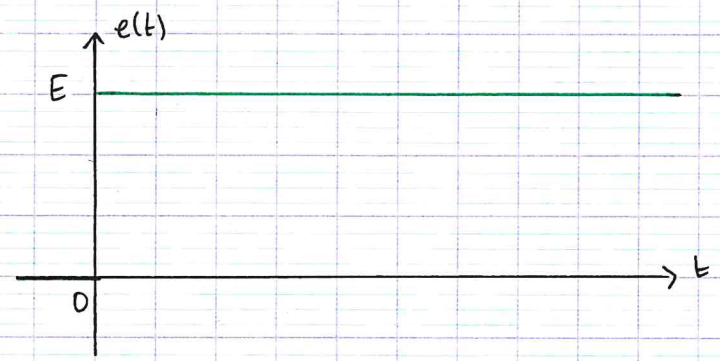
Corrigé du TDE4

EX1 – Réponses indicielles d'un condensateur dans un circuit RLC série

Q1)



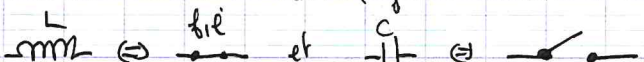
Q2) À gauche, le régime est pseudo-périodique. D'où $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} > \frac{1}{2}$

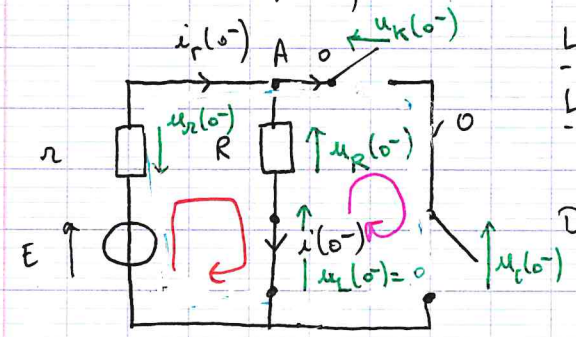
Soit $R < R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Ainsi $R = R_1 = 250\,\Omega$ est la résistance qui convient le mieux.

On en déduit que le cas $R = R_2$ correspond au graphe de droite (régime apériodique ou critique)

EX2 – Influence d'un condensateur sur un circuit RL

Q1) À $t = 0^-$, le régime permanent est atteint (juste avant la fermeture de l'interrupteur).  ⇔ fil et



LDN en A : $i_r(0^-) = i(0^-) + 0$

LDM : $E = u_R(0^-) + u_r(0^-)$

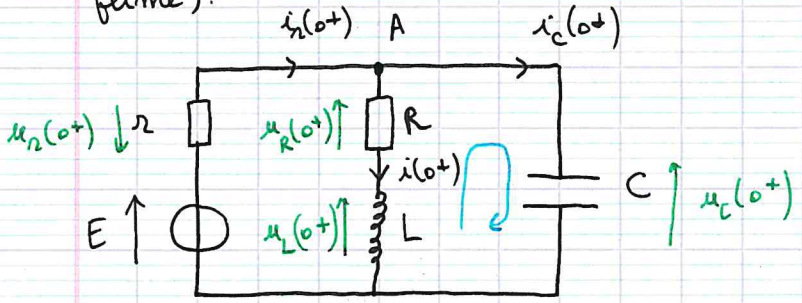
$\Leftrightarrow E = (r + R)\, i(0^-)$

D'où $i(0^-) = \frac{E}{r+R}$.

L'intensité du courant étant une grandeur continue pour une bobine électrique, il vient : $i(0^+) = i(0^-) = i(0)$ donc $\boxed{i(0^+) = \frac{E}{r+R}}$. (1)

Par ailleurs, $u_L(0^+) = L\frac{di}{dt}(0^+)$ donc $\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{u_L(0^+)}{L}$. (2)

À $t = 0^+$, le RP est fermé (l'interrupteur K vient d'être fermé).



- $u_R(0^+) = Ri(0^+) = \dfrac{RE}{r+R}$ (3)

- LDM (2) : $u_L(0^+) + u_R(0^+) = u_c(0$

Déterminons $u_c(0^+)$ (

À $t = 0^-$, on a $u_c(0^-) = 0$ (le condensateur n'était pas connecté au générateur car l'interrupteur K était ouvert).

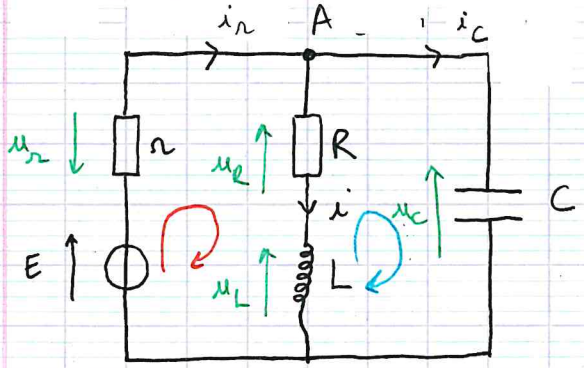
NB : Cela aurait été difficile à montrer par le calcul, on aboutit à $E = E$ lorsque l'on cherche à déterminer $u_c(0^-)$

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, $u_c(0^+) = u_c(0^-)$, donc $u_c(0^+) = 0$. (5)

Par ailleurs, d'après (4) : $u_L(0^+) + \dfrac{RE}{r+R} = 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} L\dfrac{di}{dt}(0^+) + \dfrac{RE}{r+R} =$

Donc $\boxed{\dfrac{di}{dt}(0^+) = -\dfrac{RE}{L(r+R)}}$

Q2)



Déterminons une EO vérifiée par i :

LDN en A : $i_r = i + i_c$

$\Leftrightarrow \boxed{i = i_r - i_c}$ (1)

LOM (2) : $E = r i_r + Ri + L\dfrac{di}{dt}$

donc $r i_r = E - Ri - L\dfrac{di}{dt} \Leftrightarrow \boxed{i_r = \dfrac{E}{r} - \dfrac{R}{r} i - \dfrac{L}{r}\dfrac{di}{dt}}$ (2)

Enfin, $i_c = C\dfrac{du_c}{dt}$. LOM (2) : $u_L + u_R = u_c$

$\Rightarrow C\dfrac{du_L}{dt} + RC\dfrac{di}{dt} = i_c$ $\quad \times C\dfrac{d}{dt}\ldots$

Or $u_L = L\dfrac{di}{dt}$ donc $\boxed{i_c = LC\dfrac{d^2i}{dt^2} + RC\dfrac{di}{dt}}$ (3)

En injectant (2) et (3) dans (1), il vient :

$$i = \frac{E}{r} - \frac{R}{r} i - \frac{L}{r}\frac{di}{dt} - \left(LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} \right)$$

$$\Leftrightarrow LC \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{L}{r} + RC \right) \frac{di}{dt} + \underbrace{\left(1 + \frac{R}{r} \right)}_{= \frac{r+R}{r}} i = \frac{E}{r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{1}{rC} + \frac{R}{L} \right)}_{= \frac{\omega_0}{Q}} \frac{di}{dt} + \underbrace{\frac{r+R}{rLC}}_{= \omega_0^2} i = \frac{E}{rLC}$$

Donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{r+R}{rLC}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{rC} + \frac{R}{L} = \frac{L + rRC}{rLC}$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{rLC}{L+rRC} \cdot \omega_0$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{rLC}{L+rRC} \sqrt{\frac{r+R}{rLC}}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{\sqrt{(r+R)rLC}}{L+rRC}$$

Vérifions que $[Q] = 1$.

$$[Q] = \left[\frac{\sqrt{(r+R)rLC}}{L+rRC} \right] = \left[\sqrt{\frac{R^2 LC}{R^2 C^2}} \right] = \left[\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \right] = 1.$$

On reconnaît bien un facteur de qualité ayant la même dimension que celui du RLC série $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Par conclure : $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{E}{rLC}$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{r+R}{rLC}}$ et $Q = \frac{\sqrt{(r+R)rLC}}{L+rRC}$.

Q3) Le régime est pseudo-périodique si $Q > \frac{1}{2}$ (voir cours)

d'où : $\dfrac{\sqrt{(r+R)RLC}}{L+rRC} > \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(r+R)rLC}{(L+rRC)^2} > \dfrac{1}{4}$

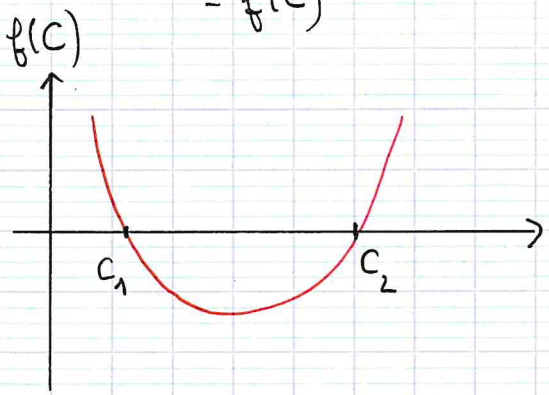
$\Leftrightarrow (L+rRC)^2 < 4(r+R)rLC$

$\Leftrightarrow L^2 + 2rRLC + r^2R^2C^2 < 4r^2LC + 4rRLC$

$\Leftrightarrow r^2R^2C^2 - (4r^2 + 2rR)LC + L^2 < 0$

$\Leftrightarrow r^2R^2C^2 - 2rL(2r+R)C + L^2 < 0$.

$\Leftrightarrow \underbrace{aC^2 + bC + c}_{= f(C)} < 0$ avec $\begin{cases} a = r^2R^2 \\ b = -2rL(2r+R) \\ c = L^2 \end{cases}$



$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4r^2L^2(2r+R)^2 - 4r^2R^2L^2$

$= 2{,}2 \times 10^5$ USI > 0

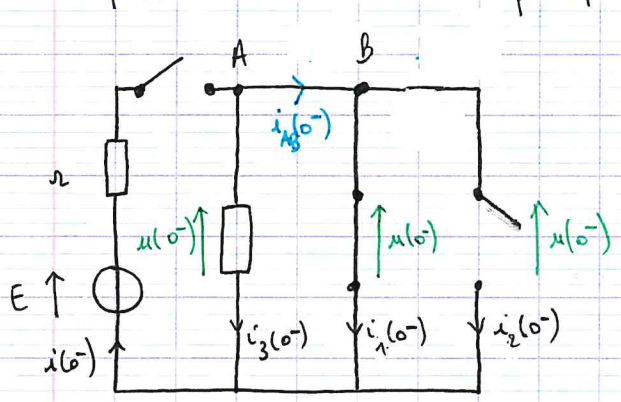
Ainsi $C \in [C_1 ; C_2]$ pour obtenir un régime pseudo-périodique avec :

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{2rL(2r+R) - \sqrt{4r^2L^2(2r+R)^2 - 4r^2R^2L^2}}{2r^2R^2} \\ C_2 = \dfrac{2rL(2r+R) + \sqrt{4r^2L^2(2r+R)^2 - 4r^2R^2L^2}}{2r^2R^2} \end{cases}$$

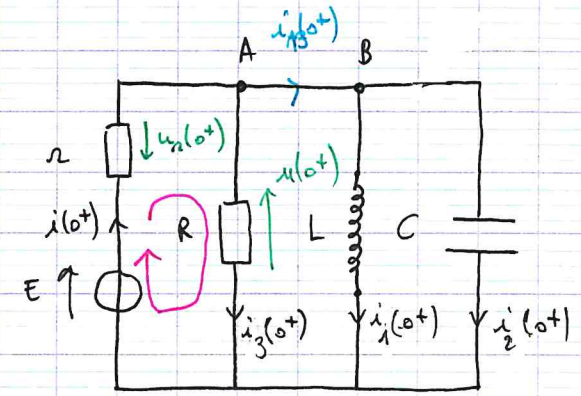
AN : $C_1 = 3{,}9\ \mu F$ et $C_2 = 2{,}3\ mF$.

EX 3 - Etude du régime transitoire d'un circuit RLC parallèle

Q1) Représentons le circuit électrique pour $t = 0^-$ et $t = 0^+$:



À $t = 0^-$ (RP)



À $t = 0^+$

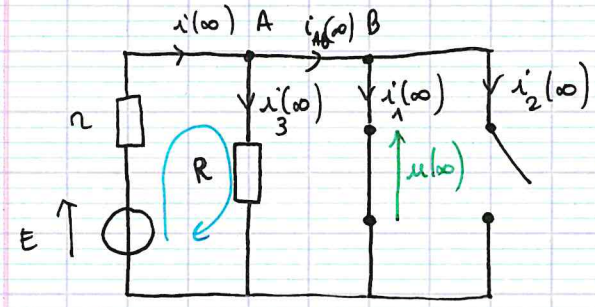
- $u(0^-) = 0$ (bobine = fil en RP)
- $u(0^-) = \underline{u(0^+) = 0}$ (continuité de la tension aux bornes du condensateur)
- Tous les courants électriques sont nuls avant la fermeture de K à $t = 0$, d'où $i(0^-) = 0$ et donc $i_1(0^+) = i_1(0^-) \Leftrightarrow \underline{i_1(0^+) = 0}$
(continuité de l'intensité du courant électrique traversant une bobine)
- $u(0^+) = R i_3(0^+)$ (loi d'Ohm) donc $i_3(0^+) = \dfrac{u(0^+)}{R} \Leftrightarrow \underline{i_3(0^+) = 0}$ ($u(0^+) = 0$)
- LDN en A : $i(0^+) = i_3(0^+) + i_{AB}(0^+)$
LDN en B : $i_{AB}(0^+) = i_2(0^+) + i_1(0^+)$
$\Rightarrow i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+) + i_3(0^+)$ ($i_1(0^+) = 0$, $i_3(0^+) = 0$)
Donc on déduit que $i(0^+) = i_2(0^+)$.
- LDM (a) : $E = u_\Omega(0^+) + u(0^+) \Leftrightarrow E = \Omega i(0^+) \Leftrightarrow \underline{i(0^+) = \dfrac{E}{\Omega}}$ ($u(0^+) = 0$)

et donc $\underline{i_2(0^+) = \dfrac{E}{\Omega}}$

Q2) D'une part $u(0^+) = R i_3(0^+)$ donc $\dfrac{du}{dt}(0^+) = R \dfrac{di_3}{dt}(0^+)$.
D'autre part, $i_2(0^+) = C \dfrac{du}{dt}(0^+)$

Donc $R \dfrac{di_3}{dt}(0^+) = \dfrac{i_2(0^+)}{C} \Leftrightarrow \dfrac{di_3}{dt}(0^+) = \dfrac{1}{RC} \cdot \dfrac{E}{\Omega} \Leftrightarrow \underline{\dfrac{di_3}{dt}(0^+) = \dfrac{E}{\Omega RC}}$

Q3) Schématisons le circuit en RP :



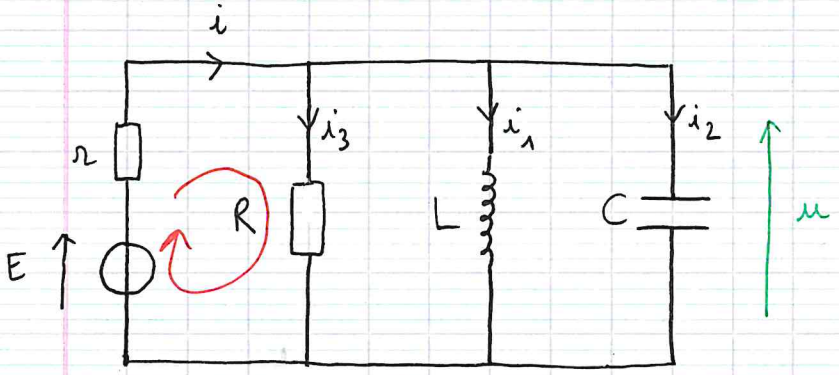
- De façon immédiate :
  $u(\infty) = 0$ (fil)
  $i_2(\infty) = 0$ (circuit ouvert)

- Loi d'Ohm : $u(\infty) = R\, i_3(\infty)$
  $\Leftrightarrow i_3(\infty) = \frac{u(\infty)}{R}$
  $\Leftrightarrow i_3(\infty) = 0$

- LDN : $i(\infty) = i_1(\infty) + \underbrace{i_2(\infty)}_{=0} + \underbrace{i_3(\infty)}_{=0}$

- LDM : $E = r\, i(\infty) + \underbrace{u(\infty)}_{=0} \Leftrightarrow i(\infty) = i_1(\infty) = \frac{E}{r}$

Q4)



LDN : $i = i_1 + i_2 + i_3$
$\Leftrightarrow i_3 = i - i_1 - i_2$ (1)

LDM : $E = r\, i + R\, i_3$
$\Leftrightarrow i = \frac{E}{r} - \frac{R}{r} i_3$ (2)

- $i_2 = C \frac{du}{dt} \Leftrightarrow i_2 = C \frac{d}{dt}(R i_3) \Leftrightarrow i_2 = RC \frac{di_3}{dt}$ (3)

- $u = L \frac{di_1}{dt} \Leftrightarrow R i_3 = L \frac{di_1}{dt} \Leftrightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{R}{L} i_3$ (4)

$\frac{d}{dt}(1)$: $\frac{di_3}{dt} = \frac{di}{dt} - \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt}$

(2),(3),(4) $\Leftrightarrow \frac{di_3}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{E}{r} - \frac{R}{r}\frac{di_3}{dt}\right) - \frac{R}{L} i_3 - \frac{d}{dt}\left(RC \frac{di_3}{dt}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{di_3}{dt} = -\frac{R}{r}\frac{d^2 i_3}{dt^2} - \frac{R}{L} i_3 - RC \frac{d^2 i_3}{dt^2}$

$\Leftrightarrow RC \frac{d^2 i_3}{dt^2} + \left(1 + \frac{R}{r}\right)\frac{di_3}{dt} + \frac{R}{L} i_3 = 0$

$1 + \frac{R}{r} = \frac{r + R}{r}$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{r+R}{rRC} \cdot \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{LC} i_3 = 0.$$

Posons $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{r+R}{rRC}$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{rRC}{r+R} \cdot \omega_0.$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{rRC}{r+R} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{rR}{r+R} \sqrt{\frac{C}{L}}}.$$

Donc $\boxed{\frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{di_3}{dt} + \omega_0^2 i_3 = 0}$ (ED)

q5) Polynôme caractéristique de l'ED : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$.

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2$$

$$= -4\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)$$

Pour avoir un régime pseudo-périodique, il faut que $\Delta < 0$

donc $1 - \frac{1}{4Q^2} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{4Q^2} \Leftrightarrow 4Q^2 > 1 \Leftrightarrow Q^2 > \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \boxed{Q > \frac{1}{2}}$. Donc $\boxed{\frac{rR}{r+R} \sqrt{\frac{C}{L}} > \frac{1}{2}}$

D'après le cours, $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{(r+R)^2 L}{4r^2 R^2 C}}}$$

q6) Si $Q > \frac{1}{2}$ alors $i_3(t) = e^{-t/\tau} \left(A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)\right)$.

En effet $\begin{cases} r_1 = \dfrac{-\omega_0/Q - j\sqrt{4\omega_0^2(1 - 1/4Q^2)}}{2} \\ r_2 = \dfrac{-\omega_0/Q + \sqrt{j\ 4\omega_0^2(1 - 1/4Q^2)}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \dfrac{-\omega_0}{2Q} - j\omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} \\ r_2 = \dfrac{-\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = -\dfrac{1}{\tau} - j\Omega = \alpha - j\beta \\ r_2 = -\dfrac{1}{\tau} + j\Omega = \alpha + j\beta \end{cases}$

et la solution est $i_3(t) = e^{-\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)$

soit avec nos notations.

$$i_3(t) = e^{-t/\tau}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)$$

$$\text{où } \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \text{ et } \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Déterminons A et B

$\rightarrow i_3(0) = A = 0$

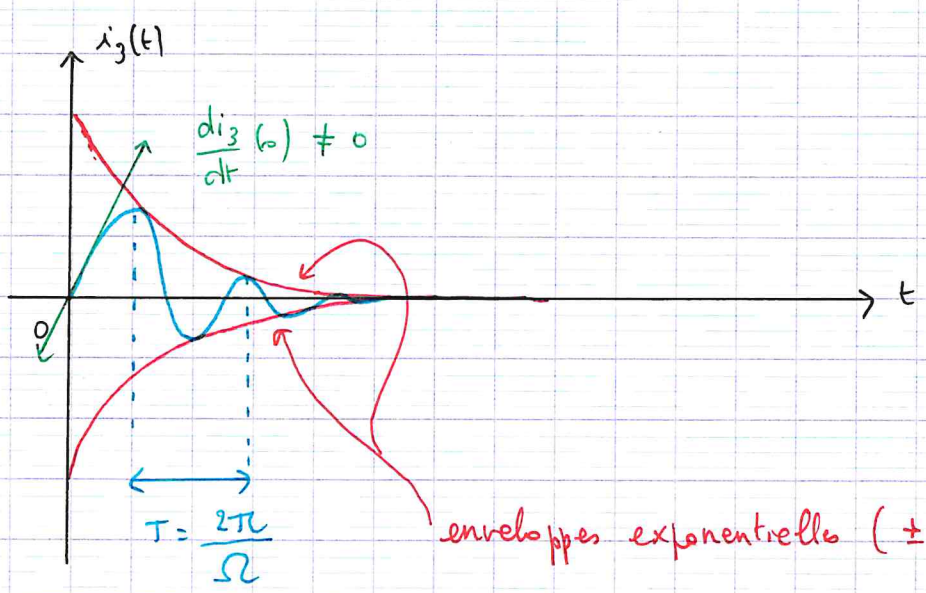
$\rightarrow \dfrac{di_3}{dt}(t) = -\dfrac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) + e^{-t/\tau}\left(-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{di_3}{dt}(t) = -\dfrac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\cdot B\sin(\Omega t) + e^{-t/\tau}\cdot B\Omega\cos(\Omega t)$

$= -Be^{-t/\tau}\left(\Omega\cos(\Omega t) - \dfrac{1}{\tau}\sin(\Omega t)\right)$

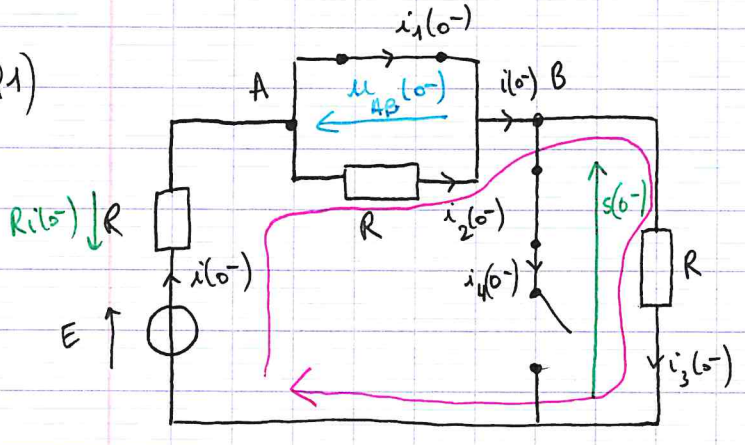
D'où $\dfrac{di_3}{dt}(0) = B\Omega = \dfrac{E}{nRC} \Leftrightarrow B = \dfrac{E}{\Omega nRC}$.

Donc $i_3(t) = \dfrac{E}{\Omega \sqrt{2} RC} e^{-t/\tau} \sin(\Omega t)$

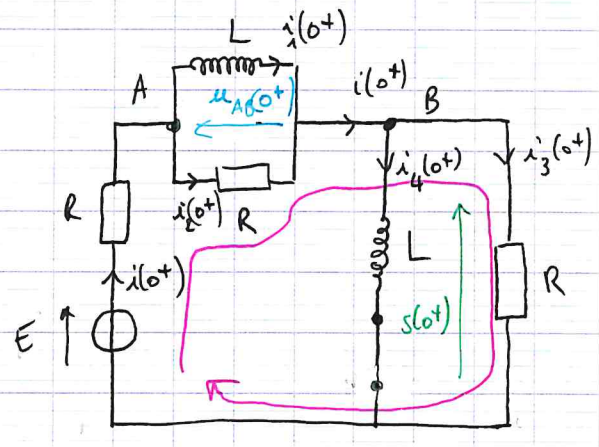


EX 4 - Etude d'un circuit à deux bobines

Q1)



À $t = 0^-$ (RP)



À $t = 0^+$

- De façon immédiate : $\underline{i_4(0^-) = 0}$ (circuit ouvert)
- $u_{AB}(0^-) = Ri_2(0^-) = 0$ (fhp) d'où $\underline{i_2(0^-) = 0}$
- LDN en A : $i(0^-) = i_1(0^-) + i_2(0^-) \Leftrightarrow i(0^-) = i_1(0^-)$
- LDN en B : $i(0^-) = \underbrace{i_4(0^-)}_{=0} + i_3(0^-) \Leftrightarrow i(0^-) = i_3(0^-)$

Donc $i(0^-) = i_1(0^-) = i_3(0^-)$.

- LDM : $E = Ri(0^-) + s(0^-)$ avec $s(0^-) = R\,i_3(0^-) = Ri(0^-)$

$\Leftrightarrow E = 2Ri(0^-)$

$\Leftrightarrow \boxed{i(0^-) = \frac{E}{2R}}$ donc $\boxed{i_1(0^-) = i_3(0^-) = \frac{E}{2R}}$

Par continuité de l'intensité du courant électrique traversant une bobine : $i_1(0^+) = i_1(0^-) \Leftrightarrow \boxed{i_1(0^+) = \frac{E}{2R}}$ et $i_4(0^-) = i_4(0^+) \Leftrightarrow \boxed{i_4(0^+) = 0}$

LDN en A : $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$

LDN en B : $i(0^+) = \underbrace{i_4(0^+)}_{=0} + i_3(0^+) = i_3(0^+)$

$\Rightarrow i_1(0^+) + i_2(0^+) = i_3(0^+)$ (*)

LDM : $E = Ri(0^+) + Ri_2(0^+) + Ri_3(0^+)$.

$\Leftrightarrow i(0^+) + i_2(0^+) + i_3(0^+) = \frac{E}{R}$.

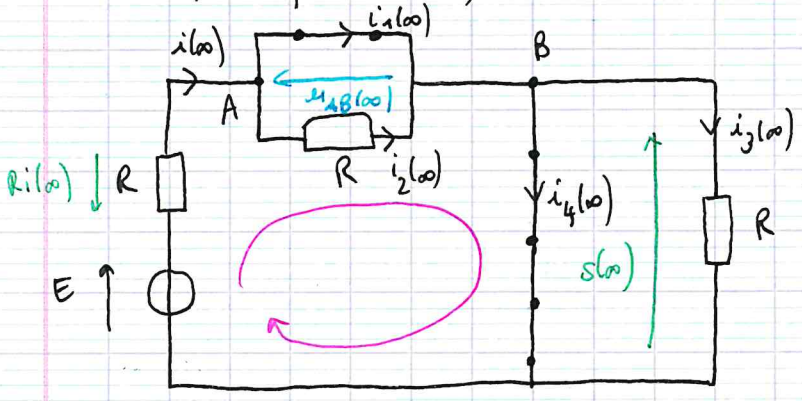
(*) $\Leftrightarrow 2i_3(0^+) = \frac{E}{R} \Leftrightarrow \boxed{i_3(0^+) = \frac{E}{2R}}$.

Donc de la LDN en B on tire $i(0^+) = i_3(0^+) \Leftrightarrow \boxed{i(0^+) = \frac{E}{2R}}$

et finalement de (*) : $i_2(0^+) = i_3(0^+) - i_1(0^+)$

$\Leftrightarrow \boxed{i_2(0^+) = 0}$.

Q2) En RP, lorsque $t \to +\infty$, le circuit devient :



De façon immédiate : $u_{AB}(\infty) = Ri_2(\infty) = 0$ (fil) $\Leftrightarrow \boxed{i_2(\infty) = 0}$

$s(\infty) = Ri_3(\infty) = 0$ (fil) $\Leftrightarrow \boxed{i_3(\infty) = 0}$

LDN en A : $i(\infty) = i_1(\infty) + \underbrace{i_2(\infty)}_{=0} \Leftrightarrow i(\infty) = i_1(\infty)$

LDN en B : $i(\infty) = \underbrace{i_3(\infty)}_{=0} + i_4(\infty) \Leftrightarrow i(\infty) = i_4(\infty)$

Donc $i(\infty) = i_1(\infty) = i_4(\infty)$

De plus LDM 2 : $E = Ri(\infty) + \underbrace{s(\infty)}_{=0} \Leftrightarrow \boxed{i(\infty) = \frac{E}{R}}$

et donc $\boxed{i_1(\infty) = i_4(\infty) = \frac{E}{R}}$

Q3) D'après la loi d'Ohm, $\boxed{s(t) = Ri_3(t)}$ et d'après la relation intensité / tension d'une bobine, $\boxed{s(t) = L\frac{di_4}{dt}(t)}$.

D'après la LDN en B : $i(t) = i_3(t) + i_4(t)$

$$\Leftrightarrow \frac{di}{dt}(t) = \frac{di_3}{dt}(t) + \frac{di_4}{dt}(t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{di}{dt}(t) = \frac{1}{R}\cdot\frac{ds}{dt}(t) + \frac{1}{L}\cdot s(t)} \quad (1)$$

et bien sûr $\boxed{i_3(t) = \frac{s(t)}{R}}$. (2)

Q4) D'une part, $u_{AB}(t) = Ri_2(t)$

D'autre part, $u_{AB}(t) = L\frac{di_1}{dt}(t)$

$$\Rightarrow \boxed{Ri_2(t) = L\frac{di_1}{dt}(t)} \quad (3)$$

LDN en A : $i(t) = i_1(t) + i_2(t) \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \boxed{\frac{di}{dt} = \frac{R}{L}i_2 + \frac{di_2}{dt}} \quad (4)$

Q5) Dans la grande maille contenant le générateur, l'association // R et L et la résistance de laquelle passe i_3, il vient : $E = Ri_1 + Ri_2 + Ri_3$.

Soit en dérivant par rapport au temps : $\boxed{0 = \frac{di}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}}$. (5)

De (4) : $i_2 = \frac{L}{R}\left(\frac{di}{dt} - \frac{di_2}{dt}\right)$.

$$\text{Or de (5)}: \quad \frac{di_2}{dt} = -\frac{di}{dt} - \frac{di_3}{dt} \overset{(1),(2)}{=} -\frac{1}{R}\cdot\frac{ds}{dt} - \frac{s}{L} - \frac{1}{R}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{di_2}{dt} = -\frac{2}{R}\cdot\frac{ds}{dt} - \frac{s}{L}.$$

$$\text{Donc dans (4)}: \quad i_2 = \frac{L}{R}\left(\frac{1}{R}\cdot\frac{ds}{dt} + \frac{s}{L} + \frac{2}{R}\cdot\frac{ds}{dt} + \frac{s}{L}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{i_2 = \frac{3L}{R^2}\cdot\frac{ds}{dt} + \frac{2s}{R}} \quad (\square)$$

Q6) De (1) et (4) on a : $\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \dfrac{1}{R}\cdot\dfrac{ds}{dt} + \dfrac{s}{L} \\ \dfrac{di}{dt} = \dfrac{R}{L} i_2 + \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$

D'où $\dfrac{1}{R}\cdot\dfrac{ds}{dt} + \dfrac{s}{L} = \dfrac{R}{L} i_2 + \dfrac{di_2}{dt}$ $(\square)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} + \frac{s}{L} = \frac{R}{L}\left(\frac{3L}{R^2}\cdot\frac{ds}{dt} + \frac{2s}{R}\right) + \frac{3L}{R^2}\cdot\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2}{R}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R}\cdot\frac{ds}{dt} + \frac{s}{L} = \frac{3}{R}\frac{ds}{dt} + \frac{2s}{L} + \frac{3L}{R^2}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2}{R}\frac{ds}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3L}{R^2}\cdot\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{4}{R}\cdot\frac{ds}{dt} + \frac{1}{L}\cdot s = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{4R}{3L}\cdot\frac{ds}{dt} + \frac{R^2}{3L^2}s = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\cdot\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{R^2}{3L^2}}}$$

et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{4R}{3L} \Leftrightarrow Q = \dfrac{3\omega_0 L}{4R}$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{3\cancel{L}}{4\cancel{R}}\cdot\frac{\cancel{R}}{\cancel{L}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Q7) $\varphi = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,4 < \frac{1}{2}$. Le régime est donc apériodique.

Polynôme caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{\varphi} r + \omega_0^2 = 0$ (C) avec $\Delta = \frac{\omega_0^2}{\varphi^2} - 4\omega_0^2$

$\Leftrightarrow \Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4\varphi^2} - 1\right)$

$\Leftrightarrow \Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{4}{3} - 1\right) = 4\omega_0^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\omega_0^2$ avec $\omega_0^2 = \frac{R^2}{3L^2}$

D'où $\Delta = \frac{4}{3} \cdot \frac{R^2}{3L^2} \Leftrightarrow \Delta = \frac{4R^2}{9L^2} > 0$.

L'équation polynomiale (C) admet deux racines réelles :

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{-\omega_0/Q - 2R/3L}{2} \\ r_2 = \dfrac{-\omega_0/Q + 2R/3L}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \dfrac{-\omega_0}{2\varphi} - \dfrac{R}{3L} \\ r_2 = \dfrac{-\omega_0}{2\varphi} + \dfrac{R}{3L} \end{cases}$$

Or $\frac{\omega_0}{\varphi} = \frac{4R}{3L}$ donc $r_1 = \frac{-2R}{3L} - \frac{R}{3L} \Leftrightarrow r_1 = -\frac{3R}{3L} \Leftrightarrow r_1 = -\frac{R}{L}$

et $r_2 = -\frac{2R}{3L} + \frac{R}{3L} \Leftrightarrow r_2 = -\frac{R}{3L}$. Posons $\tau = \frac{L}{R}$

$\Rightarrow r_1 = -\frac{1}{\tau}$ et $r_2 = -\frac{1}{3\tau}$

D'où $s(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \Leftrightarrow s(t) = Ae^{-t/\tau} + Be^{-t/3\tau}$.

Déterminons A et B :

- $s(0^+) = A + B = Ri_2(0^+) = \frac{E}{2}$
- $\frac{ds}{dt}(t) = -\frac{A}{\tau} e^{-t/\tau} - \frac{B}{3\tau} e^{-t/3\tau}$

donc $\frac{ds}{dt}(0) = -\frac{A}{\tau} - \frac{B}{3\tau} = -\frac{1}{\tau}\left(A + \frac{B}{3}\right)$.

Or d'après la Q5), $i_2(0^+) = \frac{3L}{R^2} \frac{ds}{dt}(0^+) + \frac{2s(0^+)}{R}$

$\Leftrightarrow 0 = \frac{3L}{R^2} \cdot \frac{ds}{dt}(0^+) + \frac{E}{R}$.

$\Leftrightarrow \frac{3L}{R} \frac{ds}{dt}(0^+) = -E$

Donc $\frac{ds}{dt}(0^+) = \frac{-ER}{3L}$

Donc $\begin{cases} A + B = E/2 \\ -\frac{1}{\tau}\left(A + \frac{B}{3}\right) = \frac{-ER}{3L} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = E/2 \\ -\frac{R}{L}\left(A + \frac{B}{3}\right) = \frac{-ER}{3L} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = E/2 \\ A + \frac{B}{3} = \frac{E}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A + 2B = E \quad (1) \\ 3A + B = E \quad (2) \end{cases}$

Donc (2) : $B = E - 3A$ et dans (1) : $2A + 2E - 6A = E$

$\Leftrightarrow -4A = -E$

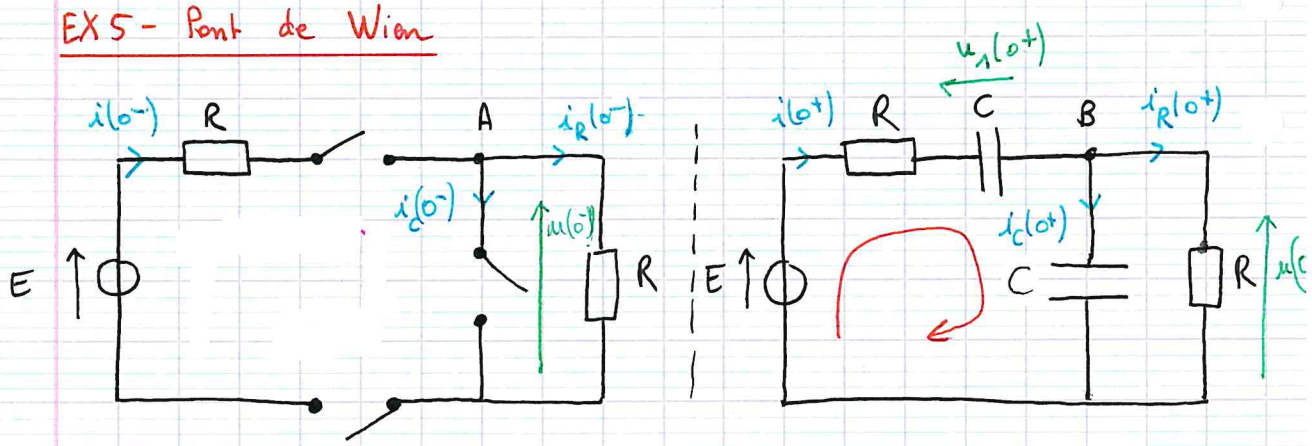
$\Leftrightarrow \boxed{A = \frac{E}{4}}$

et $B = E - 3A \Leftrightarrow B = E - \frac{3E}{4} \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{E}{4}}$

Finalement : $\boxed{s(t) = \frac{E}{4}\left(e^{-t/\tau} + e^{-t/3\tau}\right) \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}}$

EX 5 - Pont de Wien

Q1)



À $t = 0^-$ (RP)

À $t = 0^+$

LDN en A : $\underbrace{i(0^-)}_{=0 \text{ (circuit ouvert)}} = \underbrace{i_C(0^-)}_{=0} + i_R(0^-)$ donc $i_R(0^-) = 0$.

On peut faire ① vite : le condensateur est déchargé : $u_c(0^-) = \frac{q(0^-)}{C} = 0$.

Or $u(0^-) = R i_R(0^-) \Leftrightarrow u(0^-) = 0$. Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, on en déduit que $u(0^+) = u(0^-) \Leftrightarrow \underline{u(0^+) = 0}$.

On sait de plus que $i_C(0^+) = C \frac{du}{dt}(0^+) \Leftrightarrow \frac{du}{dt}(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C}$.

Or $i_C(0^+) = i(0^+) - i_R(0^+)$.

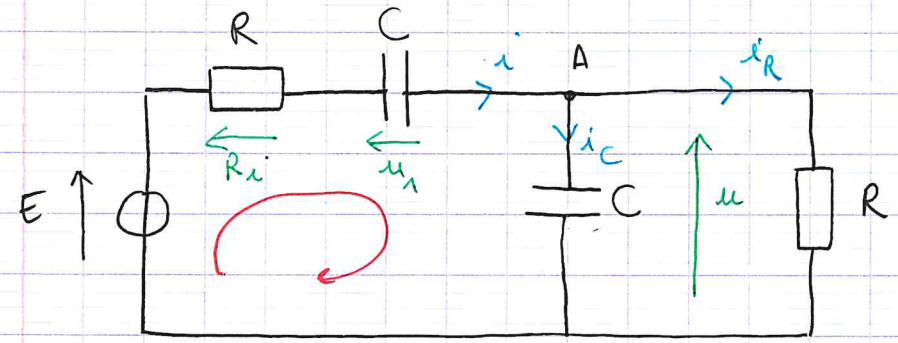
Par ailleurs, $i_R(0^+) = \frac{u(0^+)}{R} = 0$ donc $i_C(0^+) = i(0^+)$.

LDM ↷ : $E = R i(0^+) + u_1(0^+) + \underbrace{u(0^+)}_{=0}$.

Pour déterminer $u_1(0^+)$, on regarde $u_1(0^-)$: $u_1(0^-) = 0$ (condensateur déchargé) d'où $i(0^+) = \frac{E}{R}$.

Finalement, $\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC}$. En posant $\underline{\tau = RC}$, on a $\underline{\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{E}{\tau}}$.

Q2)



- LDN en A : $i = i_C + i_R$. (1)
- $i_C = C \frac{du}{dt}$ (2)
- $i_R = \frac{u}{R}$ (3)

Donc $i = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R}$. (4)

- LDM ↷ : $E = Ri + u_1 + u$ (5)
- $i = C \frac{du_1}{dt}$ (6)

$\frac{d}{dt}(5)$: $0 = R \frac{di}{dt} + \frac{du_1}{dt} + \frac{du}{dt}$ (7)

En injectant (6) dans (7) : $R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} + \frac{du}{dt} = 0$ (8)

En injectant (4) dans (8) : $R\frac{d}{dt}\left(C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R}\right) + \frac{1}{C}\left(C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R}\right) + \frac{du}{dt} = 0$

$\Leftrightarrow RC\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + \frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} + \frac{du}{dt} = 0$

$\Leftrightarrow RC\frac{d^2u}{dt^2} + 3\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}u = 0$

$\Leftrightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \underbrace{\frac{3}{RC}}_{=\frac{\omega_0}{Q}}\frac{du}{dt} + \underbrace{\frac{1}{(RC)^2}}_{=\omega_0^2}u = 0 \cdot \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0}$

avec $\omega_0 = \frac{1}{RC} \Leftrightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\tau}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{\tau} \Leftrightarrow Q = \frac{\omega_0\tau}{3}$

$\Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{1}{3}}$

Q3) $Q = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$: régime apériodique.

$$\begin{cases} r_1 = \frac{-\omega_0}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \\ r_2 = \frac{-\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 9\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 5\omega_0^2.$$

Simplifions : $\boxed{r_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2\tau} \text{ et } r_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2\tau}}$

D'où $u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$.

Conditions initiales :

- $u(0^+) = A + B = 0$
- $\frac{du}{dt}(t) = Ar_1 e^{r_1 t} + Br_2 e^{r_2 t} \Rightarrow \frac{du}{dt}(0) = \frac{E}{\tau} = Ar_1 + Br_2$.

Soit $\begin{cases} A + B = 0 & (1) \\ \frac{-(3+\sqrt{5})}{2\tau}A + \frac{(-3+\sqrt{5})}{2\tau}B = \frac{E}{\tau} & (2) \end{cases}$

(1) : $B = -A$

(2) : $\frac{-(3+\sqrt{5})}{2} A + \frac{(3-\sqrt{5})}{2} A = E$

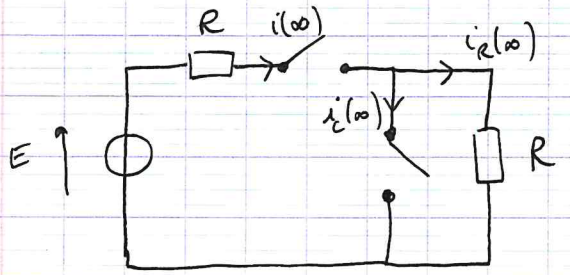
$\Leftrightarrow -\sqrt{5} \cdot A = E \quad \Leftrightarrow A = -\frac{E}{\sqrt{5}}$ et donc $B = \frac{E}{\sqrt{5}}$.

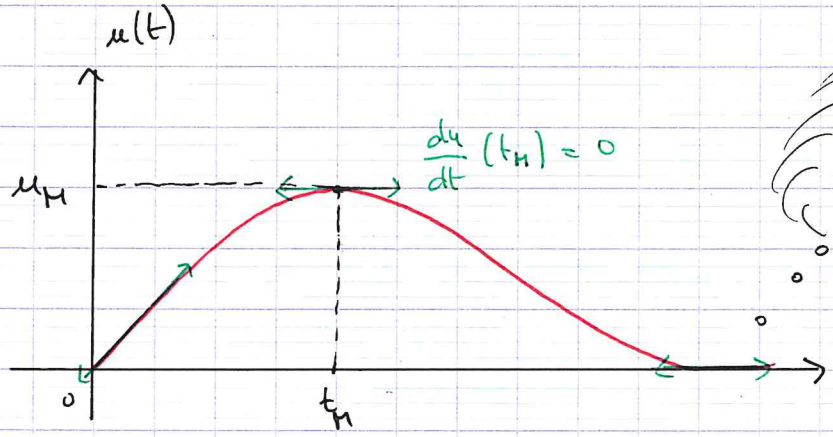
Finalement : $u(t) = \frac{E}{\sqrt{5}} \left(e^{r_2 t} - e^{r_1 t} \right)$.

avec $r_1 = -\frac{3-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $r_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} < 0$

Déterminons $u(\infty)$ avant de tracer le graphe : $u(\infty) = R i_R(\infty)$.

$= 0$.





$\lim_{t \to +\infty} e^{r_1 t} = 0$

$\lim_{t \to +\infty} e^{r_2 t} = 0$

(Q4) $\frac{du}{dt}(t_M) = 0 \Leftrightarrow \frac{E}{\sqrt{5}} \left(r_2 e^{r_2 t_M} - r_1 e^{r_1 t_M} \right) = 0$

$\Leftrightarrow r_2 e^{r_2 t_M} = r_1 e^{r_1 t_M}$

$\Leftrightarrow \ln(r_2) + r_2 t_M = \ln(r_1) + r_1 t_M$

D'où $(r_2 - r_1) t_H = \ln(r_1) - \ln(r_2) = \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$.

$\Leftrightarrow \left(\frac{-3+\sqrt{5}+3+\sqrt{5}}{2\tau}\right) t_H = \ln\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{-3+\sqrt{5}}\right)$

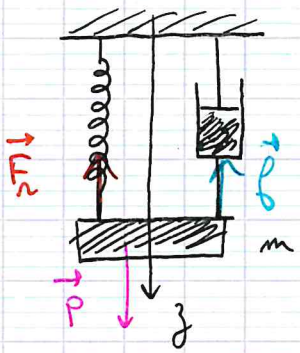
$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{\tau} t_H = \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)$

$\Leftrightarrow t_H = \frac{\tau}{\sqrt{5}} \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)$

EX6 – Analogie du circuit RLC série : oscillateur mécanique amorti de type masse - ressort avec frottement fluide -

Q1) Bilan des forces :

- $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$
- $\vec{f} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$
- $\vec{F}_r = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{bâti} \to \text{masse}} = -k(z - l_0)\vec{u}_z$.



Q2) La deuxième loi de Newton donne : $m\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ext,i}$

$\Leftrightarrow m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f} + \vec{F}_r$

Soit $m\vec{a} = mg\vec{u}_z - \lambda \frac{dz}{dt}\vec{u}_z - k(z - l_0)\vec{u}_z$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \left(g - \frac{\lambda}{m}\frac{dz}{dt} - \frac{k}{m}(z - l_0) \right) \vec{u_z} \quad (\star)$$

Q3) En projetant $(\star)$ selon $\vec{u_z}$, et en sachant que $\vec{a} = \frac{d^2z}{dt^2}\vec{u_z}$, il vient :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - \frac{\lambda}{m}\frac{dz}{dt} - \frac{k}{m}z + \frac{k}{m}l_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}l_0 = g + \frac{k}{m}l_0.$$

Posons $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $\Leftrightarrow$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Donc $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}$ $\Leftrightarrow$ $Q = \frac{\omega_0 m}{\lambda}$ $\Leftrightarrow$ $Q = \frac{m}{\lambda}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{\sqrt{mk}}{\lambda}.$$

et donc $$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = g + \omega_0^2 l_0.$$

Q4) ω_0 : pulsation propre (en rad.s^{-1})

Q : facteur de qualité (sans unité).

Si $\lambda \nearrow$ alors $Q \searrow$. (donc le nombre d'oscillations $\searrow$: logique) av. retour à l'équilibre.

Le retour à l'équilibre est plus rapide.

Q5) À l'équilibre : $z = z_{eq} = \text{cste}$ d'où $\omega_0^2 z_{eq} = g + \omega_0^2 l_0$

$$\Leftrightarrow z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}.$$

z_{eq} ne dépend pas de λ : λ est un frottement fluide dépendant de la vitesse, pas de la position.

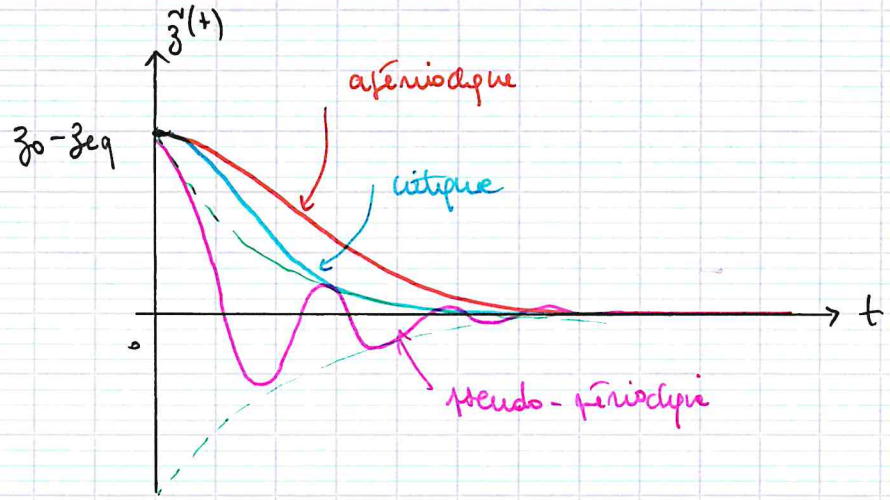
Q6) $\tilde{z} = z - z_{eq}$ donc $\frac{d\tilde{z}}{dt} = \frac{dz}{dt}$ et $\frac{d^2\tilde{z}}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}$.

Q $\omega_0^2 z_{eq} = g + \omega_0^2 l_0$ donc $\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{eq}$

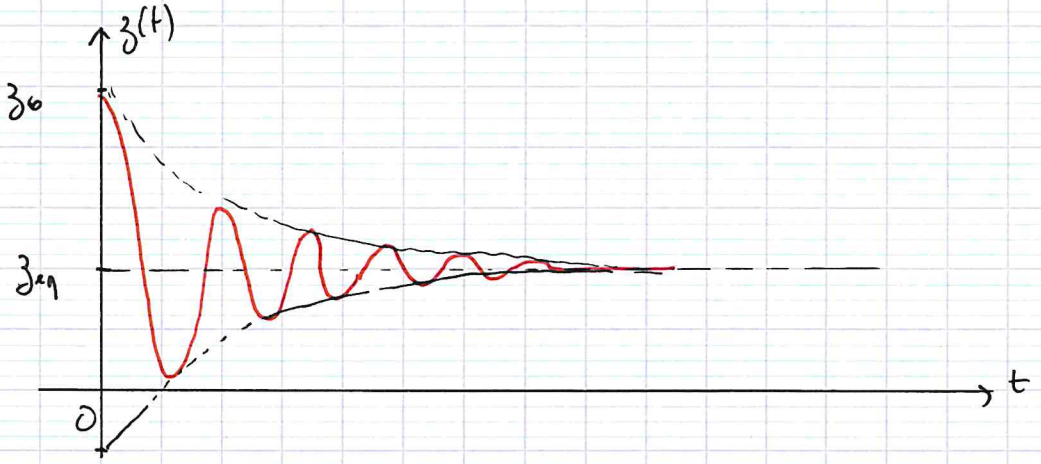
$\Leftrightarrow \frac{d^2\tilde{z}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\tilde{z}}{dt} + \omega_0^2 \tilde{z} = 0.$

Q7) Équation caractéristique associée : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$.

- $Q < \frac{1}{2}$: régime apériodique
- $Q = \frac{1}{2}$: régime critique
- $Q > 1/2$: régime pseudo-périodique



Q8) Si $Q = 5$, on observe environ 5 oscillations avant que la masse ne se stabilise autour de sa position d'équilibre.



q9) $$\begin{cases} L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = E \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} + \lambda\dfrac{dz}{dt} + kz = mg + kl_0 \end{cases}$$

Electrique	q	i	L	R	$1/C$
Mécanique	z	v	m	λ	k

q10) $$m\frac{d^2\tilde{z}}{dt^2} + \lambda\frac{d\tilde{z}}{dt} + k\tilde{z} = 0 \quad (ED)$$

Multiplions cette équation par $\dfrac{d\tilde{z}}{dt}$:

$$m\frac{d^2\tilde{z}}{dt^2}\cdot\frac{d\tilde{z}}{dt} + \lambda\left(\frac{d\tilde{z}}{dt}\right)^2 + k\tilde{z}\left(\frac{d\tilde{z}}{dt}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{d\tilde{z}}{dt}\right)^2\right) + \lambda\left(\frac{d\tilde{z}}{dt}\right)^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}k\tilde{z}^2\right) = 0.$$

$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$: énergie cinétique

$\lambda\left(\frac{d\tilde{z}}{dt}\right)^2$: puissance dissipée par le frottement fluide

$\mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2}k\tilde{z}^2$: énergie potentielle élastique

La puissance Joule $P_J = Ri^2$ est l'analogue de $\lambda\left(\frac{d\tilde{z}}{dt}\right)^2$.