

TD E3 : Circuits linéaires du second ordre (partie 1)

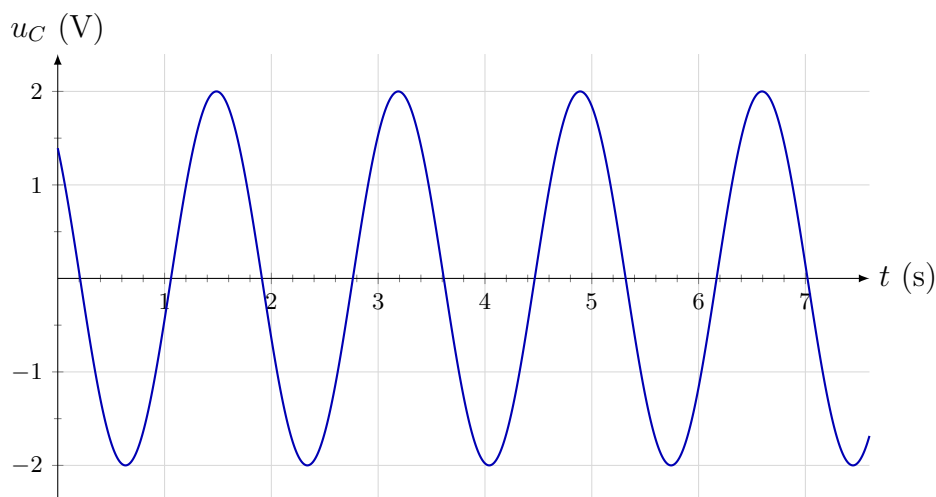
Oscillateurs électriques harmoniques

EX 1 – Analyse d'un signal harmonique

▷ En mesurant tension u_C aux bornes d'un condensateur dans un circuit LC série, on obtient le graphe expérimental ci-contre :

Q 1. Déterminer graphiquement les caractéristiques de l'oscillation (amplitude, pulsation propre, phase à l'origine). En déduire une expression de $u_C(t)$.

Q 2. Le condensateur a une capacité $C = 100 \text{ nF}$. En déduire la valeur de l'inductance L de la bobine.



EX 2 – Circuit LC parallèle

▷ Dans le circuit ci-dessous, le générateur supposé idéal est brusquement éteint. On le modélise par un échelon de courant, $\eta(t)$ passant de I_0 à 0 à l'instant $t = 0$. On appelle $E_{\text{tot}} = E_C + E_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.

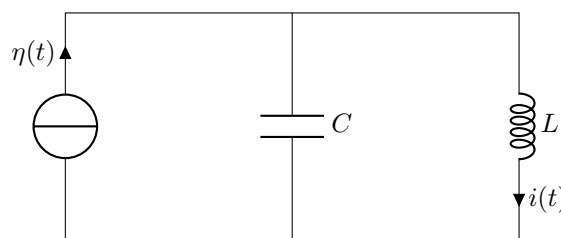
Q 1. Exprimer la dérivée $\frac{dE_{\text{tot}}}{dt}$ en fonction de i , $\frac{di}{dt}$ et $\frac{d^2i}{dt^2}$.

Q 2. Justifier qualitativement que E_{tot} est constante. En déduire l'équation différentielle vérifiée par i .

Q 3. Retrouver cette équation par application des lois de KIRCHHOFF.

Q 4. Établir les conditions initiales sur i et sa dérivée.

Q 5. En déduire l'expression de $i(t)$.



EX 3 – Analogie du circuit LC série : oscillateur mécanique harmonique de type masse/ressort

▷ Avant de commencer l'exercice, un petit point de cours sur les ressorts s'impose : lorsqu'un ressort est étiré ou comprimé, la masse y étant accrochée subit une force de rappel élastique d'expression :

$$\vec{F}_{\text{él}}(t) = -k(\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_{\text{bâti} \rightarrow \text{masse}}$$

avec :

- ℓ_0 la longueur à vide du ressort (c'est-à-dire sa longueur naturelle lorsqu'aucune masse n'est accrochée dessus lorsqu'il est à la verticale) ;
- k sa raideur qui traduit la "difficulté" à l'étirer ou à le comprimer ;
- $\ell(t)$ la longueur totale du ressort à l'instant t ;
- $\vec{u}_{\text{bâti} \rightarrow \text{masse}}$ le vecteur orienté du bâti (support du ressort, généralement fixe) vers la masse (système d'étude mobile)

▷ On considère une masse M suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . À l'instant initial $t = 0$, un expérimentateur lâche la masse m à une position $z(0) = z_0 > \ell_0$ avec un vecteur vitesse $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_z$.

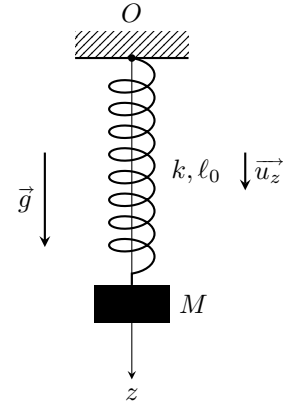
- Q 1.** Dresser le bilan des forces s'appliquant sur la {masse M }.
- Q 2.** Appliquer la deuxième loi de NEWTON au système {masse M } et déduire une équation vectorielle reliant le vecteur accélération $\vec{a}$ de la masse M et les forces qui s'y appliquent.
- Q 3.** Projeter cette équation vectorielle selon le vecteur unitaire $\vec{u}_z$ et en déduire l'équation différentielle suivante vérifiée par la position z de la masse :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = g + \omega_0^2 \ell_0$$

où ω_0 est une grandeur à exprimer en fonction de k et m .

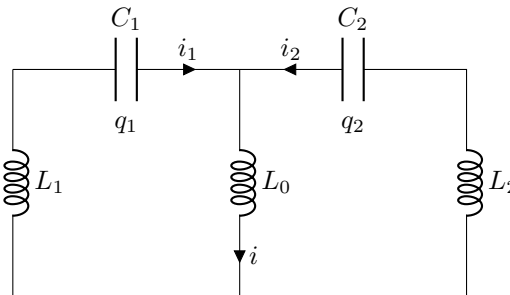
Indication : Pour rappel, l'accélération est la dérivée temporelle seconde de la position.

- Q 4.** Déterminer la position d'équilibre z_{eq} de la masse M en fonction de ℓ_0 , m , g et k .
Indication : À l'équilibre, la masse est immobile, que peut-on en déduire sur son accélération ?
- Q 5.** On pose $\tilde{z} = z - z_{\text{eq}}$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par $\tilde{z}$.
- Q 6.** Résoudre cette équation différentielle. En déduire l'expression de $z(t)$ puis tracer cette solution.



EX 4 – Oscillateurs électriques couplés (d'après Mines-Ponts Physique I filière MP, 2008)

▷ On considère le circuit schématisé ci-dessous. Initialement, seul le condensateur de la branche 2 porte la charge Q_0 , le condensateur de la branche 1 est déchargé, aucun courant ne circule dans les circuits. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .



- Q 1.** Établir les équations différentielles vérifiées par q_1 et q_2 en respectant les choix d'orientation de l'énoncé. Montrer que, dans le cas où $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = C$, elles sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \alpha \ddot{q}_2 + \beta q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \alpha \ddot{q}_1 + \beta q_2 = 0 \end{cases}$$

où α et β s'expriment en fonction de L , L_0 et C .

- Q 2.** Les équations précédentes étant couplées (préciser la signification de ce terme), on introduit les variables S et D telles que $S = q_1 + q_2$ et $D = q_1 - q_2$. Obtenir deux équations différentielles : l'une en S et l'autre en D . Vous poserez deux grandeurs caractéristiques ω_S et ω_D dont vous préciserez l'expression.
- Q 3.** Résoudre ces équations différentielles. En déduire que q_1 et q_2 s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} q_1(t) = Q_0 \sin(\omega_{\text{moy}} t) \sin(\omega_{\text{mod}} t) \\ q_2(t) = Q_0 \cos(\omega_{\text{moy}} t) \cos(\omega_{\text{mod}} t) \end{cases}$$

où ω_{moy} et ω_{mod} sont à exprimer en fonction de ω_S et ω_D .

Indication : $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ et $\cos(a) - \cos(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$

- Q 4.** Quel dipôle est responsable du couplage ? Discuter l'allure des évolutions des charges selon que le couplage est fort, faible ou nul. Tracer les courbes $q_1(t)$ et $q_2(t)$ dans le cadre d'un couplage faible.