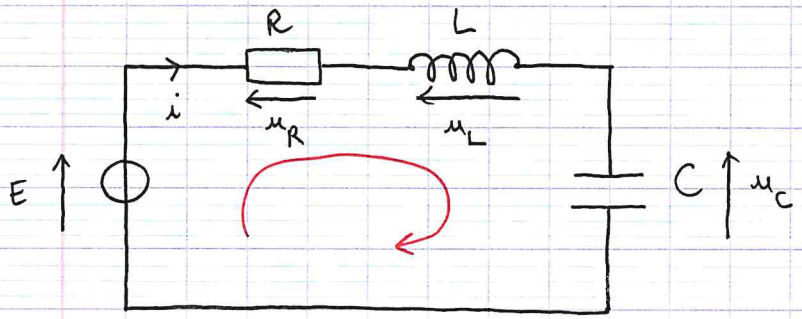
Corrigé des applications de cours du chapitre E4

Application n° 1 : Circuit RLC série soumis à un échelon de tension

Q1)



LDM : $E - u_R - u_L - u_C = 0$

$\Leftrightarrow RC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = E$ avec $u_R = Ri$, $u_L = L\frac{di}{dt}$, $i = C\frac{du_C}{dt}$.

$\Leftrightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC}$

$\Leftrightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Q2) AN : $Q = \frac{1}{50}\times\sqrt{\frac{10\times10^{-3}}{25\times10^{-6}}} \Leftrightarrow Q = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$: régime apériodique.

(EH) : $\frac{d^2u_{ch}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\cdot\frac{du_{ch}}{dt} + \omega_0^2 u_{ch} = 0$

Il faut résoudre $P(r) = 0$ avec $P(r) = r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2$.

Sachant que $Q < \frac{1}{2}$, alors $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right) > 0$

Ainsi l'équation $P(r) = 0$ admet deux racines réelles :

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{-\omega_0/Q - \sqrt{4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2}-1\right)}}{2} \\ r_2 = \dfrac{-\omega_0/Q + \sqrt{4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2}-1\right)}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \dfrac{-\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2}-1} \\ r_2 = \dfrac{-\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2}-1} \end{cases}$$

E4

$u_c(t) = u_{ca}(t) + u_{cp}(t)$ et $u_{cp}(t) = K = E$

2

Donc $u_{ch}(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et $u_c(t) = E + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

On détermine A et B à l'aide des conditions initiales :

- $u_c(0^-) = 0$ (condensateur déchargé avant la fermeture de l'interrupteur.

Par continuité : $u_c(0^-) = u_c(0^+) = \underline{u_c(0) = 0}$.

- $\dot{u}_c(0^-) = \underline{i(0^-)}$. Or $i(0^-) = 0$ (interrupteur ouvert) et donc par continuité dans la bobine : $i(0^-) = i(0^+) = i(0) = 0$

Donc $\dot{u}_c(0) = \dot{u}_c(0^+) = \underline{\dot{u}_c(0) = 0}$

D'où $\begin{cases} u_c(0) = 0 = E + A + B & (1) \\ \dot{u}_c(0) = 0 = Ar_1 + Br_2 & (2) \end{cases}$

(1) : $A = -(E + B)$

(2) : $-(E+B)r_1 + Br_2 = 0 \Leftrightarrow B(r_2 - r_1) - Er_1 = 0$

$\Leftrightarrow B(r_2 - r_1) = Er_1$

$\Leftrightarrow B = \dfrac{r_1}{r_2 - r_1} E$.

et donc $A = -\left(E + \dfrac{r_1}{r_2 - r_1} E\right) = -\left(\dfrac{Er_2 - Er_1 + Er_1}{r_2 - r_1}\right)$

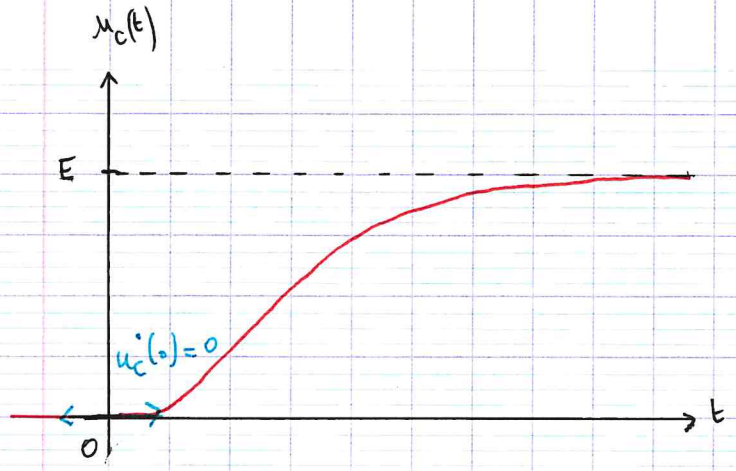
$\Leftrightarrow A = \dfrac{-r_2}{r_2 - r_1} E$

Finalement : $u_c(t) = E + E\left(\dfrac{-r_2}{r_2 - r_1} e^{r_1 t} + \dfrac{r_1}{r_2 - r_1} e^{r_2 t}\right)$

$\Leftrightarrow u_c(t) = E\left(1 + \dfrac{1}{r_2 - r_1}\left(r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t}\right)\right)$

avec $r_{1,2} = \dfrac{-\omega_0}{2Q} \mp \omega_0 \sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}$

Q3)



Application n°2 : Bilan énergétique d'un circuit RLC série soumis à un échelon de tension

LDM × $i\,dt$: $\quad E i\,dt = Ri^2 dt + u_L i\,dt + u_C i\,dt$

$\Leftrightarrow E i\,dt = Ri^2 dt + Li\,di + Cu_C\,du_C$

On $u_C(t) = E\left(1 + \frac{1}{r_2 - r_1}\left(r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t}\right)\right)$

$$i(t) = CE\,\frac{d}{dt}\left(1 + \frac{1}{r_2 - r_1}\left(r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t}\right)\right)$$

$$= CE \cdot \frac{1}{r_2 - r_1}\left(r_1 r_2 e^{r_2 t} - r_1 r_2 e^{r_1 t}\right)$$

$$= \frac{CE\, r_1 r_2}{r_2 - r_1}\left(e^{r_2 t} - e^{r_1 t}\right).$$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2000 \text{ rad.s}^{-1}$; $Q = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

Donc $r_1 = -4000 \text{ rad.s}^{-1}$

$r_2 = -1000 \text{ rad.s}^{-1}$

On se rend compte que $\begin{cases} r_1 = -2\omega_0 \\ r_2 = -\frac{\omega_0}{2} \end{cases}$ d'où $r_1 r_2 = \omega_0^2$

$r_2 - r_1 = -\frac{\omega_0}{2} + 2\omega_0$

$= \frac{3}{2}\omega_0$

Donc $\begin{cases} i(t) = \frac{2}{3} C E \omega_0 \left(e^{-\frac{\omega_0 t}{2}} - e^{-2\omega_0 t} \right) \\ u_c(t) = E\left(1 + \frac{2}{3\omega_0}\left(\frac{\omega_0}{2} e^{-2\omega_0 t} - 2\omega_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2}} \right)\right) \end{cases}$

$= E\left(1 + \left(\frac{1}{3} e^{-2\omega_0 t} - \frac{4}{3} e^{-\omega_0 t/2}\right)\right)$.

D'où $\underbrace{\int_0^{+\infty} E i dt}_{\mathcal{E}_g} = \underbrace{\int_0^{+\infty} R i^2 dt}_{\mathcal{E}_J} + \underbrace{\int_{i(0)=0}^{i(\infty)=0} L i di}_{\mathcal{E}_L} + \underbrace{\int_{u_c(0)=0}^{u_c(\infty)=E} C u_c du_c}_{\mathcal{E}_C}$

$\mathcal{E}_g = \frac{2}{3} C E^2 \omega_0 \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{\omega_0 t}{2}} - e^{-2\omega_0 t} \right) dt$

$\Leftrightarrow \mathcal{E}_g = \frac{2}{3} C E^2 \omega_0 \left[\frac{-2}{\omega_0} e^{-\frac{\omega_0 t}{2}} - \left(\frac{-1}{2\omega_0} e^{-2\omega_0 t} \right) \right]_0^{+\infty}$

$\Leftrightarrow \mathcal{E}_g = \frac{2}{3} C E^2 \omega_0 \left[\frac{1}{2\omega_0} e^{-2\omega_0 t} - \frac{2}{\omega_0} e^{-\frac{\omega_0 t}{2}} \right]_0^{+\infty}$

$\Leftrightarrow \mathcal{E}_g = \frac{2}{3} C E^2 \left(2 - \frac{1}{2} \right)$

$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_g = C E^2}$ énergie fournie par le générateur

$\mathcal{E}_J = \int_0^{+\infty} R i^2 dt$.

$i^2(t) = \frac{4}{9} C^2 E^2 \omega_0^2 \left(e^{-\omega_0 t} + e^{-4\omega_0 t} - 2 e^{-\frac{\omega_0 t}{2}} e^{-2\omega_0 t} \right)$

$= e^{-\omega_0 t (2 + 1/2)} = e^{-\frac{5\omega_0 t}{2}}$. $2Q = e^{-\omega_0 t / Q}$.

D'où $\mathcal{E}_J = \frac{4}{9} R C^2 E^2 \omega_0^2 \left(\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\omega_0 t} dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-4\omega_0 t} dt}_{I_2} - 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\omega_0 t / Q} dt}_{I_3} \right)$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\omega_0 t}\,dt = \left[-\frac{1}{\omega_0} e^{-\omega_0 t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\omega_0}.$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-4\omega_0 t}\,dt = \left[-\frac{1}{4\omega_0} e^{-4\omega_0 t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4\omega_0}.$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}\,dt = \left[-\frac{Q}{\omega_0} e^{-\omega_0 t/Q}\right]_0^{+\infty} = \frac{Q}{\omega_0} = \frac{2}{5\omega_0}$$

D'où $\mathcal{E}_J = \frac{4}{9} RC^2E^2\omega_0^2 \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{4\omega_0} - \frac{4}{5\omega_0}\right)$

$$= \frac{4}{9} RC^2E^2\omega_0^2 \left(\frac{20 + 5 - 16}{20\omega_0}\right)$$

$$= \frac{4}{9} RCE^2\omega_0 \times \frac{9}{20\omega_0}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} RC^2E^2\omega_0$$

$$= \frac{1}{2} \times Q.RC^2E^2\omega_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{R\sqrt{\frac{L}{C}}} \times RC^2E^2 \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathcal{E}_J = \frac{1}{2} CE^2}$. Énergie dissipée par effet Joule

$\mathcal{E}_C = \left[\frac{1}{2} Cu_C^2\right]_0^{\infty} = \boxed{\frac{1}{2} CE^2.}$ énergie stockée par le condensateur

On retrouve bien $\boxed{\mathcal{E}_g = \mathcal{E}_J + \underbrace{\mathcal{E}_L}_{=0 \text{ ici}} + \mathcal{E}_C}$