Chapitre E4 : Circuits linéaires du second ordre (partie 2)

Oscillateurs électriques amortis

Plan du cours

I. Circuit RLC série : équation différentielle d'un oscillateur électrique amorti 2
I. 1 - Établissement de l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur 2
I. 2 - Forme canonique de l'équation différentielle 2
I. 3 - Interprétation et comparaison avec l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique 3
II. Résolution de l'équation différentielle 3
II. 1 - Régime apériodique 4
II. 2 - Régime critique 6
II. 3 - Régime pseudo-périodique 7
II. 4 - Décrément logarithmique 9
II. 5 - Récapitulatif des tracés des différents régimes sur un même graphe 10
III. Considérations énergétiques 11

Introduction

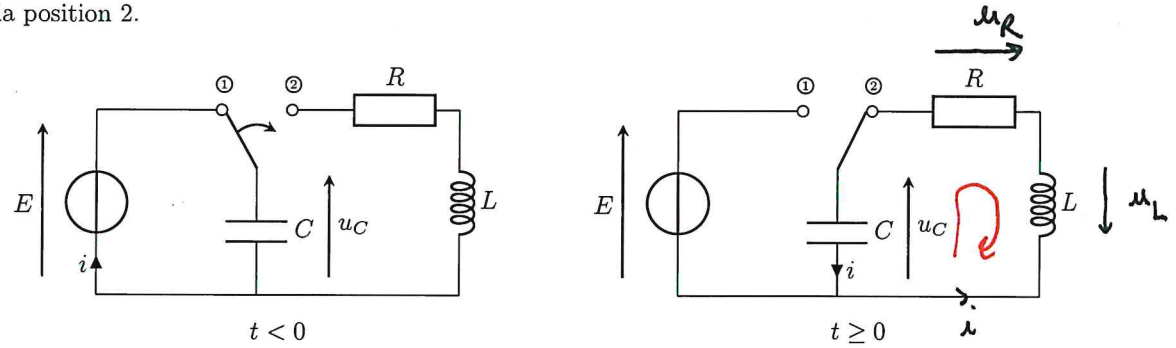
▷ Dans le chapitre E3, nous avons étudié les circuits LC, introduisant ainsi la notion d'oscillateur harmonique. Cependant ce type d'oscillateur harmonique n'est qu'une idéalisation d'un système physique en réalité plus complexe.

Un circuit LC série est en réalité un circuit RLC série. En effet, fils, bobines et condensateurs sont idéalisés. En réalité ils ont tous une résistance interne qui modélisent les aspects résistifs de leurs composants. L'introduction de la dissipation permet ainsi de "raffiner" le modèle précédent et de décrire plus fidèlement bon nombre de systèmes physiques.

Problématique :
Quels points communs et différences peut-on dresser entre le circuit LC et le circuit RLC ? Comment décrire physiquement la notion d'amortissement ?

I. Circuit RLC série : équation différentielle d'un oscillateur électrique amorti

▷ On considère un circuit RLC dans lequel l'interrupteur est en position 1 depuis longtemps. Le condensateur se charge sous une tension constante E et un premier régime permanent s'établit. À l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur de la position 1 à la position 2.



I. 1 - Établissement de l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur

LDM : $u_R + u_L + u_C = 0$

Or $u_R = Ri = RC\frac{du_C}{dt}$

$u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(C\frac{du_C}{dt}\right) = LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$

Donc $RC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0$

I. 2 - Forme canonique de l'équation différentielle

Définition n°1 : Forme canonique de l'équation différentielle d'un oscillateur amorti

▷ Un oscillateur amorti est régi par une équation différentielle dont voici la forme canonique :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s_\infty$$

↳ nouveauté par rapport au chapitre E3 (amortissement)

avec :

— s une **grandeur considérée de l'oscillateur amorti** (ici tension, intensité ou charge, on verra plus tard que cela fonctionne aussi pour des oscillateurs mécaniques amortis) ;

— $\frac{ds}{dt}$ la **dérivée temporelle d'ordre 1** de s ;

— $\frac{d^2s}{dt^2}$ la **dérivée temporelle d'ordre 2** de s ;

— ω_0 la **pulsation propre** qui dépend des paramètres de l'oscillateur étudié ($[\omega_0] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) ;

- Q le facteur de qualité, nombre sans dimension dépendant des paramètres de l'oscillateur étudié. $Q \simeq$ nbr. d'oscillations qu'effectue l'oscillateur avant d'atteindre sa valeur asymptotique (dans un certain régime)
- s_∞ la valeur asymptotique de s en régime permanent (RP)

Ici : $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$

avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation caractéristique

Et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ donc $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{L}{R}\frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L^2}{LC}} \Leftrightarrow Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

facteur de qualité du circuit RLC série

I. 3 - Interprétation et comparaison avec l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique

Pour rappel, l'équation différentielle vérifiée par le tension du condensateur dans un circuit LC série (en régime libre) avait pour expression :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u_C = 0$$

- On retrouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique à condition que le terme $\frac{\omega_0}{Q} \to 0$. Ceci est possible pour $Q \gg 1$.
- Le terme $\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ modélise donc le caractère **dissipatif** de l'oscillateur amorti. D'après l'expression de Q, on en déduit que c'est la résistance R qui est responsable de cette dissipation (logique !). On remarque que si $R \to 0$ alors $Q \to \infty \Rightarrow \frac{\omega_0}{Q} \to 0$.
- Le condensateur dissipant peu à peu l'énergie qu'il avait stockée lors de la charge, il est normal que $u_{C,\infty} = 0$.

II. Résolution de l'équation différentielle

Jusqu'à présent, pour résoudre les équations différentielles des circuits linéaires du premier ordre, la fonction exponentielle était une solution qui convenait parfaitement. Nous allons poursuivre dans ce sens en sélectionnant les fonctions $t \mapsto e^{rt}$. Injectons cette solution dans l'équation homogène associée associée à l'équation différentielle mise sous forme canonique (coup de chance, ici l'équation différentielle est identique à son équation homogène associée car elle ne possède pas de second membre).

Équation homogène : $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$ (*). Admettons que $u_c(t) = U_0 e^{rt}$ est solution :

Alors u_c vérifie (*) : $\frac{d^2}{dt^2}\left(U_0 e^{rt}\right) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d}{dt}\left(U_0 e^{rt}\right) + \omega_0^2 U_0 e^{rt} = 0$

$\Leftrightarrow r^2 e^{rt} + \frac{\omega_0}{Q} r e^{rt} + \omega_0^2 e^{rt} = 0$

$\Leftrightarrow r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

On appelle équation caractéristique associée à l'éq. homogène de l'oscillateur amorti l'équation $P(r) = 0$ où $P(r) = r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2$ (polynôme caractéristique). Il faudra donc déterminer les racines de P pour résoudre l'équation homogène (*).

Méthode : Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre type oscillateur amorti

▷ Soit l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\cdot\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s_\infty .$$

1. Déterminer la solution générale s_h de l'équation homogène associée (dite sans second membre, donc sans le terme $\omega_0^2 s_\infty$). Pour cela, il faut résoudre l'équation :

$$P(r) = 0 \quad \text{où} \quad P(r) = r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2$$

Ces solutions seront amplement détaillées dans les sous parties II.1, II.2 et II.3 du cours.

2. Déterminer une solution particulière $s_p(t) = K \in \mathbb{R}$ (donc $\frac{ds_p}{dt} = \frac{d^2 s_p}{dt^2} = 0$). On a dans ce cas :

$$\omega_0^2 K = \omega_0^2 s_\infty \Leftrightarrow s_p(t) = K = s_\infty .$$

3. La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution homogène et de la solution particulière.

4. Déterminer les constantes d'intégration A et B de la solution de l'équation homogène associée à l'aide de deux conditions initiales $s(t=0)$ et $\frac{ds}{dt}(t=0)$.

Résolvons l'équation $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$. Pour cela calculons le discriminant

$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$

Trois cas s'offrent alors à nous : $\Delta > 0$ (II.1), $\Delta = 0$ (II.2) et $\Delta < 0$ (II.3)

II. 1 - Régime apériodique

Dans ce premier cas, $\Delta > 0$

Alors $4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4Q^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4Q^2} > 1 \Leftrightarrow 4Q^2 < 1$

$\Leftrightarrow Q^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$ Or autrement : $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow R > R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ amortissement "important"

L'équation $P(r) = 0$ admet deux racines réelles :

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{-\frac{\omega_0}{Q} - \sqrt{4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)}}{2} \\ r_2 = \dfrac{-\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \\ r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \end{cases}$$

Propriété n°1 : Solutions de l'équation homogène associée lorsque $\Delta > 0$ (régime apériodique)

▷ Lorsque le discriminant Δ de l'équation caractéristique $P(r) = 0$ vérifie $\Delta > 0$ alors le polynôme caractéristique P admet deux racines réelles r_1 et r_2, et les solutions de l'équation homogène associée : $\frac{d^2 s_h}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{ds_h}{dt} + \omega_0^2 s_h = 0$

Sont : $s_h(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

Ainsi, $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \mid u_{c,h}(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec $r_{1,2} = \frac{-\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$

Or $u_{c,h}(t) = u_c(t)$ $(u_{c,p}(t) = u_{c,\infty} = 0)$

Donc $u_c(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

$u_c'(t) = Ar_1 e^{r_1 t} + Br_2 e^{r_2 t}$

donc $u_c'(0) = Ar_1 + Br_2$

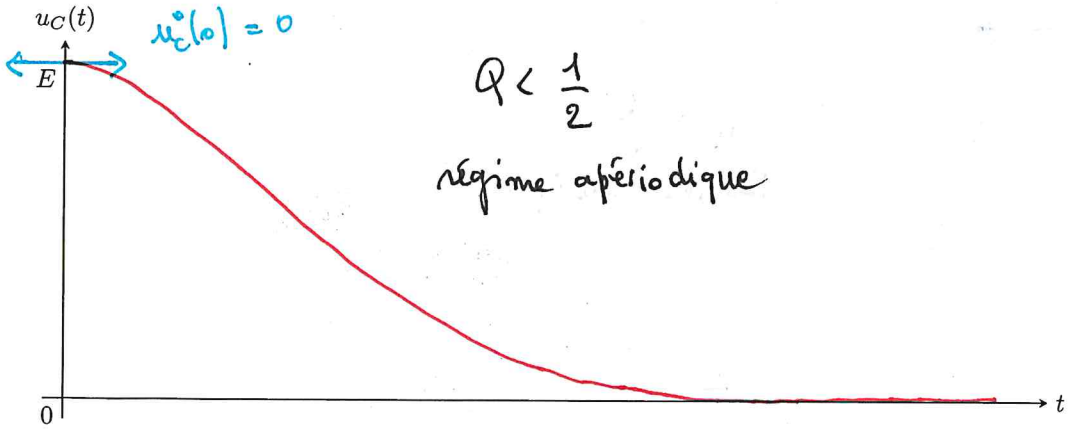
CI : À $t = 0$, $u_c(0) = E \Leftrightarrow A + B = E$

$u_c'(0) = \frac{i_c(0)}{C} = \frac{i(0^-)}{C} = 0 \Leftrightarrow Ar_1 + Br_2 = 0$

par continuité dans la bobine

NB : $u_c'(0) = \frac{du_c}{dt}(0) = 0$ → tangente horizontale à l'origine, ce qui est ≠ d'un système du 1er ordre

La résolution de ce système permet d'exprimer A et B en fonction de E, r_1 et r_2 et aboutit donc sur la forme finale de u_C, ce que nous n'allons pas faire ici (peu d'intérêt, le plus gros du travail a déjà été fait). On obtient alors comme représentation graphique de $u_C = f(t)$:



Attention !

▷ Il faut bien faire attention à la tangente horizontale à la courbe lorsque $t \to 0$ (contrairement aux circuits linéaires du premier ordre).

II. 2 - Régime critique

Dans ce deuxième cas, $\Delta = 0$ donc $Q = \frac{1}{2}$ et $R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

L'équation $P(r) = 0$ admet une unique racine : $r = \frac{-\omega_0}{2Q}$ et $Q = \frac{1}{2}$ donc $r = -\omega_0$

Propriété n°2 : Solutions de l'équation homogène associée lorsque $\Delta = 0$ (régime critique)

▷ Lorsque le discriminant Δ de l'équation caractéristique $P(r) = 0$ vérifie $\Delta = 0$ alors le polynôme caractéristique P admet une unique racine réelle $r = -\omega_0$, et les solutions de l'équation homogène associée $\frac{d^2 s_h}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{ds_h}{dt} + \omega_0^2 s_h = 0$

sont : $s_h(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

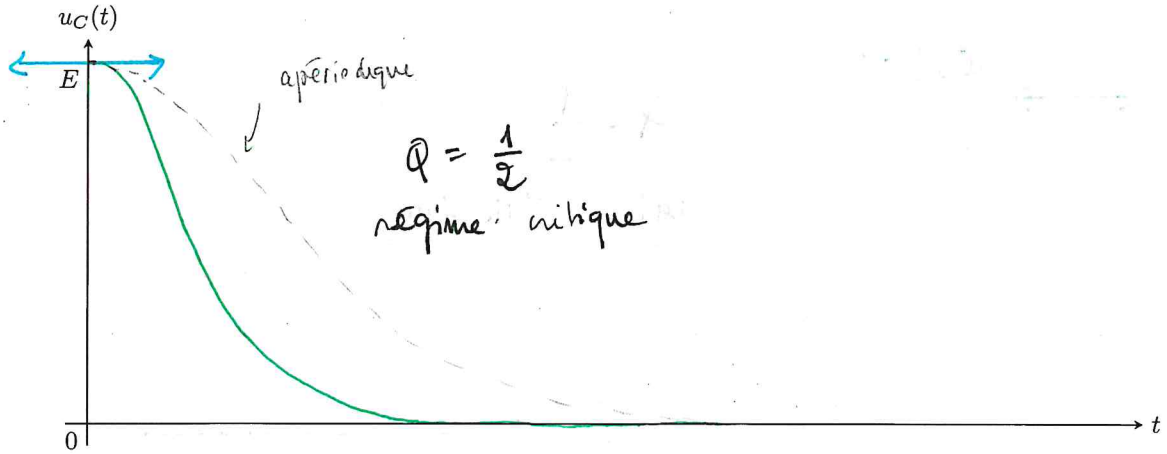
On en déduit donc que $u_c(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$

$u_c(0) = B = E$

$u_c'(t) = Ae^{-\omega_0 t} + (At + B) \times (-\omega_0) e^{-\omega_0 t}$ donc $u_c'(0) = A - B\omega_0 = 0$

D'où $\begin{cases} A - B\omega_0 = 0 \\ B = E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = E\omega_0 \\ B = E \end{cases}$

Donc $u_c(t) = (E\omega_0 t + E)e^{-\omega_0 t} \Leftrightarrow u_c(t) = E(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$.



Remarque

Pas d'oscillation : la tension rejoint directement sa valeur finale. Le régime critique correspond au retour le plus rapide vers le régime permanent.

II. 3 - Régime pseudo-périodique

Dans ce troisième et dernier cas, $\Delta < 0$ donc $Q > \frac{1}{2} \Leftrightarrow R > R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

NB : Ce régime a lieu lorsque la résistance R est suffisamment faible, et dans ce cas, l'amortissement est faible et atteint "lentement" sa valeur asymptotique :

Remarque

▷ Pour rappel, lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet un discriminant $\Delta < 0$, alors les racines x_- et x_+ de cette équation sont des racines complexes conjuguées et il vient :

$$\begin{cases} x_- = \dfrac{-b - j\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ x_+ = \dfrac{-b + j\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases}$$

où $j \in \mathbb{C} \ / \ j^2 = -1$.

Pour rappel, $\Delta = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$ donc $-\Delta = 4\omega_0^2\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

Donc $\begin{cases} r_- = \dfrac{-\omega_0/Q - j\sqrt{4\omega_0^2(1 - 1/4Q^2)}}{2} \\ r_+ = \dfrac{-\omega_0/Q + j\sqrt{4\omega_0^2(1 - 1/4Q^2)}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_- = \dfrac{-\omega_0}{2Q} - j\omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} \\ r_+ = \dfrac{-\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} \end{cases}$

On pose deux nouvelles grandeurs caractéristiques essentielles au régime pseudo-périodique :

* Un temps caractéristique : $\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q} \Leftrightarrow \tau = \frac{2Q}{\omega_0}$
* Une pseudo-pulsation $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ (et donc une pseudo-période $T = 2\pi/\Omega$).

Propriété n°3 : Solutions de l'équation homogène associée lorsque $\Delta < 0$ (régime pseudo-périodique)

▷ Lorsque le discriminant Δ de l'équation caractéristique $P(r) = 0$ vérifie $\Delta < 0$ alors le polynôme caractéristique P admet deux racines complexes conjuguées $r_\pm = -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$, et les solutions de l'équation homogène associée

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = 0$$

sont :

$$\boxed{s_h(t) = e^{-t/\tau}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R}^2}.$$

On peut également écrire cette solution sous la forme :

$$\boxed{s_h(t) = D\cos(\Omega t + \varphi)e^{-t/\tau} \text{ où } (D, \varphi) \in \mathbb{R}^2}.$$

Cette forme est utile pour comprendre le graphe $u_C = f(t)$ très rapidement.

Ainsi $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \mid u_{c,h}(t) = u_c(t) = e^{-t/\tau}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)$

avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$

CI

$u_c(0) = A = E$

$\dot{u}_c(t) = -\frac{1}{\tau}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) + e^{-t/\tau}\left(-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)\right)$

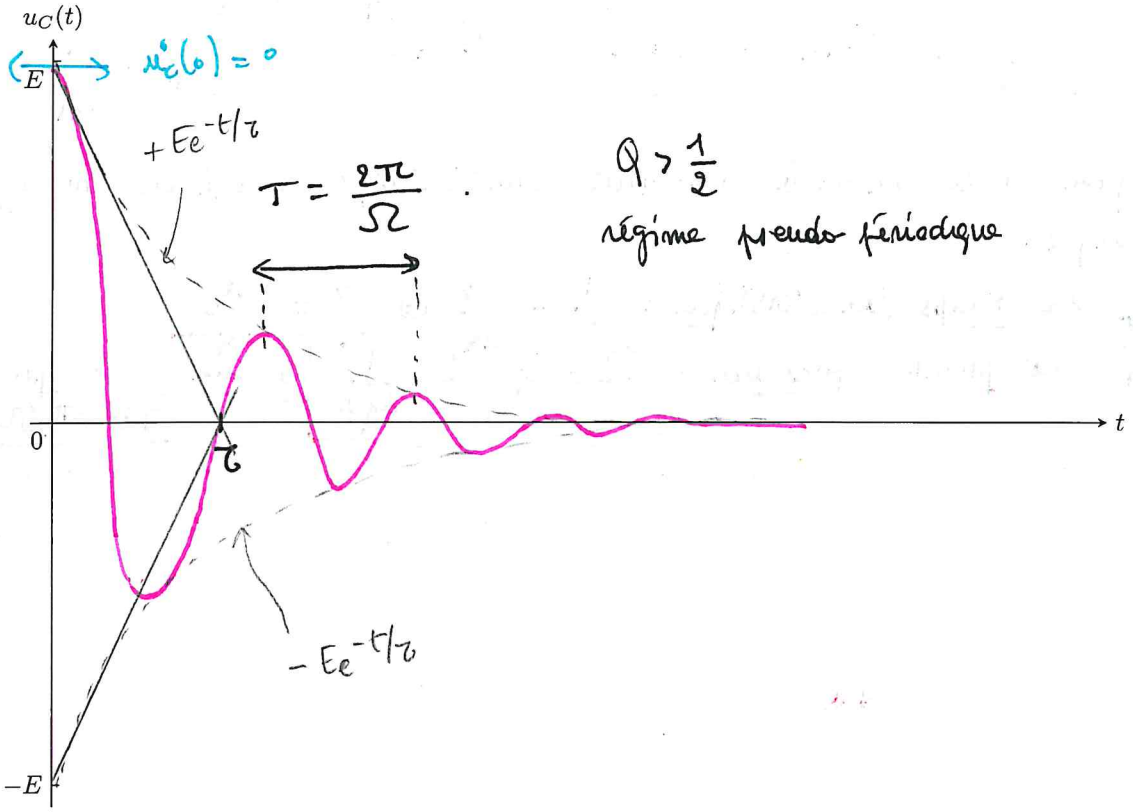
Donc on a : $\begin{cases} u_c(0) = A = E \\ \dot{u}_c(0) = -\frac{A}{\tau} + B\Omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = E \\ B = \frac{E}{\Omega\tau} \end{cases}$

Donc finalement :

"enveloppe exponentielle"

$$u_c(t) = e^{-t/\tau}\left(E\cos(\Omega t) + \frac{E}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right)$$

$$\Leftrightarrow u_c(t) = Ee^{-t/\tau}\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right)$$



Remarque

▷ On observe un amortissement progressif, borné par des enveloppes exponentielles $t \mapsto \pm Ee^{-t/\tau}$. Q renseigne sur le nombre approximatif d'oscillations, ici $Q \simeq 5$.

II. 4 - Décrément logarithmique

↳ notion très utile en TP / sujets d'écrit.

Le décrément logarithmique, généralement noté δ, est la mesure logarithmique de la décroissance périodique d'une grandeur pseudo-oscillatoire. Par définition :

$$\delta = \ln\left(\frac{s(t)}{s(t+T)}\right)$$

Dans notre cas d'étude du II. 3., $s(t) = u_c(t) = Ee^{-t/\tau}\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right)$.

Calculons d'abord $u_c(t+T)$ avant de calculer δ.

$e^{a+b} = e^a e^b$

$$u_c(t+\tau) = e^{-\frac{(t+T)}{\tau}}\left(\cos\left(\Omega(t+T)\right) + \frac{1}{\Omega\tau}\sin\left(\Omega(t+T)\right)\right)$$

Or $\Omega T = 2\pi$ et $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$ sont des fonctions 2π-périodiques d'où : $u_c(t+\tau) = e^{-t/\tau}e^{-T/\tau}\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right)$

D'où $\delta = \ln\left(\frac{e^{-t/\tau}\left(\cos(\Omega t) + 1/\Omega\tau \cdot \sin(\Omega t)\right)}{e^{-t/\tau}e^{-T/\tau}\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right)}\right)$

$\Rightarrow \delta = \ln\left(\frac{1}{e^{-T/\tau}}\right)$

$\Leftrightarrow \delta = \ln\left(e^{T/\tau}\right) = \frac{T}{\tau}$

Par ailleurs, $\begin{cases} T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-1/4Q^2}} \\ \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \end{cases}$

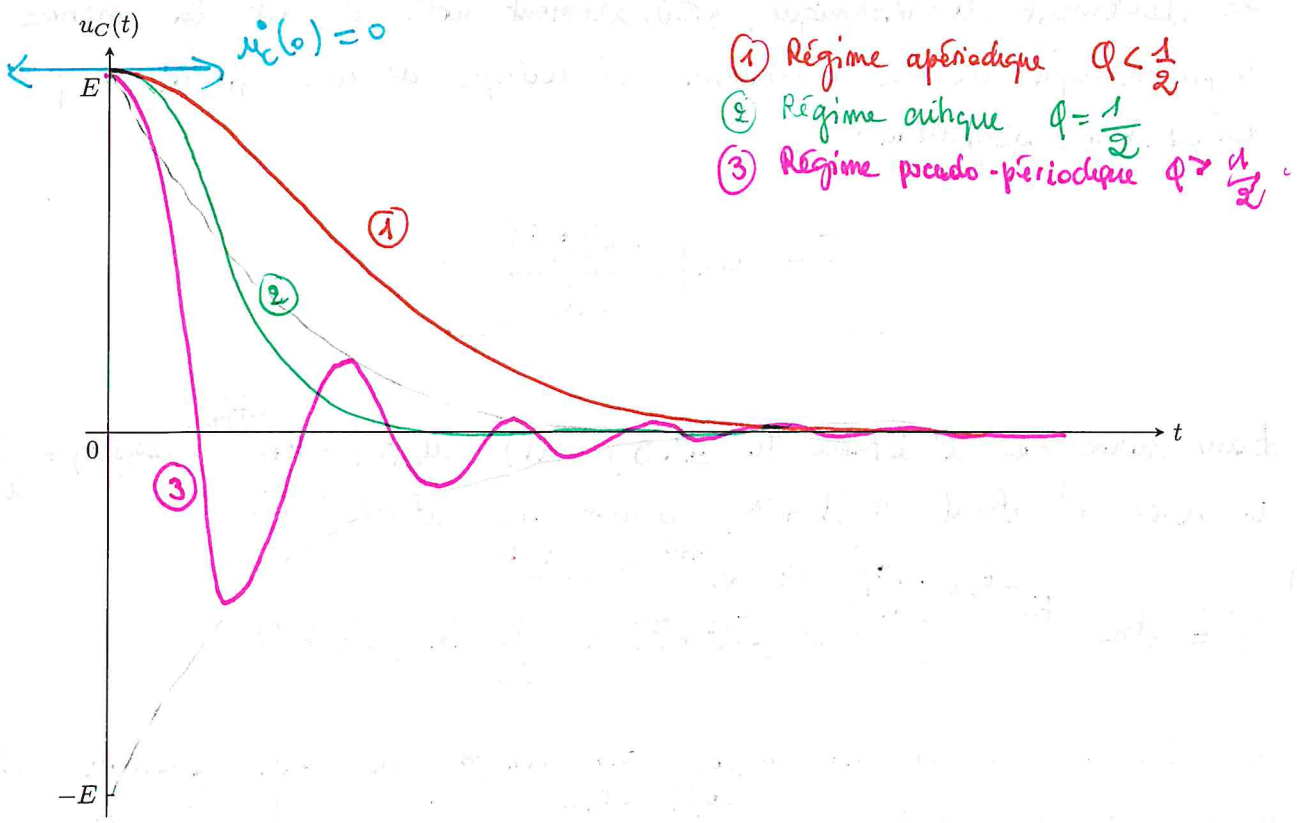
Donc $\delta = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}\frac{\omega_0}{2Q}$

$\Leftrightarrow \delta = \frac{\pi}{Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \underset{Q \gg 1}{\simeq} \frac{\pi}{Q}$

Remarque

▷ En mesurant expérimentalement δ à l'oscilloscope, on peut remonter à Q de façon très précise. Pour cela, il faut placer le curseur vertical de l'oscilloscope sur un premier maxima d'amplitude, puis sur celui d'après et relever les valeurs d'amplitude en V.

II. 5 - Récapitulatif des tracés des différents régimes sur un même graphe



Remarque

▷ En régime apériodique, la solution s'écrit

$$u_C(t) = A\,e^{r_1 t} + B\,e^{r_2 t}, \qquad r_1 = -\frac{1}{\tau_1}, \quad r_2 = -\frac{1}{\tau_2},$$

avec deux racines réelles négatives que l'on peut ordonner par $|r_1| > |r_2|$, c'est-à-dire $\tau_1 < \tau_2$. Les deux termes ne jouent pas le même rôle selon l'échelle de temps :

- **aux temps courts** ($t \lesssim \tau_1$), les deux exponentielles contribuent ; le terme rapide $e^{r_1 t}$ décroît vite et façonne le début de la courbe (notamment la tangente horizontale imposée par les conditions initiales) ;
- **aux temps longs** ($t \gtrsim \tau_1$), le terme rapide s'est éteint : il ne reste que le terme lent $e^{r_2 t}$. C'est donc la *plus grande* constante de temps τ_2 qui gouverne le retour à l'équilibre.

Plus l'amortissement augmente (au-delà du régime critique), plus les racines se séparent : τ_2 grandit et le retour à l'équilibre *ralentit*. C'est ce qui explique que le régime critique, à racine double $r = -\omega_0$ (donc $\tau = 1/\omega_0$ unique et minimale), rejoint l'asymptote plus vite que tout régime apériodique.

Application n°1 : Circuit RLC série soumis à un échelon de tension

▷ On alimente un circuit RLC série qui était ouvert (condensateur déchargé) à l'instant $t = 0^-$ en fermant l'interrupteur à l'instant $t = 0$: le circuit est désormais alimenté à l'aide d'un GBF délivrant une tension continue $E = 10$ V.

Q 1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur pour $t > 0$, et la mettre sous forme canonique.

Q 2. Déterminer complètement l'expression temporelle de $u_C(t)$. *Données* : $R = 50\ \Omega$, $L = 10$ mH, $C = 25$ µF.

Q 3. Tracer le graphe $u_C = f(t)$.

III. Considérations énergétiques

Procédons de la manière habituelle : écrivons la loi des mailles (LDM) multipliée par l'intensité i du courant électrique dans le circuit :

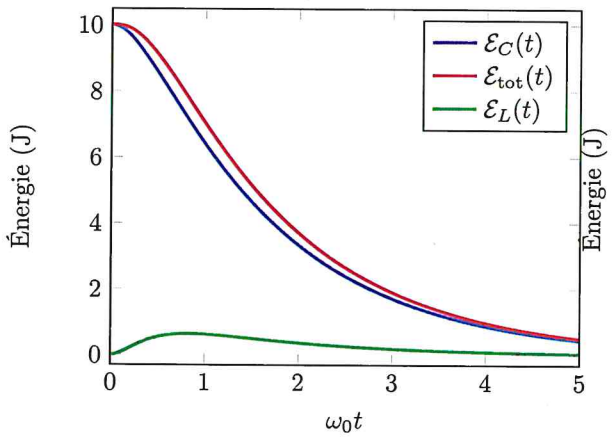
$$u_R \cdot i + u_C \cdot i + u_C \cdot i = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2\right) + Ri^2 = 0$$

Dans le cas du régime libre, pour lequel le système évolue librement, le système n'est plus alimenté par un générateur de tension continue ($E = 0$). On peut alors réécrire le bilan de puissance de la façon suivante :

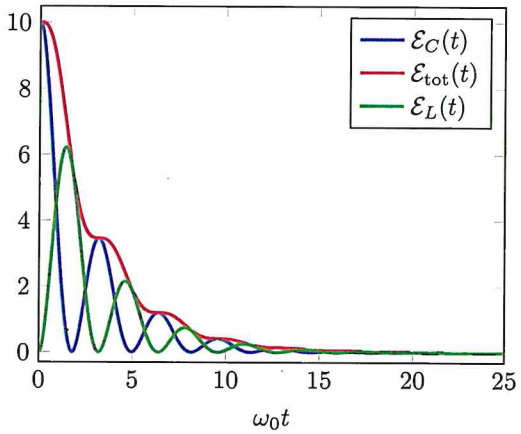
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2\right) = -Ri^2 < 0.$$

On comprend bien que la résistance dissipe l'énergie initialement stockée par le condensateur par effet JOULE. Un script Python a permis de tracer l'évolution de l'énergie stockée dans le circuit RLC série en régime libre dans le cas d'un condensateur chargé d'une énergie de 10 J avec $\omega_0 = 1$ rad · s^{-1}.
Pour le graphique de gauche dans le cas apériodique $Q = 0,3$ et pour le graphique de droite dans le cas pseudo-périodique $Q = 3$.

Circuit RLC série dans le cas apériodique



Circuit RLC série dans le cas pseudo-périodique



L'état final est décrit par une énergie totale nulle. En effet $u_c(t \to +\infty) = 0$ (condensateur totalement déchargé) et $i(t \to +\infty) = 0$ (condensateur équivalent à un interrupteur ouvert en régime permanent).

Application n°2 : Bilan énergétique d'un circuit RLC série soumis à un échelon de tension

▷ On considère le circuit RLC de l'application n°1.

Question : Effectuer le bilan énergétique complet.