# Corrigé du TDE3

## EX1 - Analyse d'un signal harmonique

Q1) $u_{c,max} = 2V$ et $u_{c,min} = -2V$ } On note $E_0$ l'amplitude du signal.

$E_0 = \frac{u_{c,max} - u_{c,min}}{2} \Leftrightarrow E_0 = 2V$

$3T = (6,6 - 1,5)s \Leftrightarrow T = \frac{6,6-1,5}{3} s \Leftrightarrow T = 1,7 s$

Donc $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \omega_0 = 3,7 \text{ rad} \cdot s^{-1}$

On mesure $u_c(0) = 1,4 V$.

En posant $u_c(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ on a $u_c(0) = E_0 \cos(\varphi_0)$

D'où $\cos(\varphi_0) = \frac{u_c(0)}{E_0} \Leftrightarrow \varphi_0 = \text{Arccos}\left(\frac{u_c(0)}{E_0}\right)$

D'où $\varphi_0 = \text{Arccos}\left(\frac{1,4}{2}\right) = 0,80 \text{ rad} \Leftrightarrow \varphi_0 = 46°$.

Q2) Pour un circuit LC série, on sait que $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ donc

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow L = \frac{1}{C\omega_0^2}$

AN : $L = 2,7$ MH (énorme !)

---

## EX2 - Circuit LC parallèle

Q1) $E_c = \frac{1}{2} C u_c^2$ et $E_L = \frac{1}{2} L i^2$.

L et C étant en //, on en déduit que $u_c = u_L = L \frac{di}{dt}$.

D'où $E_c = \frac{1}{2} L^2 C \left(\frac{di}{dt}\right)^2$.

Enfin, $\frac{dE_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L^2 C \left(\frac{dc}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} L i^2\right)$.

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{di}{dt}\right)^2\right) = 2\,\frac{d}{dt}\left(\frac{di}{dt}\right)\cdot\frac{di}{dt}$$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{di}{dt}\right) = \frac{d^2i}{dt^2}$

Soit $\boxed{\frac{dE_{tot}}{dt} = L^2C\cdot\frac{d^2i}{dt^2}\cdot\frac{di}{dt} + L\frac{di}{dt}i}$

$$\frac{d}{dt}\left(i^2\right) = 2\,\frac{d}{dt}(i)\cdot i$$

Q2) $E_{tot}$ est constante, car il n'y a pas de résistance qui diffuse l'énergie vers l'extérieur par effet Joule.

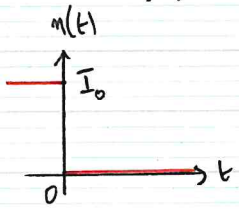
D'où $\frac{dE_{tot}}{dt} = 0 \Leftrightarrow L^2C\frac{d^2i}{dt^2}\cdot\frac{di}{dt} + L\frac{di}{dt}i = 0$

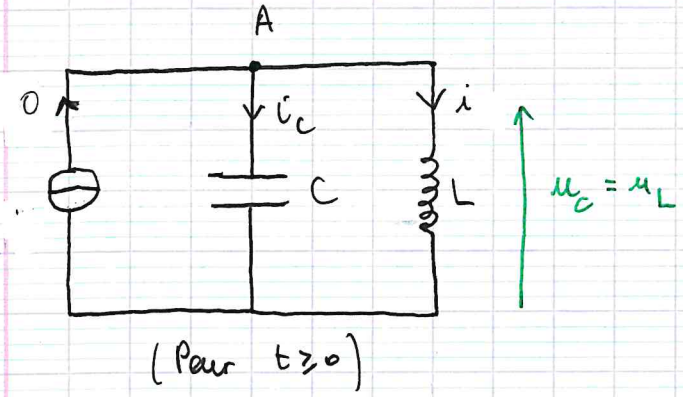
$\frac{di}{dt} \neq 0$ pour $t \geq 0$

$$\Leftrightarrow LC\frac{d^2i}{dt^2} + i = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \omega_e^2 i = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_e = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Q3)




(Pour $t \geq 0$)

LDN en A : $0 = i_C + i$

Or $i_C = C\frac{du_C}{dt} = C\frac{du_L}{dt}$

et $u_L = L\frac{di}{dt}$, donc

$$i_C = LC\frac{d^2i}{dt^2}.$$

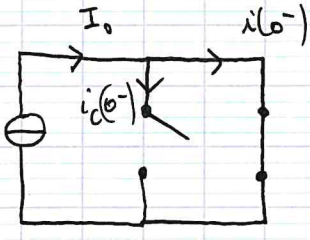
Donc $LC\frac{d^2i}{dt^2} + i = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_e = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

Q4) $i(0) = ?$

A $t = 0^-$, $u(0^-) = I_0$.

D'après la LDN en A : $I_0 = i_C(0^-) + i(0^-)$

Le circuit était alors à ce moment là en régime permanent :




$i_C(0^-) = 0$ (interrupteur ouvert)

D'où $i(0^-) = I_0$.

Par continuité du courant dans la bobine,

$\boxed{i(0^-) = i(0^+) = i(0) = I_0}$

Par ailleurs, $u_L(0) = L \frac{di}{dt}(0) \Leftrightarrow \frac{di}{dt}(0) = \frac{u_L(0)}{L}$.

Or $u_L(0) = u_c(0) = u_c(0^-) = E$

↑ continuité de la tension aux bornes du C.

le condensateur est initialement chargé sous un échelon de tension E.

D'où $\frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L}$

Q5) $i(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

- $i(0) = A$
- $\frac{di}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

$\Rightarrow i(0) = A = I_0$

$\frac{di}{dt}(0) = B\omega_0 = \frac{E}{L} \Leftrightarrow B = \frac{E}{L\omega_0}$

D'où $i(t) = I_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{E}{L\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

---

## EX3 - Analogie du circuit LC série : oscillateur mécanique harmonique de type masse ressort

Q1) Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$

$\vec{F}_{el} = -k(l - l_0)\vec{u}_{bâti \to masse}$

Or $\vec{u}_{bâti \to masse} = \vec{u}_z$ et $l = z$ donc on a : $\vec{F}_{el} = -k(z - l_0)\vec{u}_z$

Q2) D'après la 2ème loi de Newton : $\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{el}$

Or $\vec{a} = a\vec{u}_z$, donc en projetant selon $\vec{u}_z$, il vient :

$$ma = mg - k(z - l_0)$$

$$\Leftrightarrow a = g - \frac{k}{m}(z - l_0)$$

Par ailleurs, $a = \frac{d^2z}{dt^2}$ d'où $\frac{d^2z}{dt^2} = g - \frac{k}{m}(z - l_0)$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m} z = g + \frac{k}{m} l_0 .$$

Posons $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ d'où : $\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = g + \omega_0^2 l_0}$ (ED)

q4) À l'équilibre : $z = z_{eq} = cte$ d'où $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$

Donc : $\omega_0^2 z_{eq} = g + \omega_0^2 l_0$

$$\Leftrightarrow z_{eq} = l_0 + \frac{g}{\omega_0^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}} .$$

q5) $\tilde{z} = z - l_0$. D'où $\frac{d^2\tilde{z}}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}$.

(ED) devient : $\frac{d^2\tilde{z}}{dt^2} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{eq}$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\tilde{z}}{dt^2} + \omega_0^2 (z - z_{eq}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2\tilde{z}}{dt^2} + \omega_0^2 \tilde{z} = 0}$$

) $\tilde{z} = z - z_{eq}$.

q6) Ainsi : $\tilde{z}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

$\tilde{z}(0) = A = z(0) - z_{eq} = z_0 - z_{eq}$.

$\frac{d\tilde{z}}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$ $\rightsquigarrow$ $\frac{dz}{dt}(0) = v_0 = \frac{d\tilde{z}}{dt}(0)$

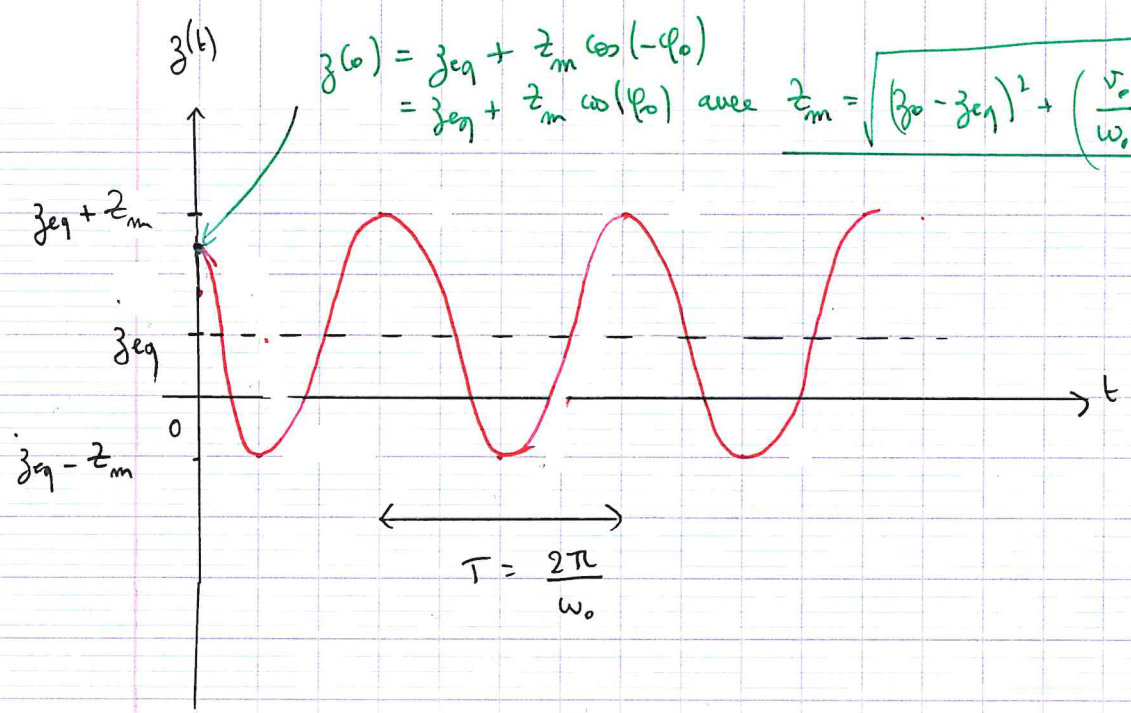
Donc $\frac{d\tilde{z}}{dt}(0) = B\omega_0 = v_0 \Leftrightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$

Donc $\tilde{z}(t) = (z_0 - z_{eq})\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

$$\Leftrightarrow \boxed{z(t) = z_{eq} + (z_0 - z_{eq})\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

TD E3






$z(0) = z_{eq} + z_m \cos(-\varphi_0)$
$= z_{eq} + z_m \cos(\varphi_0)$ avec $\boxed{z_m = \sqrt{(z_0 - z_{eq})^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}}$

NB : La droite $z = z_{eq}$ est l'axe de symétrie.

$\tilde{z}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ avec $\begin{cases} A = z_0 - z_{eq} \\ B = \frac{v_0}{\omega_0} \end{cases}$

$= C\cos(\omega_0 t - \varphi_0)$. avec $C = z_m$ l'amplitude de $\tilde{z}$.

Or $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

D'où $\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \cos(\omega_0 t)\cos(\varphi_0) + \sin(\omega_0 t)\sin(\varphi_0)$

D'où $A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = z_m\cos(\varphi_0)\cos(\omega_0 t) + z_m\sin(\varphi_0)\sin(\omega_0 t)$

Par identification, $\begin{cases} z_m\cos(\varphi_0) = A & (1) \\ z_m\sin(\varphi_0) = B & (2) \end{cases}$

D'où $\tan(\varphi_0) = \frac{B}{A} \Leftrightarrow \boxed{\tan(\varphi_0) = \frac{v_0}{\omega_0(z_0 - z_{eq})}}$

$(1)^2 + (2)^2$ : $A^2 + B^2 = z_m^2 \Leftrightarrow z_m = \sqrt{(z_0 - z_{eq})^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$

Donc $\boxed{z(t) = z_m\cos(\omega_0 t - \varphi_0) + z_{eq}}$