

Chapitre E4 : Circuits linéaires du second ordre (partie 2)

Oscillateurs électriques amortis

Plan du cours

I. Circuit RLC série : équation différentielle d'un oscillateur électrique amorti	2
I. 1 - Établissement de l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur	2
I. 2 - Forme canonique de l'équation différentielle	2
I. 3 - Interprétation et comparaison avec l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique	3
II. Résolution de l'équation différentielle	3
II. 1 - Régime apériodique	4
II. 2 - Régime critique	6
II. 3 - Régime pseudo-périodique	7
II. 4 - Décroissance logarithmique	9
II. 5 - Récapitulatif des tracés des différents régimes sur un même graphe	10
III. Considérations énergétiques	11

Introduction

▷ Dans le chapitre E3, nous avons étudié les circuits LC , introduisant ainsi la notion d'oscillateur harmonique. Cependant ce type d'oscillateur harmonique n'est qu'une idéalisation d'un système physique en réalité plus complexe.

Un circuit LC série est en réalité un circuit RLC série. En effet, fils, bobines et condensateurs sont idéalisés. En réalité ils ont tous une résistance interne qui modélisent les aspects résistifs de leurs composants. L'introduction de la dissipation permet ainsi de "raffiner" le modèle précédent et de décrire plus fidèlement bon nombre de systèmes physiques.

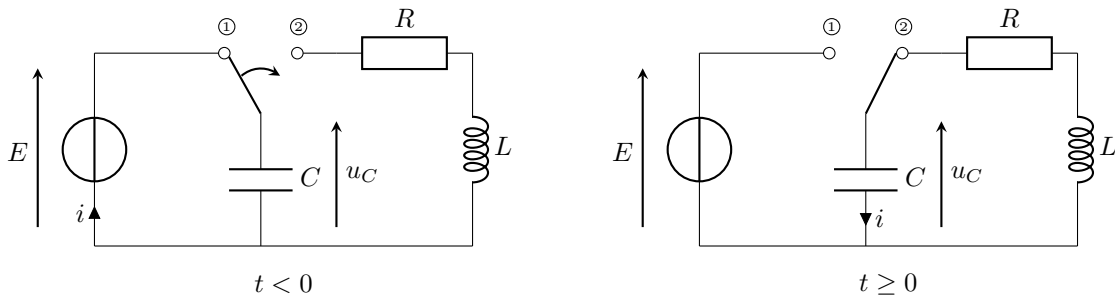


Problématique :

Quels points communs et différences peut-on dresser entre le circuit LC et le circuit RLC ? Comment décrire physiquement la notion d'amortissement?

I. Circuit RLC série : équation différentielle d'un oscillateur électrique amorti

▷ On considère un circuit RLC dans lequel l'interrupteur est en position 1 depuis longtemps. Le condensateur se charge sous une tension constante E et un premier régime permanent s'établit. À l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur de la position 1 à la position 2.



I. 1 - Établissement de l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur

En appliquant la loi des mailles (LDM), on obtient :

$$\begin{aligned} u_R + u_L + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow Ri + L \frac{di}{dt} + u_C &= 0 \quad (\text{loi d'OHM et relation intensité/tension d'une bobine}) \\ \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C &= 0 \quad (\text{relation intensité/tension d'un condensateur}) \end{aligned}$$

Finalement, en divisant partout par le terme LC , on a :

$$\boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0.}$$

I. 2 - Forme canonique de l'équation différentielle

♥ Définition n°1 : Forme canonique de l'équation différentielle d'un oscillateur amorti

▷ Un oscillateur amorti est régi par une équation différentielle dont voici la forme canonique :

$$\boxed{\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s_\infty,}$$

avec :

- s une **grandeur considérée de l'oscillateur amorti** (ici tension, intensité ou charge, on verra plus tard que cela fonctionne aussi pour des oscillateurs mécaniques amortis) ;
- $\frac{ds}{dt}$ la **dérivée temporelle d'ordre 1** de s ;
- $\frac{d^2 s}{dt^2}$ la **dérivée temporelle d'ordre 2** de s ;
- ω_0 la **pulsation propre** qui dépend des paramètres de l'oscillateur étudié ($[\omega_0] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) ;
- Q est le **facteur de qualité**. C'est un nombre sans dimension qui dépend des paramètres de l'oscillateur étudié. Sa valeur renseigne sur le nombre d'oscillations qu'effectue la grandeur s (ou une autre grandeur) de l'oscillateur avant que celle-ci n'atteigne sa valeur asymptotique ;
- s_∞ est la **valeur asymptotique** de s en régime permanent, déterminée en étudiant l'état final de cette grandeur.

On identifie les différents termes devant u_C et ses dérivées temporelles à ω_0 et Q . Ainsi, il vient :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad (\text{pulsation propre, identique au circuit } LC \text{ série}).$$

On a également :

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Leftrightarrow Q = \frac{\omega_0 L}{R} \Leftrightarrow Q = \frac{1}{R} \frac{L}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}} \text{ (facteur de qualité).}$$

Avec ces deux grandeurs identifiées, on peut écrire l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur sous sa forme canonique :

$$\boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0}.$$

I. 3 - Interprétation et comparaison avec l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique

Pour rappel, l'équation différentielle vérifiée par le tension du condensateur dans un circuit LC série (en régime libre) avait pour expression :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0$$

- On retrouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique à condition que le terme $\frac{\omega_0}{Q} \rightarrow 0$. Ceci est possible pour $Q \gg 1$.
- Le terme $\frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt}$ modélise donc le caractère **dissipatif** de l'oscillateur amorti. D'après l'expression de Q , on en déduit que c'est la résistance R qui est responsable de cette dissipation (logique!). On remarque que si $R \rightarrow 0$ alors $Q \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\omega_0}{Q} \rightarrow 0$.
- Le condensateur dissipant peu à peu l'énergie qu'il avait stockée lors de la charge, il est normal que $u_{C,\infty} = 0$.

II. Résolution de l'équation différentielle

Jusqu'à présent, pour résoudre les équations différentielles des circuits linéaires du premier ordre, la fonction exponentielle était une solution qui convenait parfaitement. Nous allons poursuivre dans ce sens en sélectionnant les fonctions $t \mapsto e^{rt}$. Injectons cette solution dans l'équation homogène associée associée à l'équation différentielle mise sous forme canonique (coup de chance, ici l'équation différentielle est identique à son équation homogène associée car elle ne possède pas de second membre).

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (e^{rt}) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d}{dt} (e^{rt}) + \omega_0^2 e^{rt} &= 0 \\ \Leftrightarrow r^2 \cancel{e^{rt}} + \frac{\omega_0}{Q} r \cancel{e^{rt}} + \omega_0^2 \cancel{e^{rt}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \boxed{r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2} &= 0. \end{aligned}$$

On appelle **équation caractéristique** associée à l'équation différentielle de l'oscillateur amorti l'équation

$$P(r) = 0$$

où P est le **polynôme caractéristique** défini par :

$$P(r) = r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2.$$

Nous allons voir dans les sous-parties à venir que la détermination des racines de P (que ce soit dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est primordiale pour expliciter les solutions de l'équation différentielle établie.

 Méthode : Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre type oscillateur amorti

▷ Soit l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s_\infty$$

1. Déterminer la solution générale s_h de l'équation homogène associée (dite sans second membre, donc sans le terme $\omega_0^2 s_\infty$). Pour cela, il faut résoudre l'équation

$$P(r) = 0$$

où P est le polynôme caractéristique défini par $P(r) = r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2$. **Ces solutions sont clairement explicitées dans les sous parties II.1, II.2 et II.3 qui suivent ce point méthode.**

2. Déterminer une solution particulière $s_p(t) = K \in \mathbb{R}$ (donc $\frac{ds_p}{dt} = \frac{d^2 s_p}{dt^2} = 0$). On a dans ce cas :

$$\omega_0^2 s_p(t) = \omega_0^2 s_\infty \Leftrightarrow \omega_0^2 K = \omega_0^2 s_\infty \Leftrightarrow \boxed{s_p(t) = K = s_\infty}.$$

3. La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution homogène et de la solution particulière.
4. Déterminer les constantes d'intégration A et B de la solution de l'équation homogène associée à l'aide de deux conditions initiales $s(t=0)$ et $\frac{ds}{dt}(t=0)$.

Réolvons l'équation $P(r) = 0 \Leftrightarrow r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$. Pour cela, calculons son discriminant :

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right).$$

En fonction du signe de Δ , trois cas s'offrent à nous : $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ et $\Delta = 0$.

II. 1 - Régime apériodique

Dans ce premier cas, $\Delta > 0$. Ceci impose une condition sur Q et donc sur R :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4Q^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4Q^2} > 1 \Leftrightarrow Q^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{Q < \frac{1}{2}} \text{ car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+.$$

Ceci impose donc :

$$\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{R > R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

Ce régime a lieu lorsque la résistance R du circuit RLC série est suffisamment élevée (du moins plus grande qu'une certaine résistance critique). Dans ce cas, l'amortissement sera important et u_C atteindra "rapidement" sa valeur asymptotique, c'est-à-dire $u_{C,\infty} = 0$ ici.

Lorsque $\Delta > 0$, l'équation $P(r) = 0$ admet deux racines réelles que l'on notera r_1 et r_2 . Ainsi :

$$\begin{cases} r_1 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - \sqrt{4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)}}{2} \Leftrightarrow r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \\ r_2 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)}}{2} \Leftrightarrow r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \end{cases}$$

♥ **Propriété n°1 : Solutions de l'équation homogène associée lorsque $\Delta > 0$ (régime apériodique)**

▷ Lorsque le discriminant Δ de l'équation caractéristique $P(r) = 0$ vérifie $\Delta > 0$ alors le polynôme caractéristique P admet deux racines réelles r_1 et r_2 , et les solutions de l'équation homogène associée

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

sont :

$$s_h(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit donc que $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 / u_{C,h}(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ où $r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$ et $r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$.
L'équation différentielle établie précédemment étant sans second membre, on a alors de façon immédiate ($u_{C,p}(t) = 0$) :

$$u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

Pour déterminer A et B , on se sert des conditions initiales.

— On sait que $u_C(0^-) = E$ (condensateur chargé). Or, par continuité de la tension aux bornes du condensateur, il vient :

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) = u_C(0) = E.$$

— Le circuit étant ouvert à $t = 0^-$, il vient $i(0^-) = 0$. Or, par continuité de l'intensité du courant électrique dans une bobine, $i(0^-) = i(0^+) = i(0) = 0$.

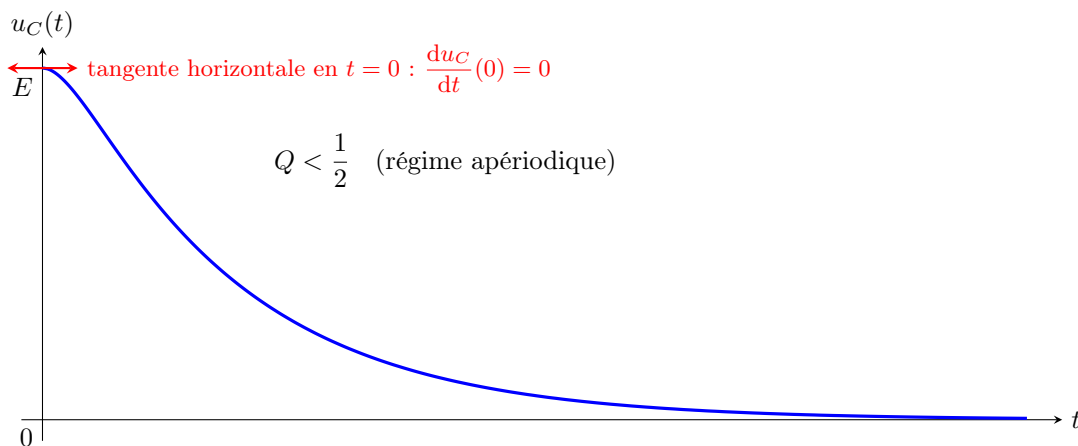
Par ailleurs, $i(0) = C \frac{du_C}{dt}(0) \Leftrightarrow \frac{du_C}{dt}(0) = \frac{i(0)}{C}$. Donc, on conclut que $\frac{du_C}{dt}(0) = 0$.

Évaluons à présent la quantité $\frac{du_C}{dt}(0)$. $\forall t \geq 0$, $\frac{du_C}{dt}(t) = Ar_1 e^{r_1 t} + Br_2 e^{r_2 t}$.

On en déduit que $\frac{du_C}{dt}(0) = Ar_1 + Br_2$. On aboutit ainsi au système suivant :

$$\begin{cases} u_C(0) = E \Leftrightarrow A + B = E, \\ \frac{du_C}{dt}(0) = 0 \Leftrightarrow Ar_1 + Br_2 = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système permet d'exprimer A et B en fonction de E , r_1 et r_2 et aboutit donc sur la forme finale de u_C , ce que nous n'allons pas faire ici (peu d'intérêt, le plus gros du travail a déjà été fait). On obtient alors comme représentation graphique de $u_C = f(t)$:



⚠ **Attention !**

▷ Il faut bien faire attention à la tangente horizontale à la courbe lorsque $t \rightarrow 0$ (contrairement aux circuits linéaires du premier ordre).

II. 2 - Régime critique

Dans ce deuxième cas, $\Delta = 0$. Ceci impose forcément $Q = \frac{1}{2}$ et $R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

L'équation $P(r) = 0$ admet une unique racine : $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \Leftrightarrow r = -\omega_0$.

♥ **Propriété n°2 : Solutions de l'équation homogène associée lorsque $\Delta = 0$ (régime critique)**

▷ Lorsque le discriminant Δ de l'équation caractéristique $P(r) = 0$ vérifie $\Delta = 0$ alors le polynôme caractéristique P admet une unique racine réelle $r = -\omega_0$, et les solutions de l'équation homogène associée

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

sont :

$$s_h(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t} \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit donc que : $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 / u_C(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$.

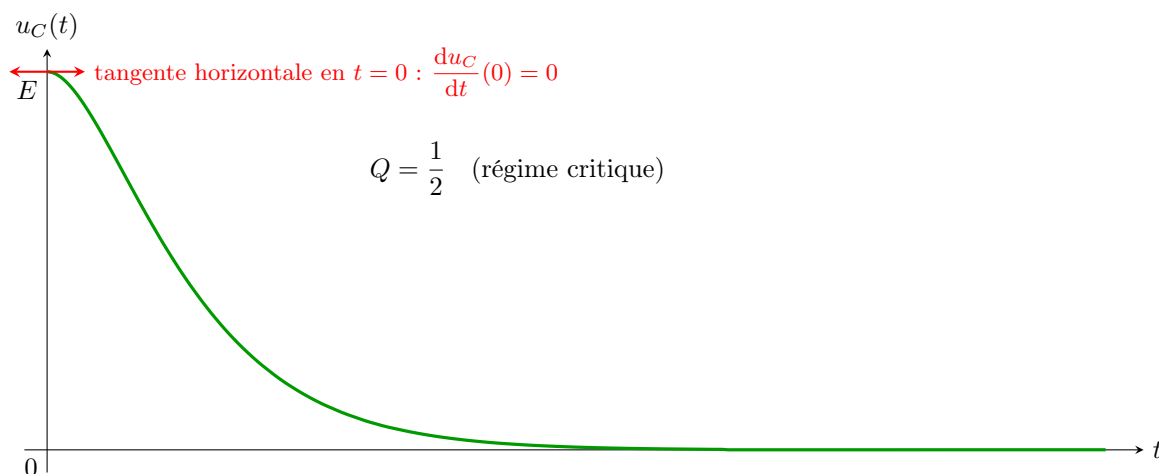
Pour déterminer A et B , on se sert des conditions initiales. Tout d'abord, évaluons la quantité $\frac{du_C}{dt}(0)$.

$$\forall t \geq 0, \frac{du_C}{dt}(t) = \frac{d}{dt} (Ate^{-\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}) = Ae^{-\omega_0 t} - A\omega_0 te^{-\omega_0 t} - B\omega_0 e^{-\omega_0 t}.$$

On en déduit que $\frac{du_C}{dt}(0) = A - B\omega_0$. On aboutit ainsi au système suivant :

$$\begin{cases} u_C(0) = E \Leftrightarrow B = E, \\ \frac{du_C}{dt}(0) = 0 \Leftrightarrow A - B\omega_0 = 0 \Leftrightarrow A = \omega_0 E. \end{cases}$$

Finalement, $u_C(t) = (\omega_0 Et + E)e^{-\omega_0 t} \Leftrightarrow u_C(t) = E(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$.



Remarque

Pas d'oscillation : la tension rejoint directement sa valeur finale. Le régime critique correspond au retour le plus rapide vers le régime permanent.

II. 3 - Régime pseudo-périodique

Dans ce troisième et dernier cas, $\Delta < 0$. Ceci impose forcément $Q > \frac{1}{2}$ et $R < R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Ce régime a lieu lorsque la résistance R du circuit RLC série est suffisamment faible (du moins plus faible qu'une certaine résistance critique). Dans ce cas, l'amortissement sera faible et u_C atteindra "lentement" sa valeur asymptotique, c'est-à-dire $u_{C,\infty} = 0$ ici.

Lorsque $\Delta < 0$, l'équation $P(r) = 0$ admet deux racines complexes conjuguées que l'on notera r_- et r_+ .

**Remarque**

▷ Pour rappel, lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet un discriminant $\Delta < 0$, alors les racines x_- et x_+ de cette équation sont des racines complexes conjuguées et il vient :

$$\begin{cases} x_- = \frac{-b - j\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ x_+ = \frac{-b + j\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases}$$

où $j \in \mathbb{C} / j^2 = -1$.

Ainsi, il vient :

$$\begin{cases} r_- = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - j\sqrt{4\omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)}}{2} \Leftrightarrow r_- = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \\ r_+ = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + j\sqrt{4\omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)}}{2} \Leftrightarrow r_+ = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \end{cases}$$

On pose deux nouvelles grandeurs essentielles pour l'étude du régime pseudo-périodique :

- Un **temps caractéristique** τ tel que $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$; ♥
- Une **pseudo-pulsation** Ω telle que $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$; ♥
- Une **pseudo-période** T associée à la pseudo-pulsation telle que : $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. ♥

On peut alors condenser le système précédent de la façon suivante : $r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$.

**Propriété n°3 : Solutions de l'équation homogène associée lorsque $\Delta < 0$ (régime pseudo-périodique)**

▷ Lorsque le discriminant Δ de l'équation caractéristique $P(r) = 0$ vérifie $\Delta < 0$ alors le polynôme caractéristique P admet deux racines complexes conjuguées $r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$, et les solutions de l'équation homogène associée

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

sont :

$$s_h(t) = e^{-t/\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

On peut également écrire cette solution sous la forme :

$$s_h(t) = D \cos(\Omega t + \varphi) e^{-t/\tau} \text{ où } (D, \varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

Cette forme est utile pour comprendre le graphe $u_C = f(t)$ très rapidement.

On en déduit donc que : $\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2 / u_C(t) = e^{-t/\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$.

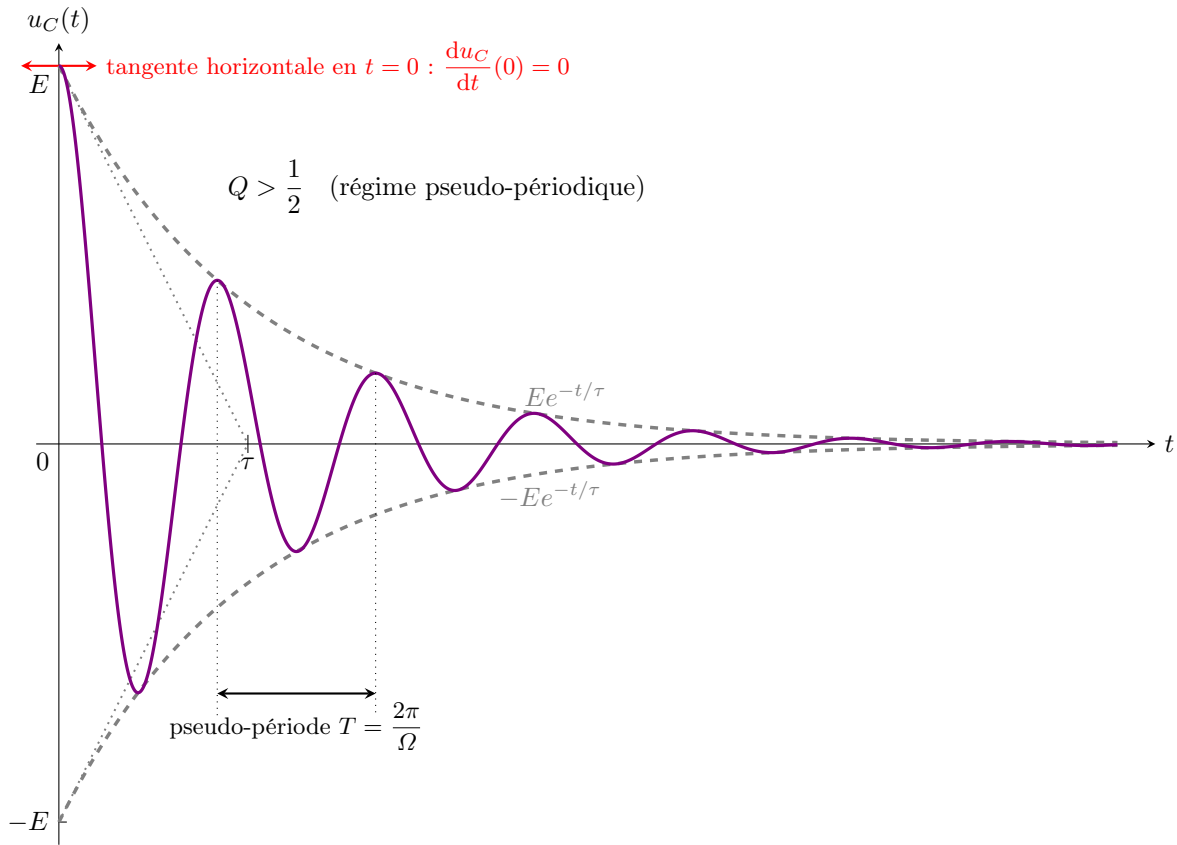
Pour déterminer A et B , on se sert des conditions initiales. Tout d'abord, évaluons la quantité $\frac{du_C}{dt}(0)$.

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad \frac{du_C}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \left(e^{-t/\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) \right), \\ \Leftrightarrow \forall t \geq 0, \quad \frac{du_C}{dt}(t) &= -\frac{A}{\tau} e^{-t/\tau} \cos(\Omega t) - A\Omega e^{-t/\tau} \sin(\Omega t) - \frac{B}{\tau} e^{-t/\tau} \sin(\Omega t) + B\Omega e^{-t/\tau} \cos(\Omega t), \\ \Leftrightarrow \forall t \geq 0, \quad \frac{du_C}{dt}(t) &= e^{-t/\tau} \left[\left(-\frac{A}{\tau} + B\Omega \right) \cos(\Omega t) + \left(-A\Omega - \frac{B}{\tau} \right) \sin(\Omega t) \right]. \end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{du_C}{dt}(0) = -\frac{A}{\tau} + B\Omega$. On aboutit ainsi au système suivant :

$$\begin{cases} u_C(0) = E \Leftrightarrow A = E, \\ \frac{du_C}{dt}(0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{A}{\tau} + B\Omega = 0 \Leftrightarrow B = \frac{E}{\Omega\tau}. \end{cases}$$

Finalement, $u_C(t) = e^{-t/\tau} \left(E \cos(\Omega t) + \frac{E}{\Omega\tau} \sin(\Omega t) \right) \Leftrightarrow u_C(t) = E e^{-t/\tau} \left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau} \sin(\Omega t) \right).$



Remarque

► On observe un amortissement progressif, borné par des enveloppes exponentielles $t \mapsto \pm E e^{-t/\tau}$. Q renseigne sur le nombre approximatif d'oscillations, ici $Q \simeq 5$.

II. 4 - Décrément logarithmique

Nous allons maintenant évoquer une notion très classique dans les TP et les sujets de concours : le **décrément logarithmique**. Le décrément logarithmique, généralement noté δ , est la mesure logarithmique de la décroissance périodique d'une grandeur pseudo-oscillatoire. Il est défini comme le logarithme du rapport d'une grandeur à une date t sur la même grandeur à la date $t + T$, T représentant la pseudo-période de la grandeur. Le décrément logarithmique est donc une grandeur sans dimension.

$$\delta = \ln \left(\frac{u_C(t)}{u_C(t+T)} \right)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \delta &= \ln \left(\frac{\cancel{E} e^{-t/\tau} \left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau} \sin(\Omega t) \right)}{\cancel{E} e^{-(t+T)/\tau} \left(\cos(\Omega(t+T)) + \frac{1}{\Omega\tau} \sin(\Omega(t+T)) \right)} \right) \\ \Leftrightarrow \delta &= \ln \left(\frac{\cancel{e^{-t/\tau}} \left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau} \sin(\Omega t) \right)}{\cancel{e^{-t/\tau}} e^{-T/\tau} \left(\cos(\Omega t + \Omega T) + \frac{1}{\Omega\tau} \sin(\Omega t + \Omega T) \right)} \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\Omega T = 2\pi$ par définition de la pseudo-période. Comme les fonctions cos et sin sont 2π -périodiques, alors $\cos(\Omega t + \Omega T) = \cos(\Omega t)$ et $\sin(\Omega t + \Omega T) = \sin(\Omega t)$. Ceci simplifie considérablement les calculs et il vient :

$$\begin{aligned} \delta &= \ln \left(\frac{\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau} \sin(\Omega t) \right)}{e^{-T/\tau} \left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau} \sin(\Omega t) \right)} \right) \\ \Leftrightarrow \delta &= \ln \left(\frac{1}{e^{-T/\tau}} \right) \\ \Leftrightarrow \delta &= \frac{T}{\tau} \\ \Leftrightarrow \delta &= \frac{\omega_0 T}{2Q}. \end{aligned}$$

On peut encore simplifier cette expression. En effet, comme $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$, alors $\omega_0 T = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$.

Finalement,

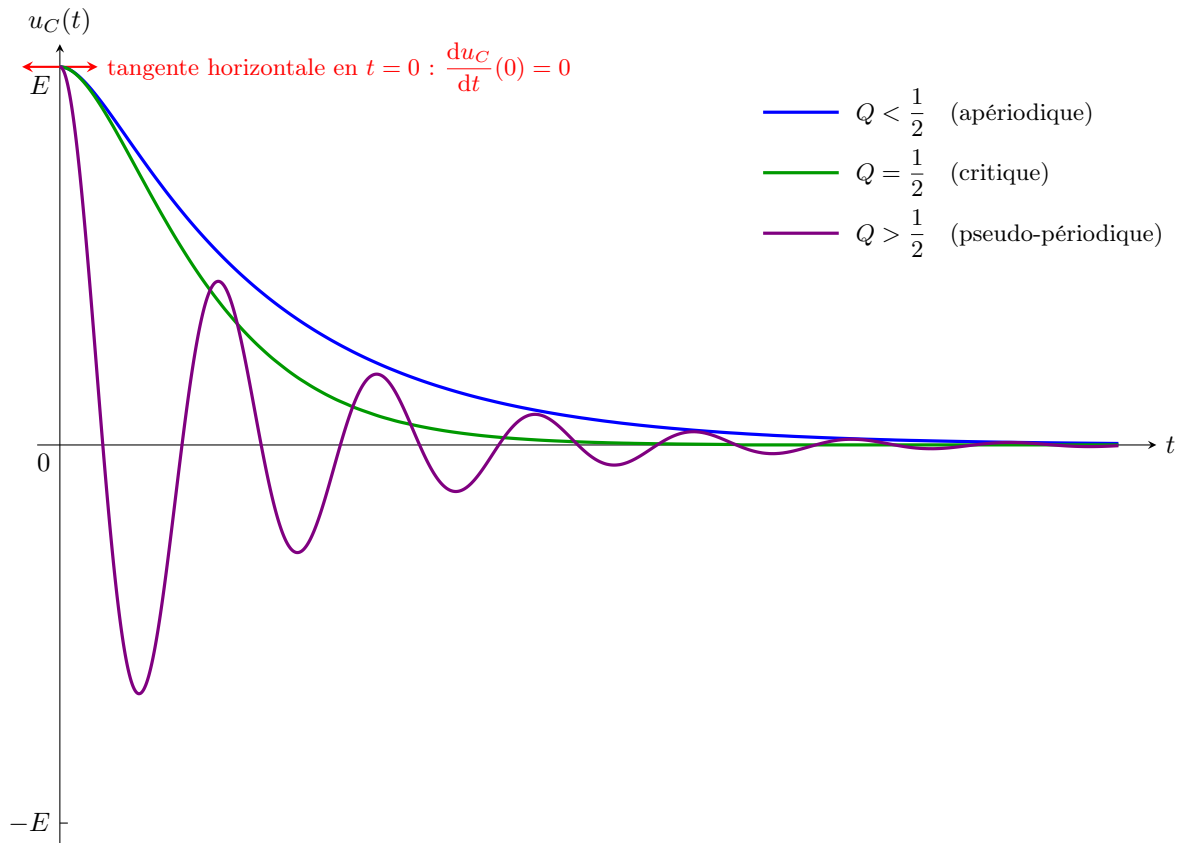
$$\delta = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}} \simeq \frac{\pi}{Q} \text{ si } Q \gg 1.$$



Remarque

▷ En mesurant expérimentalement δ à l'oscilloscope, on peut remonter à Q de façon très précise. Pour cela, il faut placer le curseur vertical de l'oscilloscope sur un premier maxima d'amplitude, puis sur celui d'après et relever les valeurs d'amplitude en V.

II. 5 - Récapitulatif des tracés des différents régimes sur un même graphe

**Remarque**

▷ En régime apériodique, la solution s'écrit

$$u_C(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}, \quad r_1 = -\frac{1}{\tau_1}, \quad r_2 = -\frac{1}{\tau_2},$$

avec deux racines réelles négatives que l'on peut ordonner par $|r_1| > |r_2|$, c'est-à-dire $\tau_1 < \tau_2$. Les deux termes ne jouent pas le même rôle selon l'échelle de temps :

- **aux temps courts** ($t \lesssim \tau_1$), les deux exponentielles contribuent ; le terme rapide $e^{r_1 t}$ décroît vite et façonne le début de la courbe (notamment la tangente horizontale imposée par les conditions initiales) ;
- **aux temps longs** ($t \gtrsim \tau_1$), le terme rapide s'est éteint : il ne reste que le terme lent $e^{r_2 t}$. C'est donc la *plus grande* constante de temps τ_2 qui gouverne le retour à l'équilibre.

Plus l'amortissement augmente (au-delà du régime critique), plus les racines se séparent : τ_2 grandit et le retour à l'équilibre *ralentit*. C'est ce qui explique que le régime critique, à racine double $r = -\omega_0$ (donc $\tau = 1/\omega_0$ unique et minimale), rejoint l'asymptote plus vite que tout régime apériodique.

**Application n°1 : Circuit RLC série soumis à un échelon de tension**

▷ On alimente un circuit *RLC* série qui était ouvert (condensateur déchargé) à l'instant $t = 0^-$ en fermant l'interrupteur à l'instant $t = 0$: le circuit est désormais alimenté à l'aide d'un GBF délivrant une tension continue $E = 10$ V.

- Q 1.** Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur pour $t > 0$, et la mettre sous forme canonique.
- Q 2.** Déterminer complètement l'expression temporelle de $u_C(t)$. *Données* : $R = 50 \, \Omega$, $L = 10$ mH, $C = 25$ μ F.
- Q 3.** Tracer le graphe $u_C = f(t)$.

III. Considérations énergétiques

Procédons de la manière habituelle : écrivons la loi des mailles (LDM) multipliée par l'intensité i du courant électrique dans le circuit :

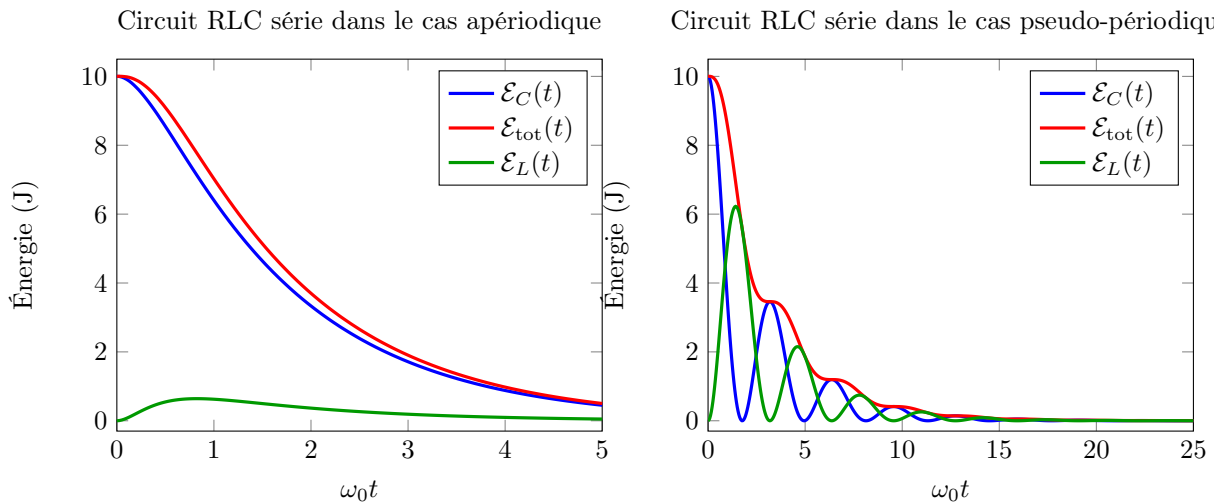
$$u_R \cdot i + u_C \cdot i + u_C \cdot i = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) + R i^2 = 0$$

Dans le cas du régime libre, pour lequel le système évolue librement, le système n'est plus alimenté par un générateur de tension continue ($E = 0$). On peut alors réécrire le bilan de puissance de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) = -R i^2 < 0.$$

On comprend bien que la résistance dissipe l'énergie initialement stockée par le condensateur par effet JOULE. Un script Python a permis de tracer l'évolution de l'énergie stockée dans le circuit RLC série en régime libre dans le cas d'un condensateur chargé d'une énergie de 10 J avec $\omega_0 = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pour le graphique de gauche dans le cas apériodique $Q = 0,3$ et pour le graphique de droite dans le cas pseudo-périodique $Q = 3$.



L'état final est décrit par une énergie totale nulle. En effet $u_c(t \rightarrow +\infty) = 0$ (condensateur totalement déchargé) et $i(t \rightarrow +\infty) = 0$ (condensateur équivalent à un interrupteur ouvert en régime permanent).



Application n°2 : Bilan énergétique d'un circuit RLC série soumis à un échelon de tension

▷ On considère le circuit RLC de l'application 1.

Question : Effectuer le bilan énergétique complet.