que le rayon ressorte, il ne faut pas qu'il y ait réflexion totale au niveau de la face de sortie.

À la sortie, la loi de SNELL-DESCARTES à la limite s'écrit :

$$n \sin(i'_{2,\text{lim}}) = n_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \sin(i'_{2,\text{lim}}) = \frac{n_0}{n}$$

La condition d'émergence est donc $\sin(i'_2) \leq \frac{n_0}{n}$, c'est-à-dire, la fonction arcsin étant croissante sur $[0; 1]$:

$$i'_2 \leq \arcsin\left(\frac{n_0}{n}\right)$$

Or, d'après (2), $i'_1 = A - i'_2$, et à l'entrée $n_0 \sin(i_1) = n \sin(i'_1) = n \sin(A - i'_2)$. En partant de la condition d'émergence :

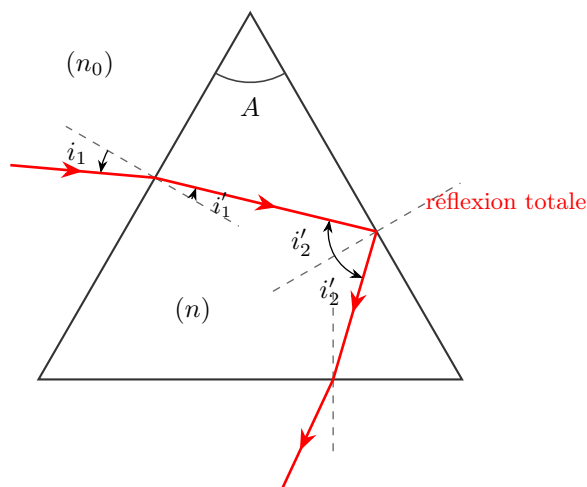
$$\begin{aligned} i'_2 &\leq \arcsin\left(\frac{n_0}{n}\right) \\ \Leftrightarrow A - i'_2 &\geq A - \arcsin\left(\frac{n_0}{n}\right) \\ \Leftrightarrow \sin(A - i'_2) &\geq \sin\left(A - \arcsin\left(\frac{n_0}{n}\right)\right) & (x \mapsto \sin(x) \text{ est croissante sur } [0; \frac{\pi}{2}]) \\ \Leftrightarrow \sin(i'_1) &\geq \sin\left(A - \arcsin\left(\frac{n_0}{n}\right)\right) \\ \Leftrightarrow \frac{n_0}{n} \sin(i_1) &\geq \sin\left(A - \arcsin\left(\frac{n_0}{n}\right)\right) \\ \Leftrightarrow \sin(i_1) &\geq \frac{n}{n_0} \sin\left(A - \arcsin\left(\frac{n_0}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

D'où, la fonction arcsin étant croissante :

$$i_1 \geq i_{1,\text{lim}} = \arcsin\left[\frac{n}{n_0} \sin\left(A - \arcsin\left(\frac{n_0}{n}\right)\right)\right]$$

A.N : pour $A = 60^\circ$, $n = 1,50$ et $n_0 = 1,00$, $i_{1,\text{lim}} = 27,9^\circ$.

b) Si cette condition n'est pas respectée, il y a **réflexion totale** au niveau de la face de « sortie ». Le rayon est alors renvoyé vers le bas et sort par la base du prisme :



R 4. On sait que $D = i_1 + i_2 - A$. Or les trois relations suivantes lient les quatre angles entre eux :

$$\begin{cases} n_0 \sin(i_1) = n \sin(i'_1) & (\text{réfraction à l'entrée}) \\ i'_1 + i'_2 = A & (\text{triangle orange}) \\ n \sin(i'_2) = n_0 \sin(i_2) & (\text{réfraction à la sortie}) \end{cases}$$

La première donne $i'_1 = \arcsin\left(\frac{n_0}{n} \sin(i_1)\right)$, la deuxième $i'_2 = A - i'_1$, et la troisième :

$$\begin{aligned}\sin(i_2) &= \frac{n}{n_0} \sin(i'_2) \\ \Leftrightarrow \sin(i_2) &= \frac{n}{n_0} \sin(A - i'_1) \\ \Leftrightarrow \sin(i_2) &= \frac{n}{n_0} \sin\left(A - \arcsin\left(\frac{n_0}{n} \sin(i_1)\right)\right)\end{aligned}$$

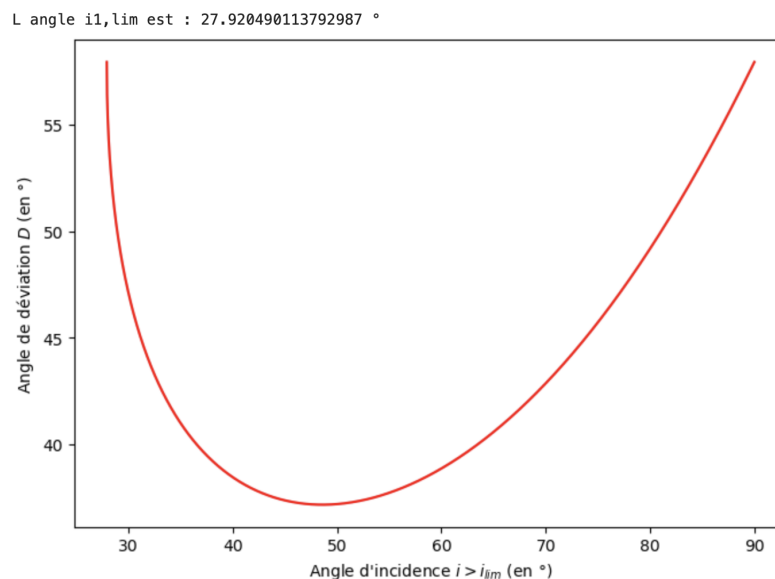
Finalement, $i_2 = \arcsin\left(\frac{n}{n_0} \sin\left(A - \arcsin\left(\frac{n_0}{n} \sin(i_1)\right)\right)\right)$, et en reportant dans l'expression de D :

$$D = i_1 + \arcsin\left[\frac{n}{n_0} \sin\left(A - \arcsin\left(\frac{n_0}{n} \sin(i_1)\right)\right)\right] - A$$

R 5. Traçons $D(i_1)$ pour $A = 60^\circ$ et $n = 1,50$. Le domaine de tracé est nécessairement $i_1 \in \left[i_{1,\text{lim}}; \frac{\pi}{2}\right]$: en deçà de $i_{1,\text{lim}} = 27,9^\circ$, le rayon ne ressort pas par la face de sortie (question 3) et D n'est pas défini. Voici le script *Python* utilisé :

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # -----
5 # Parametres du probleme
6 # -----
7 A_deg = 60.0      # angle au sommet du prisme (degres)
8 n = 1.50          # indice optique du prisme
9 n0 = 1.00         # indice optique de l'air
10
11 A = np.radians(A_deg)
12
13 # -----
14 # Angle d'incidence limite d'emergence
15 # -----
16 i_lim = np.arcsin(n/n0 * np.sin(A - np.arcsin(n0/n)))
17 i_lim_deg = np.degrees(i_lim)
18
19 # -----
20 # Calcul de D sur le domaine d'emergence [i_lim ; 90 deg]
21 # -----
22 i1_deg = np.linspace(i_lim_deg, 90.0, 2000)
23 i1 = np.radians(i1_deg)
24
25 i1prime = np.arcsin(np.sin(i1) / n)      # refraction a l'entree
26 i2prime = A - i1prime                   # angle sur la face de sortie
27 i2 = np.arcsin(n * np.sin(i2prime))     # refraction a la sortie
28
29 D = i1 + i2 - A
30 D_deg = np.degrees(D)
31
32 fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 5.5))
33 ax.plot(i1_deg, D_deg, color="red")
34 plt.ylabel("Angle de deviation $D$ (en )")
35 plt.xlabel("Angle d'incidence $i_1 > i_{\text{lim}}$ (en )")
36 print('L angle i1,lim est :', i_lim_deg, ' ')
37 plt.show()
```


Voici ce que renvoie le code *Python* :



La courbe présente un **minimum**, ce qui montre l'existence d'un angle de déviation minimal D_m atteint pour un angle d'incidence i_m :

$$i_m \simeq 48^\circ \quad \text{et} \quad D_m \simeq 37^\circ$$

NB : on peut retrouver ces valeurs analytiquement. Le minimum correspond à la configuration symétrique $i_1 = i_2 = i_m$ (donc $i'_1 = i'_2 = \frac{A}{2}$), pour laquelle $\sin(i_m) = \frac{n}{n_0} \sin\left(\frac{A}{2}\right)$ et $D_m = 2i_m - A$. C'est cette propriété qui est exploitée expérimentalement au goniomètre pour mesurer l'indice d'un prisme.

- R 6.** Le tableau montre que l'indice de réfraction du plexiglas dépend de la longueur d'onde : il s'agit d'un **milieu dispersif**. Ici, n décroît quand λ croît (dispersion normale) : le rouge est donc moins dévié que le violet.

Comme D est une fonction croissante de n , un même angle d'incidence i_1 conduit à des déviations différentes selon la couleur : en éclairant le prisme en lumière blanche, on observe en sortie la décomposition de la lumière blanche en un spectre continu, du rouge (le moins dévié) au violet (le plus dévié).

