

TD E4 : Circuits linéaires du second ordre (partie 2)

Oscillateurs électriques amortis

EX 1 – Réponses indicielles d'un condensateur dans un circuit RLC série

▷ On considère un condensateur dans un circuit RLC série soumis à un échelon de tension d'un GBF de force électromotrice (f.é.m) E à partir de $t = 0$ (i.e on allume le GBF à $t = 0$). On appelle réponse indicielle d'un dipôle la réponse en tension de ce dipôle lorsqu'il est soumis à une tension nulle puis constante de la part d'un GBF.

Q 1. Représenter la tension $e(t)$ du générateur pour $t < 0$ et $t \geq 0$ sur un même graphique.

Q 2. Indiquer parmi les graphes ci-contre celui correspondant à un circuit RLC série où $R_1 = 250 \Omega$. Faire de même pour un circuit RLC série où $R_2 = 5,0 \text{ k}\Omega$.

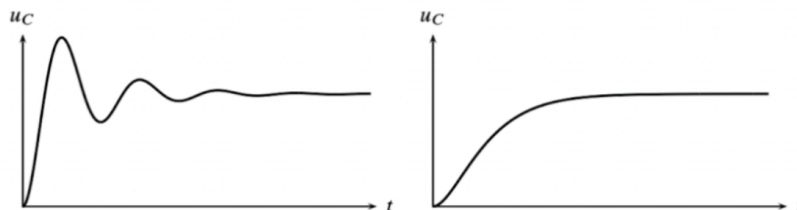


FIGURE 1 – Réponses indicielles de la tension u_C aux bornes d'un condensateur d'un circuit RLC série

EX 2 – Influence d'un condensateur sur un circuit RL

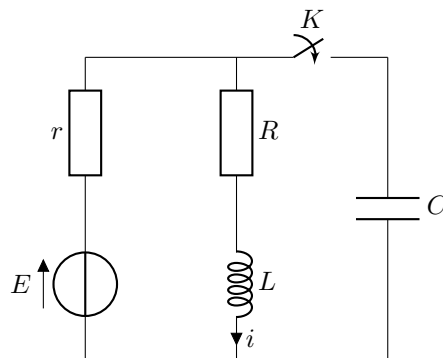
▷ Un générateur de tension continue de f.é.m E et de résistance interne r est branché aux bornes d'une bobine d'inductance L et de résistance R . Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert et on suppose que le circuit est en régime permanent jusqu'à ce que l'on ferme l'interrupteur à $t = 0$. La fermeture de K branche en parallèle sur la bobine un condensateur de capacité C .

Q 1. Déterminer $i(0^+)$ et $\frac{di}{dt}(0^+)$.

Q 2. Établir l'équation différentielle vérifiée par i , qu'il faudra mettre sous forme canonique.

Q 3. Déterminer un encadrement de C pour obtenir un régime pseudo-périodique.

Données : $L = 43 \text{ mH}$, $R = 9,1 \Omega$, $r = 50 \Omega$ et $E = 5,0 \text{ V}$.

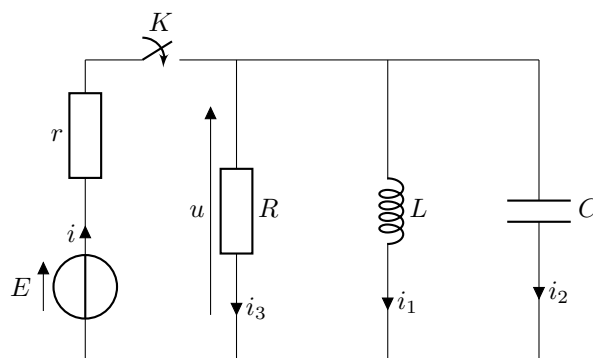


EX 3 – Étude du régime transitoire d'un circuit RLC parallèle

▷ Un générateur de tension continue de f.é.m E et de résistance interne r est branché en série avec un interrupteur K , ouvert depuis longtemps : le circuit est en régime permanent jusqu'à ce que l'on ferme K à $t = 0$. L'association générateur réel/interrupteur K est branchée en parallèle d'une résistance R , d'une inductance L et d'une capacité C . Le condensateur C est initialement déchargé et tous les courants sont nuls. On note i l'intensité du courant électrique dans r , i_1 dans L , i_2 dans C et i_3 dans R ainsi que u la tension aux bornes de R , L et C .

Q 1. Déterminer $u(0^+)$, $i(0^+)$, $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$ et $i_3(0^+)$ juste après la fermeture de l'interrupteur K .

Q 2. En déduire $\frac{di_3}{dt}(0^+)$.



- Q 3.** Déterminer $u(\infty)$, $i(\infty)$, $i_1(\infty)$, $i_2(\infty)$ et $i_3(\infty)$ lorsque le régime permanent est atteint dans le circuit.
- Q 4.** Montrer que l'équation différentielle vérifiée par i_3 se met sous la forme :

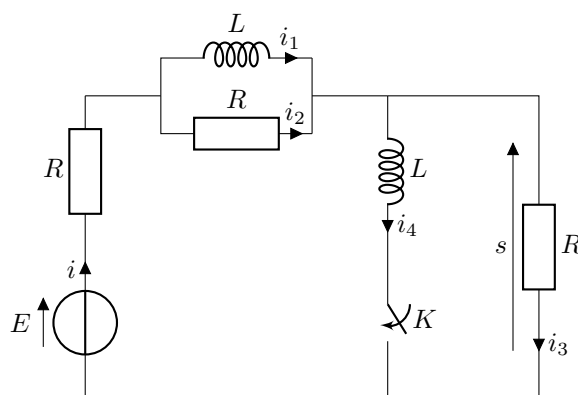
$$\frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di_3}{dt} + \omega_0^2 i_3 = 0$$

où il faudra exprimer ω_0 et Q en fonction de r , R , L et C .

- Q 5.** Établir la condition que doivent vérifier r , R , L et C pour observer un régime pseudo-périodique. Dans ce cas, donner l'expression de la pseudo-pulsation Ω en fonction de ω_0 , r , R , L et C .
- Q 6.** En supposant la condition de la question précédente vérifiée, déterminer l'expression de $i_3(t)$.

EX 4 – Étude d'un circuit à deux bobines

▷ On considère le circuit représenté ci-dessous. Le générateur a une f.é.m constante E . L'interrupteur K est ouvert depuis très longtemps et on le ferme à l'instant $t = 0$.

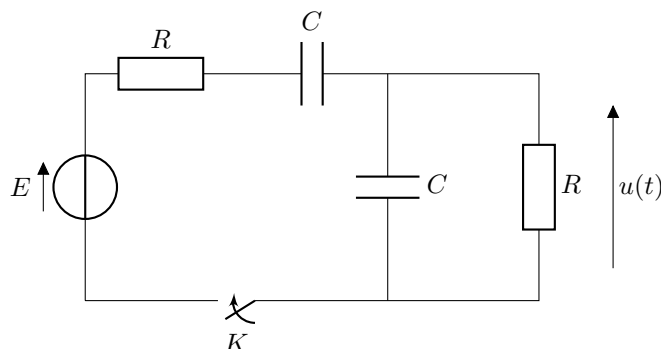


- Q 1.** Déterminer $i(0^-)$, $i_1(0^-)$, $i_2(0^-)$, $i_3(0^-)$ et $i_4(0^-)$. Faire de même pour $i(0^+)$, $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$, $i_3(0^+)$ et $i_4(0^+)$.
- Q 2.** Déterminer $s(\infty)$, $i(\infty)$, $i_1(\infty)$, $i_2(\infty)$, $i_3(\infty)$ et $i_4(\infty)$ lorsque le régime permanent est atteint.
- Q 3.** Relier $s(t)$ à $i_3(t)$ puis à $i_4(t)$. En déduire $i_3(t)$ et $\frac{di}{dt}(t)$ en fonction de R , L , $s(t)$ et $\frac{ds}{dt}(t)$.
- Q 4.** Relier $i_1(t)$ et $i_2(t)$. En déduire $\frac{di}{dt}$ en fonction de R , L , i_2 et $\frac{di_2}{dt}$.
- Q 5.** Montrer que $\frac{di}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt} = 0$. En déduire que $i_2 = \frac{3L}{R^2} \frac{ds}{dt} + \frac{2s}{R}$.
- Q 6.** Déterminer l'équation différentielle vérifiée par s .
- Q 7.** La résoudre et déterminer l'expression de $s(t)$.

EX 5 – Pont de Wien

▷ On considère le circuit représenté ci-contre, appelé pont de WIEN. Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert et les deux condensateurs, de même capacité C , sont déchargés. On ferme l'interrupteur K à $t = 0$. Les deux résistances sont identiques et on pose $\tau = RC$.

- Q 1.** Trouver les conditions initiales $u(0^+)$ et $\frac{du}{dt}(0^+)$.
- Q 2.** Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u .
- Q 3.** En déduire l'expression de $u(t)$. Représenter graphiquement son allure.
- Q 4.** Déterminer le temps t_M tel que la tension u soit maximale.



EX 6 – Analogie du circuit RLC série : oscillateur mécanique amorti de type masse/ressort avec frottement fluide

▷ Pour modéliser l'amortissement d'un oscillateur mécanique, on place un **amortisseur** (piston se déplaçant dans un cylindre rempli d'huile) en parallèle du ressort. Ce piston exerce sur la masse une force de frottement fluide d'expression :

$$\vec{f}(t) = -\lambda \vec{v}(t)$$

avec :

- $\lambda > 0$ le coefficient de frottement fluide (en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$), qui dépend notamment de la viscosité de l'huile et de la géométrie du piston ;
- $\vec{v}(t)$ le vecteur vitesse de la masse à l'instant t .

Cette force est toujours **opposée au mouvement** : elle freine la masse, qu'elle monte ou qu'elle descende.

▷ On considère une masse m suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , placé en parallèle d'un amortisseur de coefficient de frottement fluide λ . À l'instant initial $t = 0$, un expérimentateur lâche la masse m à une position $z(0) = z_0 > \ell_0$ avec un vecteur vitesse $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_z$. On néglige la poussée d'ARCHIMÈDE et les frottements de l'air.

Q 1. Dresser le bilan des forces s'appliquant sur la {masse m }. Les représenter sur un schéma.

Q 2. Appliquer la deuxième loi de NEWTON au système {masse m } et en déduire une équation vectorielle reliant le vecteur accélération $\vec{a}$ de la masse m et les forces qui s'y appliquent.

Q 3. Projeter cette équation vectorielle selon le vecteur unitaire $\vec{u}_z$ et en déduire l'équation différentielle suivante vérifiée par la position z de la masse :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = g + \omega_0^2 \ell_0$$

où ω_0 et Q sont deux grandeurs à exprimer en fonction de k , m et λ .

Indication : Pour rappel, la vitesse est la dérivée temporelle première de la position et l'accélération la dérivée temporelle seconde.

Q 4. Donner le nom et l'unité de ω_0 et de Q . Comment évolue Q lorsque le frottement augmente ?

Q 5. Déterminer la position d'équilibre z_{eq} de la masse m en fonction de ℓ_0 , m , g et k . Dépend-elle de λ ? Justifier physiquement.

Indication : À l'équilibre, la masse est immobile, que peut-on en déduire sur sa vitesse et son accélération ?

Q 6. On pose $\tilde{z} = z - z_{\text{eq}}$. Montrer que $\tilde{z}$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 \tilde{z}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\tilde{z}}{dt} + \omega_0^2 \tilde{z} = 0$$

Q 7. Écrire l'équation caractéristique associée et discuter, selon la valeur de Q , les trois régimes possibles. Donner pour chacun l'allure de $\tilde{z}(t)$ (on ne demande pas de déterminer les constantes d'intégration).

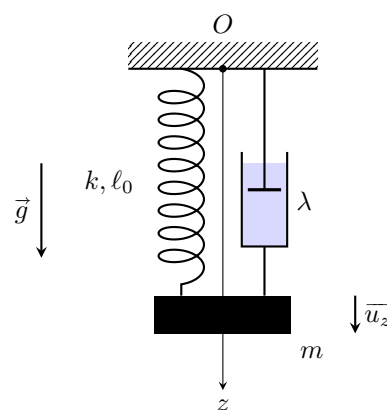
Q 8. On se place dans le cas $Q = 5$. Combien d'oscillations observe-t-on approximativement avant que la masse ne s'immobilise ? Tracer l'allure de $z(t)$ en faisant apparaître z_0 et z_{eq} .

Q 9. On rappelle l'équation différentielle vérifiée par la charge q du condensateur dans un circuit RLC série alimenté par une tension constante E :

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

Par analogie, compléter le tableau suivant :

Électrique	q	$i = \frac{dq}{dt}$	L	R	$\frac{1}{C}$
Mécanique					



- Q 10.** En multipliant l'équation différentielle vérifiée par $\tilde{z}$ par $m \frac{d\tilde{z}}{dt}$, établir un bilan énergétique. Identifier l'énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique et la puissance dissipée par le frottement fluide. Quelle grandeur électrique est l'analogue de cette puissance dissipée ?