Chapitre E3 : Circuits linéaires du second ordre (partie 1)

Oscillateurs électriques harmoniques

Plan du cours

I. Représentation et caractéristiques d'un signal harmonique 2

II. Circuit LC série : un oscillateur électrique harmonique 4

Introduction

▷ Que ce soient les battements du cœur, une vaguelette à la surface de l'eau, une onde acoustique dans un solide ou encore la vibration d'une molécule diatomique, ces phénomènes ont un point commun : ils mettent en jeu ce que l'on appelle des **oscillations**. Ainsi, nous allons introduire dans ce chapitre un modèle physique transversal très simple qui permet de décrire dans une première approche les oscillations. C'est le modèle de **l'oscillateur harmonique**. Nous allons étudier ce modèle à travers un système oscillant électrique. On étudiera ultérieurement un système oscillant mécanique dans les chapitres dédiés, en mettant en évidence une analogie entre les deux systèmes.

Problématique :
Qu'est ce qu'un oscillateur harmonique ? Quelles sont ses caractéristiques et quels transferts énergétiques sont mis en jeu ?

I. Représentation et caractéristiques d'un signal harmonique

▷ Un signal harmonique est un signal sinusoïdal (donc périodique). Il existe tout un vocabulaire riche et précis autour de cette notion et qui sera à maîtriser finement, car les signaux harmoniques seront au cœur de plein de chapitres, que ce soit en classe de 1ère année ou en deuxième année.

Définition n°1 : Signal périodique

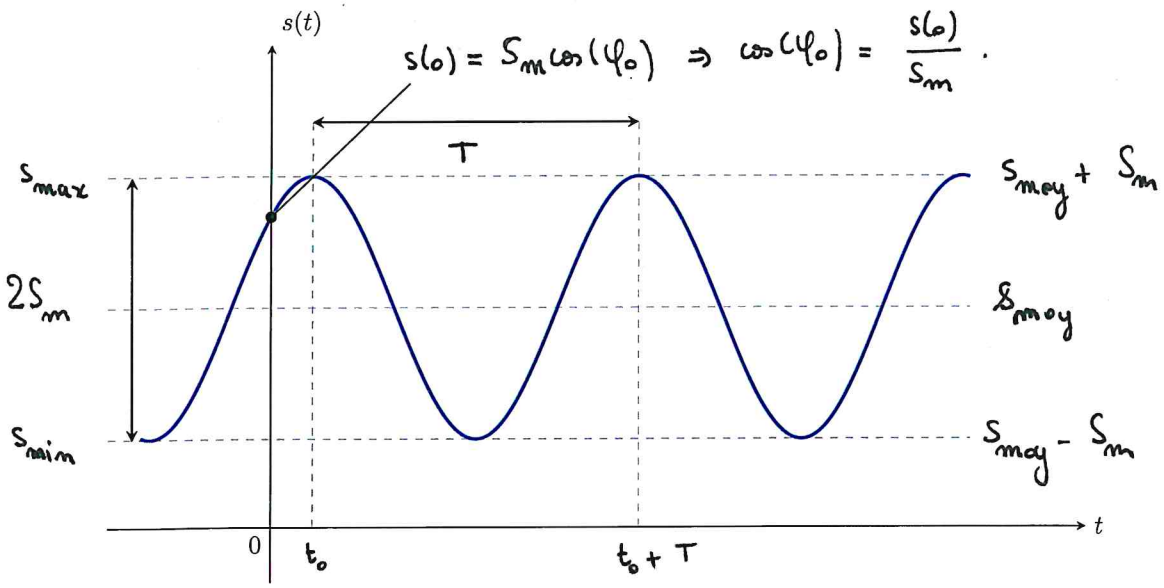
▷ Un signal périodique est une grandeur physique qui se répète à intervalle de temps régulier de manière identique. La période d'un signal est la plus petite durée T non-nulle de répétition d'un motif élémentaire : $s(t+T) = s(t)$. Son inverse, notée f, correspond au nombre de motifs par unité de temps. On appelle cette grandeur la fréquence du signal. Elle s'exprime en HERTZ (Hz), avec 1 Hz = 1 s^{-1} :

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

De façon la plus générale, un signal harmonique peut s'écrire sous la forme :

$$s(t) = S_{moy} + S_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

et a pour représentation graphique ❤ :



Propriété n°1 : Caractéristiques d'un signal harmonique

Ce signal harmonique est caractérisé par les grandeurs suivantes :

— la **valeur moyenne** s_{moy} correspondant à la composante continue du signal, qui s'exprime dans la même unité que $s(t)$. Elle correspond dans la situation expérimentale précédente à la valeur autour de laquelle oscille le signal. Par définition, pour un temps t_0 quelconque, on a :

$$S_{moy} = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\,dt$$

— l'**amplitude** du signal notée S_m. Elle correspond à la variation maximale du signal par rapport à sa valeur moyenne. Elle s'exprime dans la même unité que $s(t)$ et :

$$2S_m = S_{max} - S_{min} \Leftrightarrow S_m = \frac{S_{max} - S_{min}}{2}$$

— la **période propre**, notée T, est la durée d'une oscillation complète : dit autrement, c'est la plus petite durée

au bout de laquelle le motif périodique se répète à l'identique. Elle s'exprime en seconde (s). On a la relation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

— la **fréquence propre**, notée f indique le nombre d'oscillations effectuées pendant une seconde.

— la **pulsation propre** qui est reliée à la fréquence propre par la relation :

$$\omega_0 = 2\pi f$$

— la **phase** notée $\varphi(t)$ qui correspond à l'argument de la fonction périodique. Elle s'exprime en radians (rad) et a pour expression :

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$$

— la **phase à l'origine**, notée φ_0 qui correspond à la valeur que prend l'argument de la fonction périodique à l'origine des temps $\varphi(t=0) = \varphi_0$. Elle appartient à l'intervalle $]\pi, \pi]$.

Nous allons maintenant démontrer l'expression de T en fonction de ω_0, ainsi que celle de $\langle s(t) \rangle$ en fonction de s_{moy}.

Démonstration :

s est T- périodique : $s(t+T) = s(t)$

$\Leftrightarrow S_{moy} + S_m \cos(\omega_0 t + \omega_0 T + \varphi_0) = S_{moy} + S_m \cos(\dots)$

$\Leftrightarrow \cos(\omega_0 t + \omega_0 T + \varphi_0) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid \omega_0 t + \omega_0 T + \varphi_0 = \omega_0 t + \varphi_0 + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid \omega_0 T = 2k\pi$

La période correspond à la première valeur non nulle prenture de k, i.e $k = 1$.

D'où $\omega_0 T = 2\pi \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ■

Montrons que $\langle s(t) \rangle = S_{moy}$ avec $s(t) = S_{moy} + S_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S_{moy}\,dt + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,dt$$

$$= \frac{1}{T} S_{moy} (t_0 + T - t_0) + \frac{S_m}{T} \left[\frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \varphi) \right]_{t_0}^{t_0+T}$$

$$= S_{moy} + \frac{S_m}{T\omega_0} \left(\sin(\omega_0 t_0 + \omega_0 T + \varphi_0) - \sin(\omega_0 t_0 + \varphi_0) \right)$$

Or $\omega_0 T = 2\pi$

D'où $\sin(\omega_0 t_0 + \omega_0 T + \varphi_0) = \sin(\omega_0 t_0 + \varphi_0 + 2\pi)$

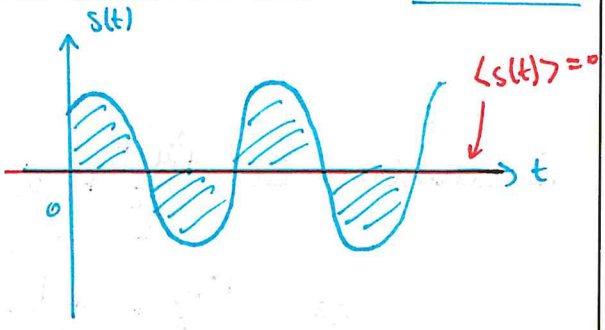
$t \mapsto \sin(t)$ étant 2π - périodique, il vient :

$\sin(\omega_0 t_0 + \varphi_0 + 2\pi) = \sin(\omega_0 t_0 + \varphi_0)$

Donc $\langle s(t) \rangle = S_{moy} + \frac{S_m}{T\omega_0} \times 0 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\langle s(t) \rangle = S_{moy}}$

Si $s(t) = S_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ comme c'est souvent le cas, alors $\langle s(t) \rangle = 0$



Application n°1 : Déterminer les caractéristiques d'un signal périodique

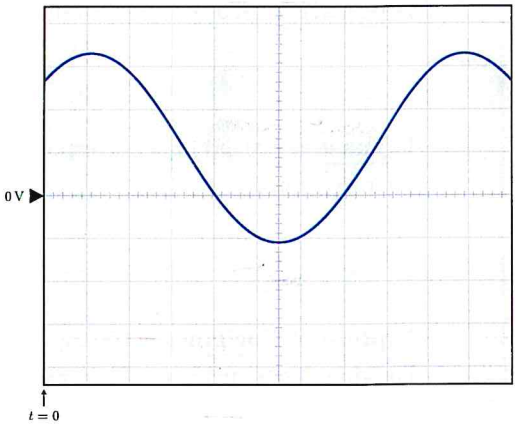
▷ Un générateur basses fréquences (GBF) délivre une tension périodique de la forme

$$e(t) = E + E_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

dont l'oscillogramme est reproduit ci-contre.

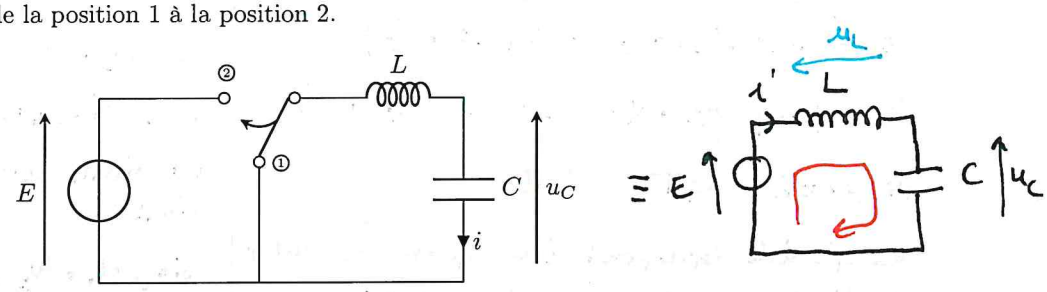
Question : À partir de l'oscillogramme, déterminer les valeurs numériques des grandeurs suivantes :

1. la période T ;
2. la fréquence f ;
3. la pulsation ω_0 ;
4. l'amplitude E_0 ;
5. la valeur moyenne $\langle e(t) \rangle$;
6. la phase à l'origine φ_0.



II. Circuit LC série : un oscillateur électrique harmonique

▷ On considère un circuit LC dans lequel l'interrupteur est en position 1 depuis longtemps. Le condensateur est déchargé. À $t = 0$, on bascule l'interrupteur de la position 1 à la position 2.



1) Établissement de l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur

LDH 2 : $E - u_L - u_C = 0$ Or $u_L = L\dfrac{di}{dt}$ et $i = C\dfrac{du_C}{dt}$

Donc $E - L\dfrac{d}{dt}\left(C\dfrac{du_C}{dt}\right) - u_C = 0$

Remarque

On note $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right)$ la dérivée seconde par rapport au temps de la fonction y.

Finalement : $LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = E$ $\quad \dfrac{d^2}{dt^2} = \dfrac{d}{dt} \times \dfrac{d}{dt}$

$\Leftrightarrow \dfrac{d^2u_C}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}u_C = \dfrac{E}{LC}$ D'où $\left[\dfrac{d^2}{dt^2}\right] = T^{-2}$

On pose $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC} \Leftrightarrow \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ d'où $\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$ forme canonique

Définition n°2 : Équation différentielle linéaire du second ordre d'un oscillateur harmonique

▷ Un oscillateur harmonique est un système dont la grandeur $s(t)$ qui le caractérise vérifie l'équation différentielle linéaire du seconde ordre à coefficients constants :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s_{moy}$$

s_{moy} → valeur moyenne du signal s.

ω_0 : pulsation caractéristique (ω_0 en $rad.s^{-1}$)

On reconnaît donc ici une équation type oscillateur harmonique (OH) vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur.

Application n°2 : D'autres équations différentielles sur ce circuit LC

Q 1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension u_L aux bornes de la bobine.

Q 2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'intensité électrique du courant i.

2) Résolution de l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur

Méthode : Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre type oscillateur harmonique

▷ Soit l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s_{moy}$$

1. Déterminer la solution générale s_h de l'équation homogène (dite sans second membre, donc sans le terme $\omega_0^2 s_{moy}$) :

$$(EH) : \frac{d^2s_h}{dt^2} + \omega_0^2 s_h = 0$$

Solution : $s_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

2. Déterminer une solution particulière $s_p(t) = K \in \mathbb{R}$ (donc $\frac{d^2 s_p}{dt^2} = 0$). On a dans ce cas :

$$\omega_0^2 K = \omega_0^2 s_{moy} \Leftrightarrow s_p(t) = K = s_{moy}$$

3. La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + s_{moy}$$

4. Déterminer les constantes d'intégration A et B à l'aide de deux conditions initiales $s(t=0)$ et $\frac{ds}{dt}(t=0)$.

Remarque

On peut également exprimer la solution de l'équation homogène sous la forme suivante :

$$\exists (D,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \ / \ s_h(t) = D\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

mais la détermination de D et φ est bien plus difficile que celle de A et B dans le cas où on exprime s_h comme dans le point méthode explicité ci-dessus.

(EH) : $\frac{d^2u_{c,h}}{dt^2} + \omega_0^2 u_{c,h} = 0$

Donc $u_{c,h}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

> **Attention !**
> On ne détermine surtout pas A et B à l'aide des conditions initiales portant sur $u_{c,h}$, cela n'aurait AUCUN sens physique et conduirait de façon certaine à un résultat totalement faux.

Solution particulière $u_{c,p}(t) = K$. En remplaçant dans (ED), il vient :

$\omega_0^2 u_{c,p}(t) = \omega_0^2 E \Leftrightarrow u_{c,p}(t) = E$

→ Finalement, $u_c(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + E$

Il faut déterminer A et B à l'aide des conditions initiales (à $t = 0$).

Pour cela, il faut déterminer $u_c(0)$ et $\frac{du_c}{dt}(0)$

- $u_c(0^-) = 0$ donc $u_c(0^+) = u_c(0^-) = u_c(0)$ par continuité (condensateur) ; $(\cos(0) = 1, \sin(0) = 0)$ $\Leftrightarrow A + E = 0 \Leftrightarrow A = -E$
- $i(0) = C\frac{du_c}{dt}(0)$ donc $\frac{du_c}{dt}(0) = \frac{i(0)}{C}$ Or $i(0^-) = 0 = i(0^+) = i(0)$ par continuité (bobine) ; $i(0^-) = 0$: interrupteur ouvert

Or $\frac{du_c}{dt}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$

$((\sin(u))' = u'\cos(u)$ et $(\cos(u))' = -u'\sin(u))$

Donc $\frac{du_c}{dt}(0) = B\omega_0 = 0$ donc $B = 0$

Finalement, $u_c(t) = E - E\cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow u_c(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t))$

où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

3) Détermination de l'expression littérale de la tension u_L aux bornes de la bobine

$u_L(t) = L\frac{di}{dt}(t) = LC\frac{d^2u_c}{dt^2}(t) = LC\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(E - E\cos(\omega_0 t)\right)\right) = +LCE\omega_0\frac{d}{dt}(\sin(\omega_0 t))$

$= LCE\omega_0^2\cos(\omega_0 t)$ donc $u_L(t) = E\cos(\omega_0 t)$

4) Tracé des graphes $u_C = f(t)$ et $u_L = g(t)$

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $-1 \leq \cos(\omega_0 t) \leq 1$

$\Leftrightarrow -E \leq u_L(t) \leq E$

$-1 \leq \cos(\omega_0 t) \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq -\cos(\omega_0 t) \leq 1$

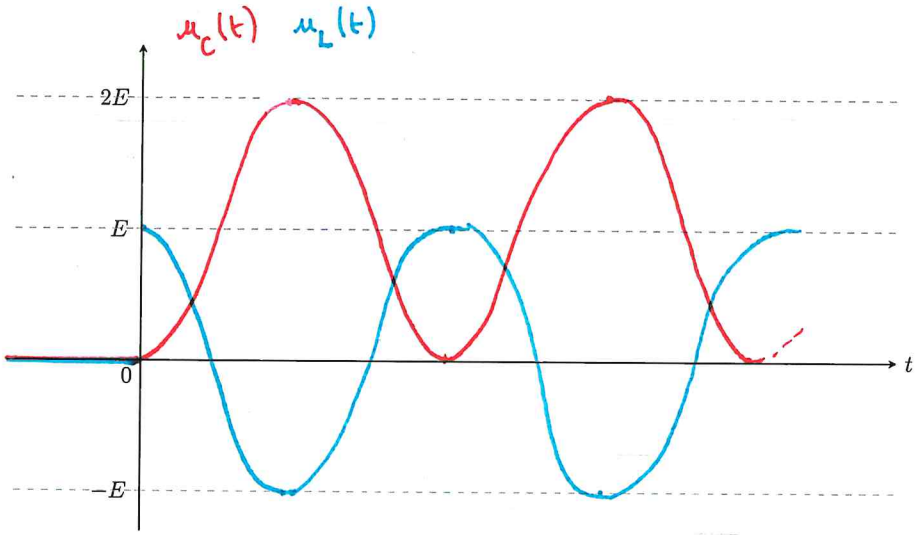
$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \cos(\omega_0 t) \leq 2$

$\Leftrightarrow 0 \leq u_c(t) \leq 2E$

$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$

$u_L(0^-) = 0 \neq u_L(0^+) = E$

fil en Ω



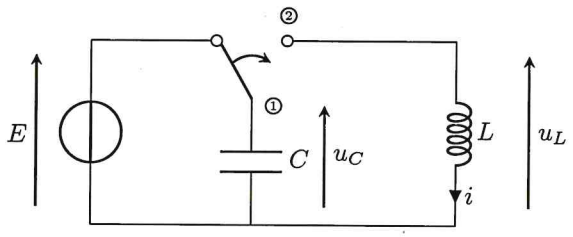
$\forall t \in \mathbb{R}^+$,

$u_C(t) + u_L(t) = E$

▷ L'application qui va suivre est très importante et permet de résumer le cours ainsi que ses attendus. Entraînez-vous à la faire et à bien la comprendre. ♥

Application n°3 : Étude du circuit LC série en régime libre

▷ Un condensateur est chargé sous une tension E par l'intermédiaire d'un GBF lorsque l'interrupteur est placé en position 1. À $t = 0$, on bascule l'interrupteur de la position 1 à la position 2.



Q 1. Déterminer les conditions initiales suivantes : $i(0^-)$, $i(0^+)$, $u_C(0^-)$, $u_C(0^+)$, $u_L(0^-)$ et $u_L(0^+)$.

Q 2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension u_L aux bornes de la bobine.

Q 3. Résoudre cette équation différentielle.

Q 4. En déduire l'expression littérale de $u_C(t)$.

Q 5. En effectuant un bilan de puissance, montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2\right) = 0$$

Q 6. Montrer que l'énergie totale $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ du système se conserve, et montrer de deux manières différentes que

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}CE^2.$$

Q 7. Tracer $\mathcal{E}_{\text{tot}} = f(t)$, $\mathcal{E}_C = g(t)$ (énergie du condensateur) et $\mathcal{E}_L = h(t)$ (énergie de la bobine) sur un même graphe. Commenter.