

Chapitre E3 : Circuits linéaires du second ordre (partie 1)

Oscillateurs électriques harmoniques

Plan du cours

I. Représentation et caractéristiques d'un signal harmonique	2
II. Circuit LC série : un oscillateur électrique harmonique	4

Introduction

▷ Que ce soient les battements du cœur, une vaguelette à la surface de l'eau, une onde acoustique dans un solide ou encore la vibration d'une molécule diatomique, ces phénomènes ont un point commun : ils mettent en jeu ce que l'on appelle des **oscillations**. Ainsi, nous allons introduire dans ce chapitre un modèle physique transversal très simple qui permet de décrire dans une première approche les oscillations. C'est le modèle de l'**oscillateur harmonique**. Nous allons étudier ce modèle à travers un système oscillant électrique. On étudiera ultérieurement un système oscillant mécanique dans les chapitres dédiés, en mettant en évidence une analogie entre les deux systèmes.



Problématique :

Qu'est ce qu'un oscillateur harmonique ? Quelles sont ses caractéristiques et quels transferts énergétiques sont mis en jeu ?

I. Représentation et caractéristiques d'un signal harmonique

▷ Un signal harmonique est un signal sinusoïdal (donc périodique). Il existe tout un vocabulaire riche et précis autour de cette notion et qui sera à maîtriser finement, car les signaux harmoniques seront au cœur de plein de chapitres, que ce soit en classe de 1ère année ou en deuxième année.



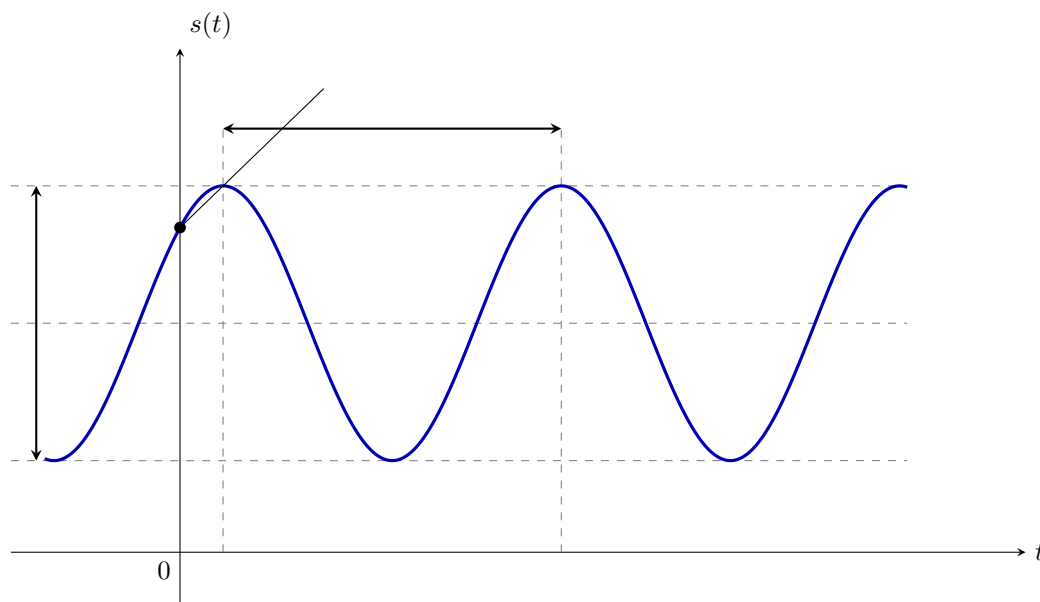
Définition n°1 : Signal périodique

▷ Un signal périodique est une grandeur physique qui se répète à intervalle de temps régulier de manière identique. La période d'un signal est la plus petite durée T non-nulle de répétition d'un motif élémentaire : $s(t + T) = s(t)$. Son inverse, notée f , correspond au nombre de motifs par unité de temps. On appelle cette grandeur la fréquence du signal. Elle s'exprime en HERTZ (Hz), avec $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$:

$$f = \frac{1}{T}$$

De façon la plus générale, un signal harmonique peut s'écrire sous la forme :

et a pour représentation graphique ♥ :



Propriété n°1 : Caractéristiques d'un signal harmonique

Ce signal harmonique est caractérisé par les grandeurs suivantes :

- la **valeur moyenne** s_{moy} correspondant à la composante continue du signal, qui s'exprime dans la même unité que $s(t)$. Elle correspond dans la situation expérimentale précédente à la valeur autour de laquelle oscille le signal. Par définition, pour un temps t_0 quelconque, on a :

- l'**amplitude** du signal notée S_m . Elle correspond à la variation maximale du signal par rapport à sa valeur moyenne. Elle s'exprime dans la même unité que $s(t)$ et :

- la **période propre**, notée T , est la durée d'une oscillation complète : dit autrement, c'est la plus petite durée

au bout de laquelle le motif périodique se répète à l'identique. Elle s'exprime en seconde (s). On a la relation :

- la **fréquence propre**, notée f indique le nombre d'oscillations effectuées pendant une seconde.
- la **pulsation propre** qui est reliée à la fréquence propre par la relation :

- la **phase** notée $\varphi(t)$ qui correspond à l'argument de la fonction périodique. Elle s'exprime en radians (rad) et a pour expression :

- la **phase à l'origine**, notée φ_0 qui correspond à la valeur que prend l'argument de la fonction périodique à l'origine des temps $\varphi(t = 0) = \varphi_0$. Elle appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Nous allons maintenant démontrer l'expression de T en fonction de ω_0 , ainsi que celle de $\langle s(t) \rangle$ en fonction de s_{moy} .



Démonstration :



Application n°1 : Déterminer les caractéristiques d'un signal périodique

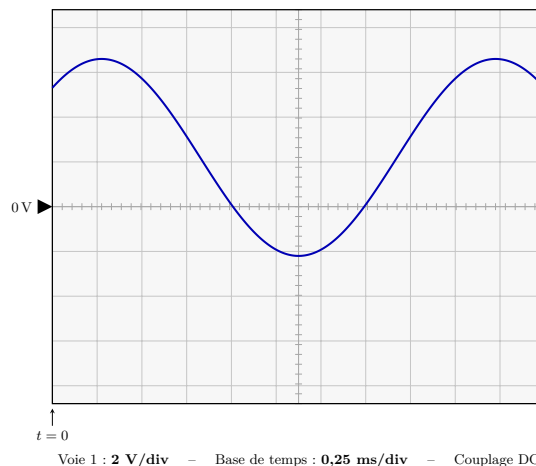
▷ Un générateur basses fréquences (GBF) délivre une tension périodique de la forme

$$e(t) = E + E_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

dont l'oscillogramme est reproduit ci-contre.

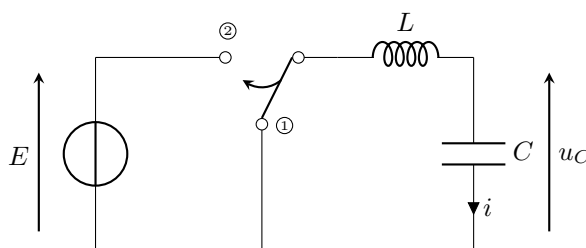
Question : À partir de l'oscillogramme, déterminer les valeurs numériques des grandeurs suivantes :

1. la période T ;
2. la fréquence f ;
3. la pulsation ω_0 ;
4. l'amplitude E_0 ;
5. la valeur moyenne $\langle e(t) \rangle$;
6. la phase à l'origine φ_0 .



II. Circuit LC série : un oscillateur électrique harmonique

▷ On considère un circuit LC dans lequel l'interrupteur est en position 1 depuis longtemps. Le condensateur est déchargé. À $t = 0$, on bascule l'interrupteur de la position 1 à la position 2.



1) Établissement de l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur



Remarque

On note $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right)$ la dérivée seconde par rapport au temps de la fonction y .

Définition n°2 : Équation différentielle linéaire du second ordre d'un oscillateur harmonique

▷ Un oscillateur harmonique est un système dont la grandeur $s(t)$ qui le caractérise vérifie l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

On reconnaît donc ici une équation type oscillateur harmonique (OH) vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur.

Application n°2 : D'autres équations différentielles sur ce circuit LC

Q 1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension u_L aux bornes de la bobine.

Q 2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'intensité électrique du courant i .

2) Résolution de l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur

Méthode : Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre type oscillateur harmonique

▷ Soit l'équation différentielle sous la forme :

1. Déterminer la solution générale s_h de l'équation homogène (dite sans second membre, donc sans le terme $\omega_0^2 s_{\text{moy}}$) :

2. Déterminer une solution particulière $s_p(t) = K \in \mathbb{R}$ (donc $\frac{d^2 s_p}{dt^2} = 0$). On a dans ce cas :

3. La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

4. Déterminer les constantes d'intégration A et B à l'aide de deux conditions initiales $s(t=0)$ et $\frac{ds}{dt}(t=0)$.

Remarque

On peut également exprimer la solution de l'équation homogène sous la forme suivante :

$$\exists (D, \varphi) \in \mathbb{R}^2 / s_h(t) = D \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

mais la détermination de D et φ est bien plus difficile que celle de A et B dans le cas où on exprime s_h comme dans le point méthode explicité ci-dessus.

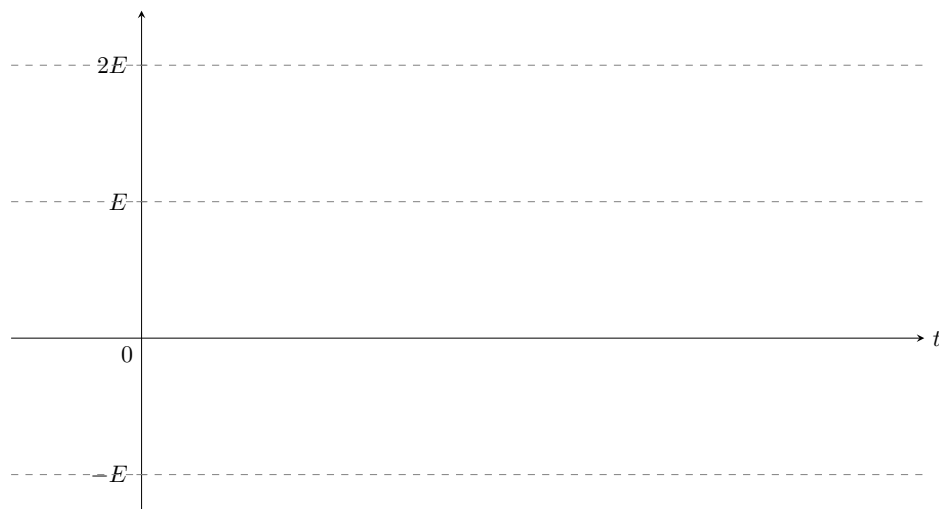


Attention !

On ne détermine surtout pas A et B à l'aide des conditions initiales portant sur $u_{c,h}$, cela n'aurait **AUCUN** sens physique et conduirait de façon certaine à un résultat totalement faux.

3) Détermination de l'expression littérale de la tension u_L aux bornes de la bobine

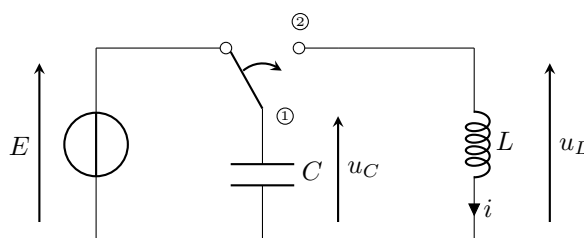
4) Tracé des graphes $u_C = f(t)$ et $u_L = g(t)$



▷ L'application qui va suivre est très importante et permet de résumer le cours ainsi que ses attendus. Entraînez-vous à la faire et à bien la comprendre. ❤

Application n°3 : Étude du circuit LC série en régime libre

▷ Un condensateur est chargé sous une tension E par l'intermédiaire d'un GBF lorsque l'interrupteur est placé en position 1. À $t = 0$, on bascule l'interrupteur de la position 1 à la position 2.



Q 1. Déterminer les conditions initiales suivantes : $i(0^-)$, $i(0^+)$, $u_C(0^-)$, $u_C(0^+)$, $u_L(0^-)$ et $u_L(0^+)$.

Q 2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension u_L aux bornes de la bobine.

Q 3. Résoudre cette équation différentielle.

Q 4. En déduire l'expression littérale de $u_C(t)$.

Q 5. En effectuant un bilan de puissance, montrer que :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C u_C^2 \right) = 0$$

Q 6. Montrer que l'énergie totale $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ du système se conserve, et montrer de deux manières différentes que

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{1}{2} C E^2.$$

Q 7. Tracer $\mathcal{E}_{\text{tot}} = f(t)$, $\mathcal{E}_C = g(t)$ (énergie du condensateur) et $\mathcal{E}_L = h(t)$ (énergie de la bobine) sur un même graphe. Commenter.