Corrigé des applications de cours du chapitre E3

Application n°1 : Déterminer les caractéristiques d'un signal périodique

1. $T = 9$ div avec 1 div = 0,25 ms
   $\Rightarrow$ $T = 2{,}25$ ms.

2. $f = \frac{1}{T}$ donc $f = 4{,}4 \times 10^2$ Hz

3. $\omega_0 = 2\pi f = 2{,}8 \times 10^3$ rad.s^{-1}

4. $2E_0 = 3{,}3$ div $- (-1{,}1$ div$)$
   $= 4{,}4$ div
   Donc $E_0 = 2{,}2$ div avec 1 div = 2V $\Rightarrow$ $E_0 = 4{,}4$ V

5. $\langle e(t) \rangle = 1{,}5$ div $= 3$ V $= E$

6. $e(0) = 2{,}8$ div $= E + E_0 \cos(\varphi_0)$ d'où $\cos(\varphi_0) = \frac{e(0) - E}{E_0}$
   D'où $\varphi_0 = \text{Arccos}\left(\frac{e(0) - E}{E_0}\right)$ avec $e(0) = 5{,}6$ V
   $\Rightarrow \varphi_0 = \text{Arccos}\left(\frac{5{,}6 - 3}{4{,}4}\right)$
   $= 0{,}94$ rad
   $= 54°$.

Application n°2 : D'autres équations différentielles sur ce circuit LC

Q1) On avait d'après la LDM : $E - u_C - u_L = 0$.
D'où $u_L + u_C = E \Leftrightarrow \frac{du_L}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0$.

On $\frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C}$ et $u_L = L\frac{di}{dt}$. On dérive une deuxième fois par rapport au temps : $\frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{d}{dt}\left(\frac{di}{dt}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_L = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2u_L}{dt^2} + \omega_0^2 u_L = 0.$$

Q2) $u_L + u_C = E$

$\Leftrightarrow L\frac{di}{dt} + u_C = E$

$\Leftrightarrow L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{du_C}{dt} = 0$ avec $i = C\frac{du_C}{dt}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C}$

$\Leftrightarrow L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0$

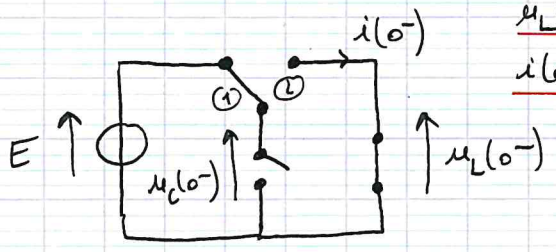
$\Leftrightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Application n° 3 : Etude du circuit LC série en régime libre

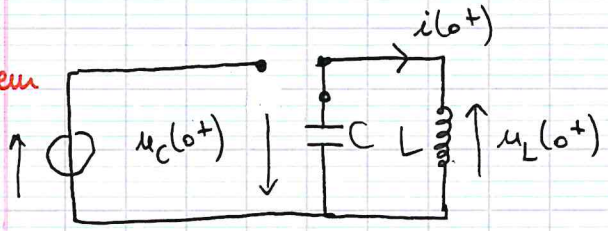
Q1) À $t = 0^-$, un RP est établi : $u_C(0^-) = E$ (LDM)

$u_L(0^-) = 0$ (fil)

$i(0^-) = 0$ (circuit ouvert).



À $t = 0^+$, on a fermé le circuit contenant L et C : brisure du RP



⚠ au condensateur qui doit être en convention récepteur.

L et C étant en //:

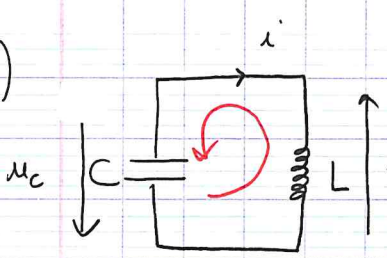
$u_C(0^+) = u_L(0^+)$.

Or $u_C(0^+) = u_C(0^-) = u_C(0) = E$

par continuité de la tension aux bornes du condensateur. De plus, $u_L(0^+) = -E$

Donc $u_L(0^+) = -E$. Enfin $i(0^+) = i(0^-) = i(0) = 0$ par continuité de l'intensité du courant électrique traversant une bobine.

Q2)



LDM : $u_L + u_C = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}\cdots$

$\Leftrightarrow \frac{du_L}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0$ $\Rightarrow$ $i = C\frac{du_C}{dt}$

$\Leftrightarrow \frac{d\cdot u_L}{dt} + \frac{i}{C} = 0$

D'où $\frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_L = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2u_L}{dt^2} + \omega_0^2 u_L = 0$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Q3) On reconnaît directement une ED du 2nd ordre type OH.

D'où : $u_L(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

Or $\begin{cases} u_L(0) = -E = A \Leftrightarrow A = -E \\ \frac{du_L}{dt}(0) = ? \end{cases}$ $u_L = -u_C \Rightarrow \frac{du_L}{dt} = -\frac{du_C}{dt} = -\frac{i}{C}$

D'où $\frac{du_L}{dt}(0) = -\frac{i(0)}{C} = 0$.

Donc $0 = +B\omega_0 \Leftrightarrow B = 0$

Donc $u_L(t) = -E\cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Q4) Or $\forall t \in \mathbb{R}^+$, on a : $u_C + u_L = 0$ donc $u_C(t) = E\cos(\omega_0 t)$.

Q5) LDM $\times i$: $u_L i + u_C i = 0$

$\Leftrightarrow L\frac{di}{dt}i + C\frac{du_C}{dt}u_C = 0$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2\right] = 0$.

Si $f'(x) = 0$ alors $f(x) = \text{cte}$.

Q6) Dans ce cas $\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2 = \text{cte}$

Or $\begin{cases} \frac{1}{2}Li^2 = \mathcal{E}_L \\ \frac{1}{2}Cu_C^2 = \mathcal{E}_C \end{cases}$ donc $\mathcal{E}_L + \mathcal{E}_C = \text{cte}$.

Méthode n°1 : A $t = 0$

$\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_L = cste$ est vrai $\forall t$!

Donc à $t = 0$, $\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_c(0) + \mathcal{E}_L(0)$

$= \frac{1}{2} C u_c^2(0) + \underbrace{\frac{1}{2} L i(0)^2}_{=0}$

$= \frac{1}{2} C E^2$.

Méthode n°2 : Par le calcul à un instant t donné

$i = C \frac{du_c}{dt}$ d'où $i(t) = C \frac{d}{dt}\left(+E\cos(\omega_0 t)\right) = -CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)$

Ainsi $\mathcal{E}_{tot} = \frac{1}{2} L \left(-CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)\right)^2 + \frac{1}{2} C \left(+E\cos(\omega_0 t)\right)^2$

$= \frac{1}{2} L E^2 C^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} CE^2 \cos^2(\omega_0 t)$

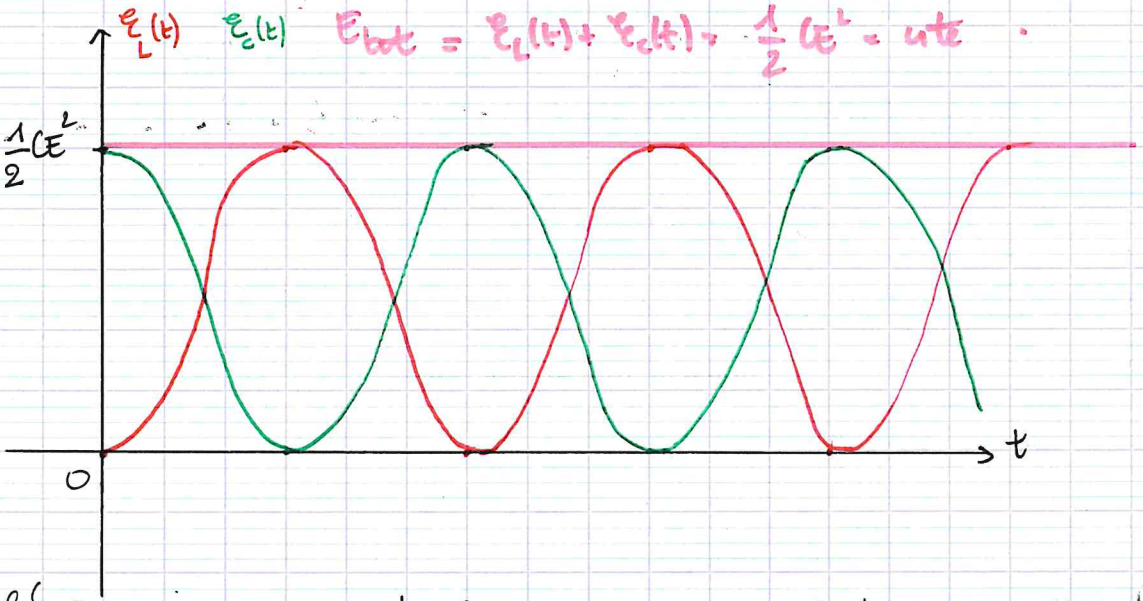
$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ $= \frac{1}{2} CE^2 \left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

$= \frac{1}{2} CE^2$

Q7) $\mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} LC^2 E^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \Rightarrow \mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2} CE^2 \sin^2(\omega_0 t)$

$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} C u_c^2(t) = \frac{1}{2} CE^2 \cos^2(\omega_0 t)$.



L'énergie se conserve ! Logique : pas de résistance qui dissipe l'énergie.