

Corrigé des applications de cours
du chapitre E2

Application n° 1: Encore d'autres équations différentielles!

Q1) Méthode n° 1: Partir de la LDM

$$E - u_R - u_C = 0 \quad \text{a} \quad u_C = \frac{q}{C}, \quad i_C = \frac{dq}{dt}$$

D'al $E - R \frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \Leftrightarrow R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$

$\Leftrightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = \frac{E}{R} \quad \text{avec } \tau = RC$

Méthode n° 2: Remplacer u_C par $\frac{q}{C}$ ds l'équation diff.

Q2) On dérive l'ED vérifiée par la charge, par rapport au temps.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{R} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(i_C + \frac{q}{\tau} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{di_C}{dt} + \frac{1}{\tau} i_C = 0$$

Application n° 2: A vous de jouer sur le décharge du condensateur!

Q1) Idem à ce qui a été fait P7 du cours.

Q2) " " " " " " " " " " " "

Q3) $u_C(\tau) = E e^{-1} = 0,37 E$

Application n° 3 : Bilan d'énergie du circuit RC

Q1)

$$\text{LDM} \times i dt : E i dt = R i^2 dt + u_c i dt$$

avec $i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$

$$\Rightarrow E i dt = R i^2 dt + C u_c \frac{du_c}{dt} \times dt$$

$$\Rightarrow E i dt = R i^2 dt + C u_c du_c$$

$$\Rightarrow \int_{t=0}^{+\infty} E i dt = \int_{t=0}^{+\infty} R i^2 dt + \int_{u_c(0)}^{u_c(\infty)} C u_c du_c$$

$\mathcal{E}_g$ $\mathcal{E}_J$ $\mathcal{E}_C$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R} e^{-t/\tau} dt = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R} e^{-2t/\tau} dt + \int_0^E C u_c du_c$$

$$a \quad \int_0^{+\infty} e^{-t/\tau} dt = \left[-\tau e^{-t/\tau} \right]_0^{t \rightarrow +\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\tau e^{-t/\tau} - (-\tau e^0)$$

$$= \tau$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t/\tau} dt = \left[-\frac{\tau}{2} e^{-t/\tau} \right]_0^{t \rightarrow +\infty} = \frac{\tau}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\tau E^2}{R}}_{\mathcal{E}_g} = \underbrace{\frac{\tau E^2}{2R}}_{\mathcal{E}_J} + \underbrace{\frac{1}{2} C [u_c^2]_0^E}_{\mathcal{E}_C}$$

$$\mathcal{E}_g = CE^2$$

$$\mathcal{E}_J = \frac{1}{2} CE^2$$

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} CE^2$$

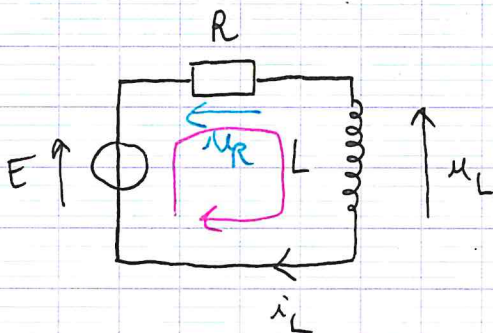
Q2) On remarque que l'énergie est bien conservée
 $\hookrightarrow \mathcal{E}_g = \mathcal{E}_J + \mathcal{E}_L \quad (CE^2 = \frac{1}{2}CE^2 + \frac{1}{2}CE^2)$

Q3) Notons η le rendement: $\eta = \frac{\text{ém. utile}}{\text{ém. coûteuse}} = \frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}_g}$

D'ai $\eta = \frac{\frac{1}{2}LE^2}{CE^2} \Leftrightarrow \eta = \frac{1}{2} = 50\%$

Application n°4 : Intensité et tension pour une bobine dans un circuit RL série.

Q1)



LDH : $E - u_R - u_L = 0$
 $\Leftrightarrow E - Ri_L - L \frac{di_L}{dt} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{\tau} i_L = \frac{E}{L}$

ai $\tau = \frac{L}{R}$

Q2) (EH) : $\frac{di_{L,h}}{dt} + \frac{1}{\tau} i_{L,h} = 0 \Leftrightarrow i_{L,h}(t) = A e^{-t/\tau}$

Sol. particulière : $i_{L,p}(t) = K \Leftrightarrow \frac{1}{\tau} i_{L,p}(t) = \frac{E}{L}$

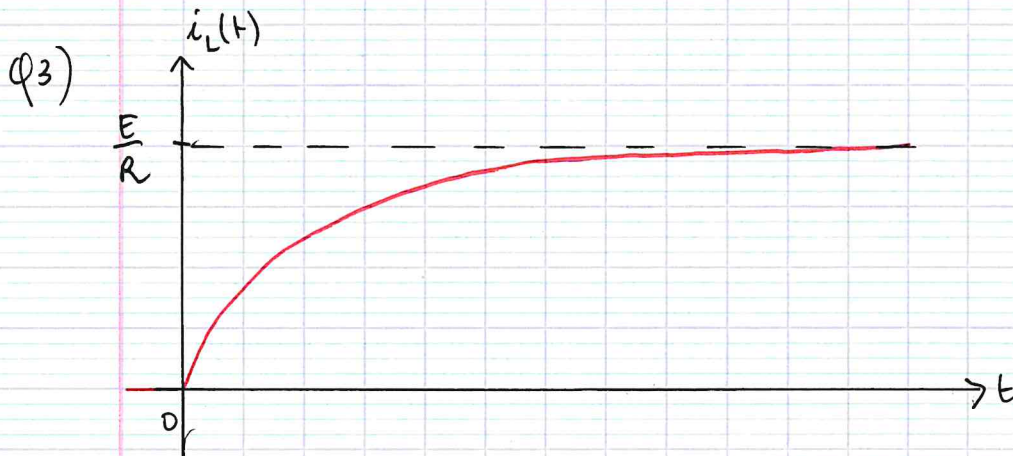
$\Leftrightarrow i_{L,p}(t) = \frac{\tau E}{L} = \frac{KE}{R\tau} = \frac{E}{R}$

Donc $i_L(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$

À $t=0^-$, $i_L(0^-) = 0$ (interrupteur ouvert)

À $t=0^+$, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = i_L(0) = 0$ par continuité du courant. D'où $i_L(0) = A + \frac{E}{R} = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{E}{R}$

Donc $i_L(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})$ où $\tau = \frac{L}{R}$.



Q4)

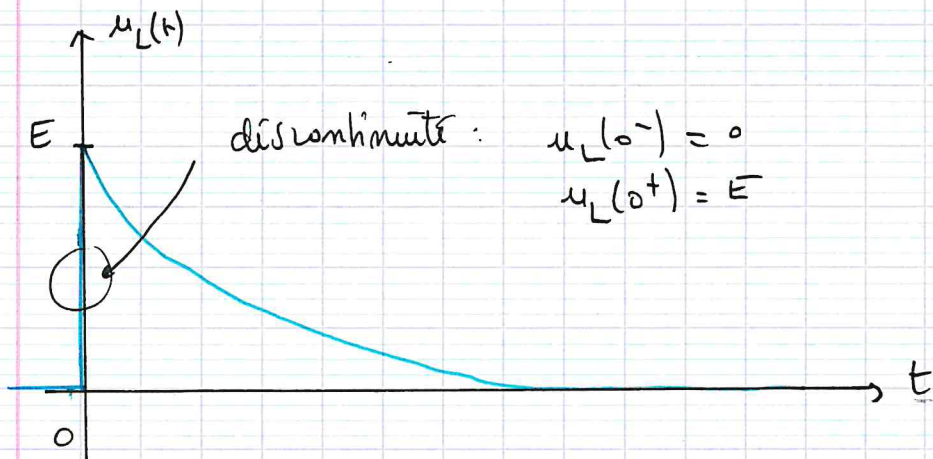
$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}(t) \Rightarrow u_L(t) = L \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-t/\tau} \right)$$

$$\Rightarrow u_L(t) = -\frac{LE}{R} \times \left(-\frac{1}{\tau} \right) e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow u_L(t) = \frac{LER}{LR} e^{-t/\tau}$$

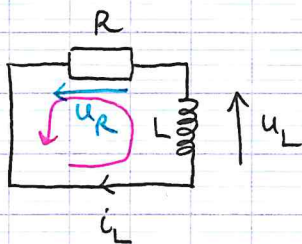
$$\Rightarrow u_L(t) = E e^{-t/\tau}$$

Cette expression vaut pour $t > 0$. Pour $t \leq 0$, $u_L(t) = 0$ (la bobine est équivalente à un fil en RL).



Q5) Lorsque $t \rightarrow +\infty$, $u_L(t) \rightarrow 0$: la bobine est assimilable à un fil: OK.

Application n°5: Bobine en régime libre



LOM: ↻

$$u_R + u_L = 0$$

$$\Leftrightarrow Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = 0$$

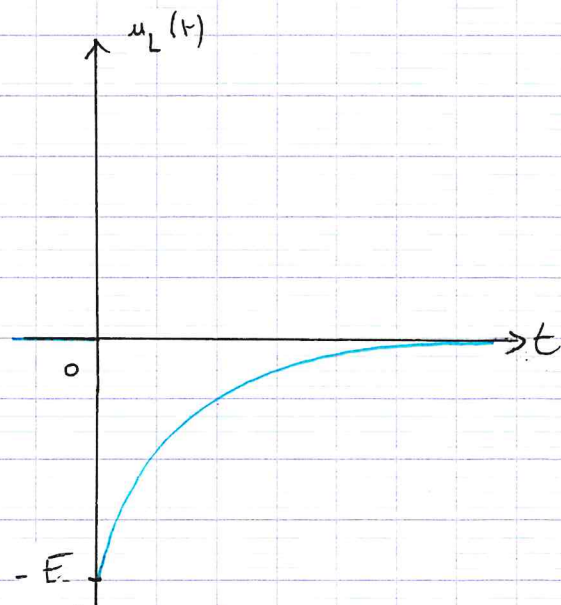
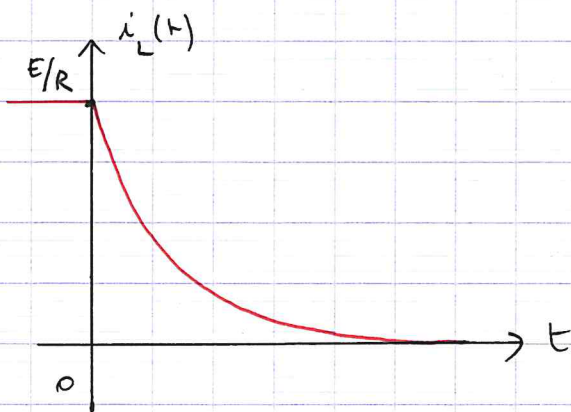
$$\Leftrightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{\tau} i_L = 0 \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}$$

$$\left. \begin{aligned} i_L(t) = i_{Lh}(t) &= A e^{-t/\tau} \\ \text{À } t=0, \quad i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) &= \frac{E}{R} = A \end{aligned} \right\} i_L(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} \Leftrightarrow u_L(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot L \cdot \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

$$\Leftrightarrow u_L(t) = -E e^{-t/\tau} \quad (t > 0)$$

Pour $t \leq 0$, $u_L(t) = 0$ (RP: bobine $\Leftrightarrow$ f.c.l.)



Rq: $p_L(t) < 0$: fonctionnement générateur.

Bilan énergétique (LOMxide): $u_R i dt + u_L i dt = 0$

$$\Leftrightarrow Ri^2 dt + L i di = 0 \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

E2

6

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t/\tau_0} dt = \frac{\tau_0}{2}$$

$$\mathcal{E}_{R, \text{tot}} = \int_0^{+\infty} R i^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R} e^{-2t/\tau_0} dt = \frac{2E^2}{2R} = \frac{1}{2} L i(0)^2.$$

$$\mathcal{E}_{L, \text{tot}} = \int_{i(0)}^{i(\infty)} L i di = \frac{1}{2} L i(\infty)^2 - \frac{1}{2} L i(0)^2 = -\frac{1}{2} L i(0)^2.$$

D'où $\mathcal{E}_{L, \text{tot}} = -\mathcal{E}_{R, \text{tot}}.$

Il y a bien conservation de l'énergie. L'énergie magnétique stockée par la bobine est dissipée par effet Joule de la résistance.