

Chapitre E2 : Circuits linéaires du premier ordre

Plan du cours

I. Les circuits RC	2
I. 1 - Qu'est-ce qu'un condensateur ? (révisions de Terminale Spé)	2
I. 2 - Charge d'un condensateur dans un circuit RC série	4
I. 3 - Décharge d'un condensateur dans un circuit RC série	8
I. 4 - Intensité du courant électrique dans un circuit RC série	9
I. 5 - Bilan de puissance, bilan énergétique	9
II. Les circuits RL	10
II. 1 - Qu'est-ce qu'une bobine ?	10
II. 2 - Intensité et tension dans un circuit RL série	12
II. 3 - Bilan énergétique	12
II. 4 - Étude de la bobine en régime libre dans un circuit RL série	12

Introduction

▷ De nombreuses applications nécessitent l'utilisation d'un circuit électrique contenant un condensateur et une ou plusieurs résistances. Par exemple, dans le flash d'un appareil photographique, un condensateur se décharge rapidement pour alimenter la lampe du flash. Un circuit électrique linéaire soumis à une variation brutale de sa tension d'alimentation se comporte d'une façon particulière lors d'un régime transitoire lui permettant de revenir dans un état de régime permanent.

Les bobines quant à elles sont essentielles dans les circuits oscillants, les transformateurs et les filtres radiofréquence. On les retrouve notamment dans les moteurs électriques, les chargeurs sans fil, ou encore des appareils médicaux comme les IRM.



Problématique :

Comment se comportent les circuits linéaires du 1er ordre contenant un condensateur ou une bobine en régime transitoire ? Comment déterminer les caractéristiques de ce régime pour différents circuits ?

I. Les circuits RC

I. 1 - Qu'est-ce qu'un condensateur ? (révisions de Terminale Spé)



Définition n°1 : Condensateur

▷ Un condensateur est un dipôle électrique constitué de deux armatures métalliques en regard l'une de l'autre et séparées par un matériau isolant. Lorsqu'un courant électrique est établi dans un circuit comportant un condensateur, celui-ci se charge (les charges du courant électrique viennent s'accumuler sur une armature, et des charges opposées s'accumulent sur l'autre armature pour assurer la neutralité électrique de tout l'édifice). On remarque $q \propto u_C$. La charge accumulée est proportionnelle à la tension aux bornes du condensateur. Ce facteur de proportionnalité est appelé "capacité" du condensateur que l'on note C exprimée en FARAD (F). Finalement :

On schématise ainsi un condensateur dans un circuit électrique :



Propriété n°1 : Relation intensité/tension d'un condensateur (révisions de Terminale Spé)



Démonstration :

.....

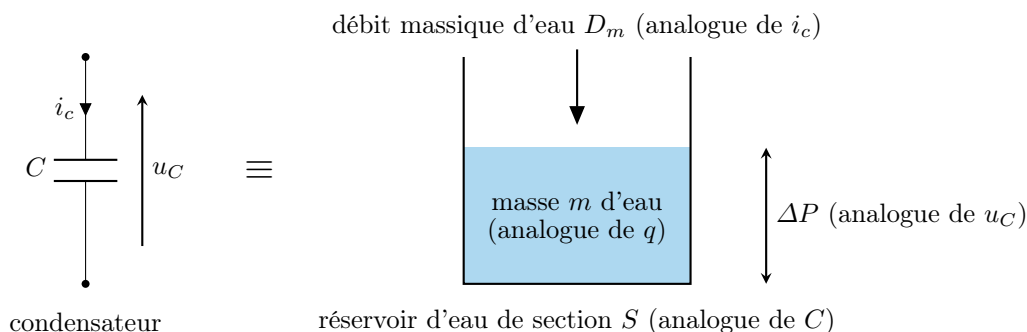
.....

.....



Remarque

▷ Dressons une analogie hydraulique pour le fonctionnement du condensateur : le réservoir contient une masse d'eau m (l'analogue de la charge q). Le débit massique d'eau D_m (l'analogue du courant électrique i_c) qui entre fait varier cette masse d'eau : $D_v = dm/dt$. La tension u_C correspond à la différence de pression ΔP créée par la hauteur d'eau accumulée ($\Delta P = mg/S$). Enfin, plus la section S du réservoir est grande, plus il faut accumuler d'eau (donc de charge q) pour faire varier la pression (donc la tension) : on retrouve bien la relation $q = Cu_C$ ($\Leftrightarrow m \propto S\Delta P$).



**Propriété n°2 : Équivalence du condensateur en régime permanent****Ordres de grandeur :**

Le FARAD est une "grande" unité : il est rare de rencontrer une capacité de l'ordre d'1 F. Pour se donner une idée, voici quelques valeurs de capacités :

- $C \sim 1 \text{ nF}$ (condensateurs de TP utilisant un diélectrique en verre) ;
- $C \sim 1 \text{ mF}$ (condensateurs électrolytiques) ;
- $C \sim 10^3 \text{ F}$ (certains supercondensateurs utilisés dans l'industrie des transports, de l'automobile notamment).

▷ Étudions désormais le caractère énergétique du condensateur et une propriété phare qui en découle.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

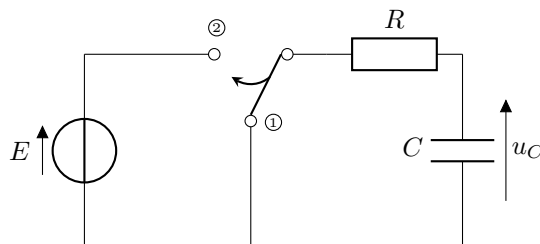
**Propriété n°3 : Énergie stockée par un condensateur**

L'énergie étant une grandeur nécessairement continue dans le temps : si l'énergie faisait un saut (une discontinuité) à un instant donné, cela signifierait qu'une quantité d'énergie finie a été transférée en un temps nul, donc qu'il a fallu une puissance **infinie à cet instant**. Or, aucune source physique réelle ne peut délivrer une puissance infinie (même instantanément) : la puissance est toujours une grandeur bornée dans un système physique réel ❤️. On en déduit donc cette propriété **fondamentale** pour un condensateur :

**Propriété n°4 : Continuité de la tension aux bornes d'un condensateur**

I. 2 - Charge d'un condensateur dans un circuit RC série

▷ On considère le circuit ci-dessous dans lequel l'interrupteur est positionné depuis longtemps en position 1. Le condensateur est déchargé. À $t = 0$, l'interrupteur est basculé de la position 1 à la position 2.



1) Établissement de l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Définition n°2 : Forme canonique d'une équation différentielle linéaire d'un circuit du premier ordre

▷ Toutes les grandeurs électrocinétiques d'un circuit linéaire du premier ordre obéissent, en régime transitoire vers un état stationnaire, à la même équation dite canonique de la forme :



Application n°1 : Encore d'autres équations différentielles !

- Q 1.** Reprendre l'étude précédente afin d'établir l'équation différentielle vérifiée par la charge q du condensateur pour $t > 0$. On proposera deux méthodes afin d'obtenir cette équation différentielle.
- Q 2.** Déterminer l'équation différentielle vérifiée par i_c pour $t > 0$.



Méthode : Résolution d'une équation différentielle linéaire (EDL) d'ordre 1 à coefficients constants

▷ Soit l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau}y = \frac{Y_{\infty}}{\tau}$$

- Déterminer la solution générale y_h de l'équation homogène (dite sans second membre, donc sans le terme
- Déterminer une solution particulière $y_p(t) = K \in \mathbb{R}$ (donc $\frac{dy_p}{dt} = 0$). On a dans ce cas :
- La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution homogène et de la solution particulière :
- Déterminer la constante d'intégration A à l'aide de la condition initiale $y(t = 0)$.



On ne détermine surtout pas A à l'aide des conditions initiales portant sur $u_{c,h}$, cela n'aurait **AUCUN** sens physique et conduirait de façon certaine à un résultat totalement faux.

3) Tracé du graphe $u_C = f(t)$, notion de régime transitoire

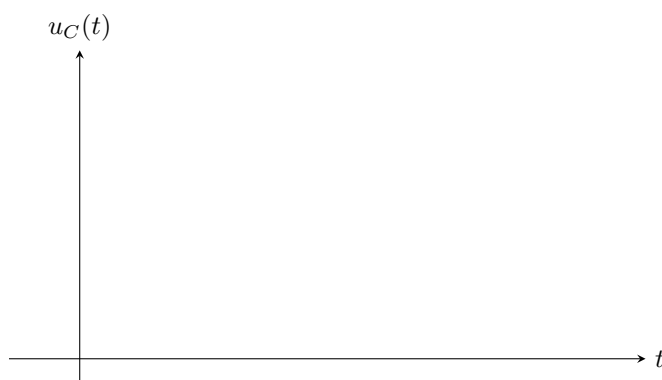
▷ En électrocinétique, on parle de **régime transitoire** lorsque les tensions et intensités mettent un certain temps à s'établir et à atteindre un nouveau régime permanent lorsqu'un changement brutal intervient dans un circuit. Au cours d'un régime transitoire, les tensions et intensités évoluent dans le temps entre un premier régime permanent et le nouveau régime permanent.

.....

.....

.....

.....

**4) Analyses quantitatives du graphe $u_C = f(t)$**

▷ Premièrement, cherchons une condition sur t pour considérer que le régime transitoire est achevé et que le deuxième régime permanent prend place.

.....

.....

.....

.....

.....

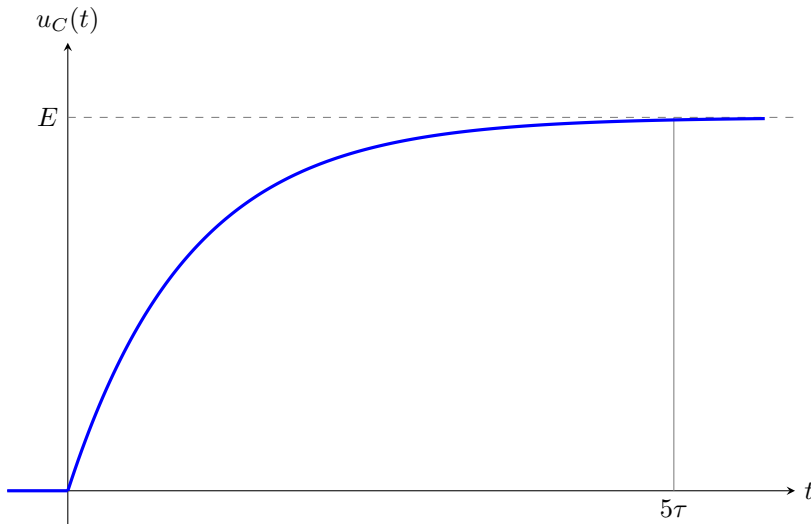
.....



Propriété n°5 : Durée du régime transitoire de la charge d'un condensateur dans un circuit RC

▷ Deuxièmement, cherchons plusieurs moyens de remonter à la valeur de τ à partir du graphe $u_C = f(t)$. Nous allons ici "zoomer" sur la partie du régime transitoire pour y voir plus clair.

Méthode n°1 : tangente à l'origine

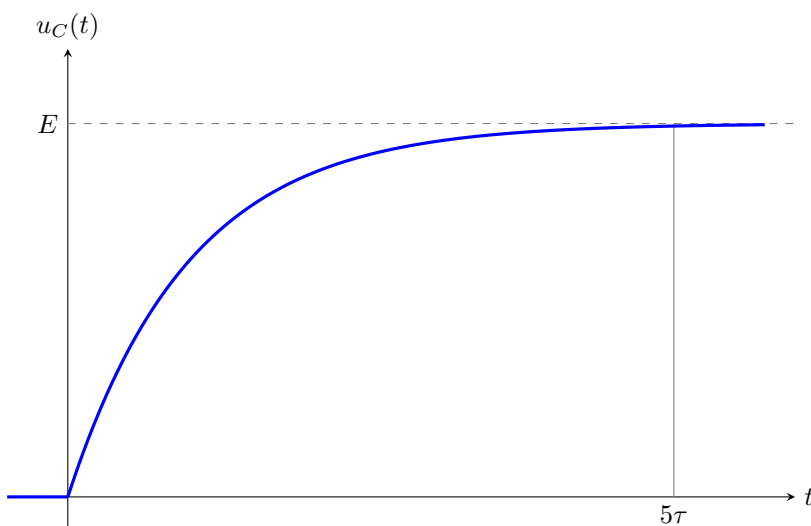


♥ **Propriété n°6 : Intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote**

▷ En effet, la tangente à l'origine a pour équation de droite :

.....

Méthode n°2 : lecture graphique à 63% de la charge finale

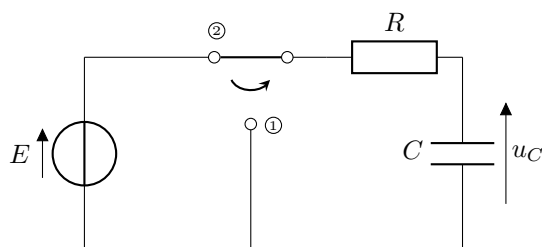


♥ **Propriété n°7 : Temps de réponse à 63% d'un système du premier ordre en charge**

.....

I. 3 - Décharge d'un condensateur dans un circuit RC série

- ▷ On considère toujours le même circuit dans lequel l'interrupteur est positionné cette fois-ci depuis longtemps en position 2. Le condensateur est totalement chargé. À $t = 0$, l'interrupteur est basculé de la position 2 à la position 1.



1) Établissement de l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur

.....

.....

.....

.....

.....

2) Résolution de l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur

.....

.....

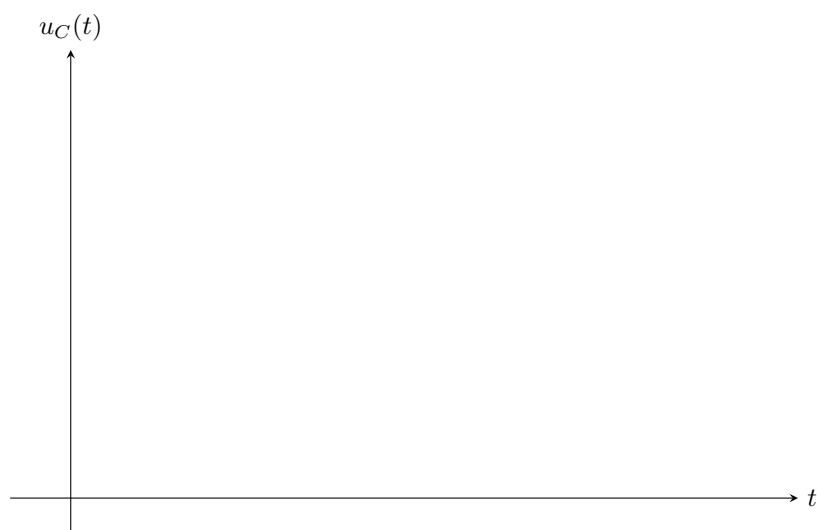
.....

.....

.....

.....

3) Tracé du graphe $u_C = f(t)$ + analyses quantitatives



 **Application n°2 : À vous de jouer sur la décharge du condensateur !**

Q 1. Montrer que $t \gtrsim 5\tau$ pour atteindre la fin du régime transitoire de la décharge du condensateur.

Q 2. Montrer que la tangente à l'origine intercepte l'asymptote en $t = \tau$.

Q 3. Montrer que $t = \tau$ lorsque $u_C(t) \simeq 0,37E$.

On se rend compte que charge et décharge d'un condensateur sont complémentaires du point de vue de l'analyse du graphe $u_C = f(t)$.

I. 4 - Intensité du courant électrique dans un circuit RC série

.....

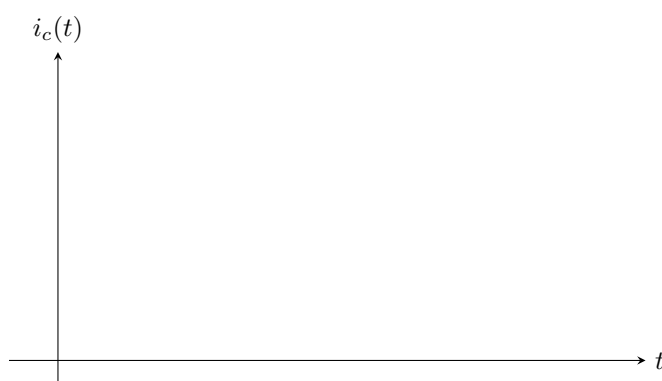
.....

.....

**Remarques**

1. On se rend compte que le courant traversant le condensateur est une grandeur électrocinétique discontinue. En effet, $i_c(0^-) = 0 \neq i_c(0^+) = \frac{E}{R}$.
2. En régime permanent, $i_c(t \rightarrow +\infty) = 0$, montrant bien que le condensateur se comporte bel et bien comme un interrupteur ouvert.

Traçons le graphe $i_c = f(t)$.



I. 5 - Bilan de puissance, bilan énergétique

**Méthode : Bilan de puissance dans un circuit électrique**

1. Multiplier la loi des mailles par i .
2. Interpréter chaque terme. On se rend compte que la puissance électrique fournie par le générateur est intégralement retransmise aux dipôles alimentés.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Méthode : Bilan d'énergie dans un circuit électrique**

1. Si la loi des mailles a déjà été multipliée par i , alors multiplier tous les termes par le petit temps dt puis intégrer entre $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$, sinon multiplier par $i dt$ et intégrer.
2. Remplacer i par son expression qui dépend de t pour mener à bien les calculs.

**Application n°3 : Bilan d'énergie du circuit RC**

On s'intéresse toujours à la réponse à un échelon de tension $0 \rightarrow E$ du circuit RC , pour lequel on a

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau} \right).$$

- Q 1.** Déterminer l'énergie électrique totale fournie entre $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$ par le générateur ainsi que l'énergie reçue par le condensateur et l'énergie dissipée dans la résistance ♥.
- Q 2.** Vérifier la conservation de l'énergie.
- Q 3.** Définir et calculer le rendement énergétique du condensateur.

II. Les circuits RL

II. 1 - Qu'est-ce qu'une bobine ?

**Définition n°3 : Bobine**

▷ Une bobine est un dipôle électrique constitué d'un enroulement de fil conducteur.

**Remarque**

▷ Lorsqu'une bobine est parcourue par un courant, un champ magnétique qui tend à s'opposer aux variations de courant apparaît : c'est un effet d'induction (*cf cours d'induction*).

On peut rencontrer des bobines de tailles variées, tant en diamètre qu'en longueur. Elles peuvent être utilisées pour leurs propriétés électriques (comme dans ce chapitre) ou pour produire des champs magnétiques.

**Ordres de grandeur :**

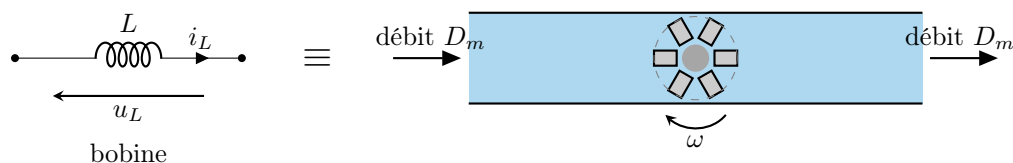
- L'inductance d'une bobine manipulée en TP est généralement de l'ordre de $L \sim 1 \text{ mH}$.
- Certains laboratoires de recherche ont pu développer des bobines supraconductrices atteignant une inductance $L \sim 10 \text{ H}$

On schématise ainsi une bobine dans un circuit électrique :

**Propriété n°8 : Relation intensité/tension d'une bobine**

**Remarque**

▷ Dressons une analogie hydraulique pour le fonctionnement d'une bobine :



Une bobine se comporte comme une roue à pâles dans un écoulement d'eau. Lors de l'arrivée d'eau dans le circuit, le passage est "difficile" car il faut mettre en mouvement les pâles de la roue. Au fur et à mesure que l'eau passe, les roues, déjà entraînées tournent plus facilement, et résistent moins au débit d'eau. En régime permanent, la roue ne résiste plus du tout au passage de l'eau et $\omega = \text{cste}$ (vitesse angulaire de rotation de la roue). Nous reviendrons plus en détail sur l'analogie lors de l'étude des solides en rotation, car nous n'avons pas encore tous les outils pour la comprendre avec précision.

**Propriété n°9 : Équivalence de la bobine en régime permanent**

▷ Étudions désormais le caractère énergétique d'une bobine et une propriété phare qui en découle.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Propriété n°10 : Énergie stockée par une bobine**

Pour les mêmes raisons qu'un condensateur, on en déduit la propriété suivante :

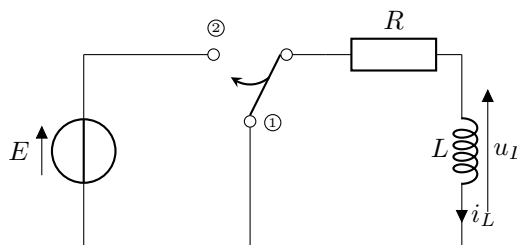
**Propriété n°11 : Continuité de l'intensité du courant électrique traversant une bobine**

II. 2 - Intensité et tension dans un circuit RL série

▷ Suivons le même canevas de résolution que celui du condensateur.

**Application n°4 : Intensité et tension pour une bobine dans un circuit RL série**

▷ On considère le circuit suivant dans lequel l'interrupteur est en position 1 depuis longtemps. À $t = 0$, on bascule l'interrupteur de la position 1 à la position 2.



- Q 1. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i_L . On exprimera un temps caractéristique τ en fonction de L et R . ♥
- Q 2. En déduire l'expression temporelle de $i_L(t)$. ♥
- Q 3. Tracer le graphe $i_L = f(t)$.
- Q 4. Déterminer l'expression temporelle de $u_L(t)$, puis tracer le graphe $u_L = f(t)$.
- Q 5. Conclure si les résultats du deuxième régime permanent valident le modèle de la bobine en régime permanent.

II. 3 - Bilan énergétique

.....

.....

.....

.....

.....

.....

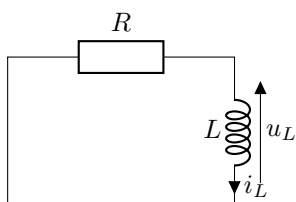
.....

.....

II. 4 - Étude de la bobine en régime libre dans un circuit RL série

**Application n°5 : Bobine en régime libre**

▷ On souhaite à présent étudier l'évolution du circuit RL en régime libre (sans générateur). On suppose que le courant a été préalablement établi et reprend comme origine des temps $t = 0$: $i_L(t = 0^-) = \frac{E}{R}$.



Question : Déterminer les expressions temporelles de l'intensité du courant électrique $i_L(t)$ et de la tension $u_L(t)$ aux bornes de la bobine, puis mener le bilan énergétique de ce système.