Corrigé du DL n° 3

I) Décoloration du vert de malachite

I.2) Détermination du coefficient d'absorption molaire du vert de malachite

Q1) Absorbe dans le jaune orangé : couleur bleu-violet

Q2) On travaille à $\lambda = 620$ nm, ce qui correspond à la longueur d'onde d'absorption maximale : il y aura moins d'erreur sur l'absorbance.

Q3) $c_{mère} = c = 1{,}00 \times 10^{-5}$ mol.L^{-1}.

$c_{fille} = 1{,}00 \times 10^{-6}$ mol.L^{-1}.

Lors d'une dilution, la quantité de matière se conserve.

D'où $c_{mère} \underbrace{V_{mère\,p.}}_{\text{volume de la solution mère à prélever}} = c_{fille} V_{fille}$

D'où $\boxed{V_{mère,p} = \dfrac{c_{fille}}{c_{mère}} V_{fille}}$ AN : $V_{mère,p} = 10$ mL

On utilise une pipette jaugée de 10 mL et une fiole jaugée de 100 mL

Q4) On remarque que A est proportionnelle à c donc $A = kc$.

La loi de Beer-Lambert est bien vérifiée.

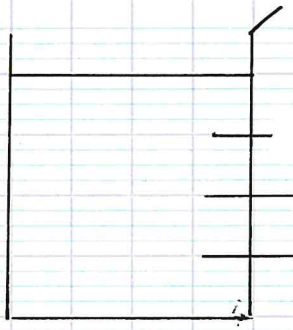
On a $k = \ell$ où k est le coeff directeur de la droite.

$k = \dfrac{0{,}57 - 0{,}06}{(10-1) \times 10^{-6}} = \dfrac{0{,}51}{9 \times 10^{-6}} = 5{,}7 \times 10^{+4}$ L.mol^{-1}

I.3) Etude cinétique

Q5) Loi de vitesse : $\boxed{v = k\,[M^{\oplus}]^{\beta}\,[HO^{\ominus}]^{\alpha}}$.

Q6) Il faut analyser tout ce qu'il y a dans un bécher.



$V_{tot} = V_0 + V_1 + V_2 = 100,0$ mL.

$[H_3O^+]_0 = \dfrac{n(H_3O^+)_0}{V_{tot}} = \dfrac{c_1 V_1}{V_{tot}}$ $\overset{AN}{\Rightarrow}$ $[H_3O^+]_0 = \dfrac{3,50 \times 10^{-5} \times 20,0 \times 10^{-3}}{100 \times 10^{-3}}$

$\Leftrightarrow$ $\underline{[H_3O^+]_0 = 1,5 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}}$

$[HO^-]_0 = \dfrac{n(HO^-)_0}{V_{tot}} = \dfrac{c_2 V_2}{V_{tot}}$ $\Leftrightarrow$ $[HO^-]_0 = \dfrac{1,00 \times 10^{-1} \times 5,0 \times 10^{-3}}{100 \times 10^{-3}}$

$\Leftrightarrow$ $\underline{[HO^-]_0 = 5,0 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}}$

Q7) $[HO^-]_0 \gg [H_3O^+]_0$. (Le rapport vaut $\simeq 333$).
On applique la méthode de la dégénérescence de l'ordre et on considère que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $[HO^-](t) = [HO^-]_0$.
$v = k [HO^-]_0^{\alpha} [H_3O^+]^{\beta}$
$\Leftrightarrow$ $\underline{v = k_{app} [H_3O^+]^{\beta}}$ d'où $\underline{k_{app} = k [HO^-]_0^{\alpha}}$.

Q8) On sait que $A = \varepsilon l [H_3O^+]$.
Traçons $\ln(A) = f(t)$ et voyons si la modélisation est linéaire (ou affine).
C'est bien le cas $r^2 = 0,9999$.
Modélisation $y = -0,034 x - 0,15$. donc $\beta = 1$

Q9) On reconnaît la méthode des vitesses initiales :
$k_{app} = k [HO^-]_0^{\alpha}$
D'où $\underline{\log(k_{app}) = \log(k) + \alpha \log([HO^-]_0)}$.

Modélisation : $\begin{cases} \alpha = 1,024 \simeq 1 \\ \log(k) = 0,876 \Rightarrow k = 7,5 \text{ L.mol}^{-1}.\text{min}^{-1} \end{cases}$ $k = 10^{0,876}$

II) Recharge d'un condensateur

Q10) $\eta = \dfrac{\mathcal{E}_{stockée}}{\mathcal{E}_{fournie}}$ $[RC] = T$ $[E] =$ tension

η étant un rapport de deux énergies, alors $[\eta] = 1$.

Exprimons $[E]$ en fonction des dimensions des grandeurs fondamentales

$P_{elec} = U.I$ et $\mathcal{E}_{elec} = P_{elec} \times \Delta t$

$\Rightarrow [P_{elec}] = M.L^2.T^{-2}.T^{-1} = M.L^2.T^{-3}$

D'où $[E] = M.L^2.T^{-3}.I^{-1}$.

Par ailleurs, $P_{elec\,Joule} = RI^2$ d'où $[R] = M.L^2.T^{-3}.I^{-2}$

et donc $[C] = T[R]^{-1} = T.M^{-1}.L^{-2}.T^{3}.I^{2}$

$\Leftrightarrow [C] = M^{-1}.L^{-2}.T^{4}.I^{2}$.

Supposons que $[\eta] = A[R]^\alpha[C]^\beta[E]^\gamma$. En passant à l'éq. aux dimensions, il vient : (avec $[A] = [\eta] = 1$)

$$1 = (M.L^2.T^{-3}.I^{-2})^\alpha.(M^{-1}.L^{-2}.T^{4}.I^{2})^\beta(M.L^2.T^{-3}.I^{-1})^\gamma$$

$$\Leftrightarrow 1 = M^{\alpha-\beta+\gamma}.L^{2\alpha-2\beta+2\gamma}.T^{-3\alpha+4\beta-3\gamma}.I^{-2\alpha+2\beta-\gamma}$$

D'où $\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 & (L_1) \\ 2\alpha - 2\beta + 2\gamma = 0 & (L_2) \\ -3\alpha + 4\beta - 3\gamma = 0 & (L_3) \\ -2\alpha + 2\beta - \gamma = 0 & (L_4) \end{cases}$

$2(L_1) + L_4$: $2\alpha - 2\beta + 2\gamma + (-2\alpha) + 2\beta - \gamma = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\gamma = 0}$

$(L_2) + (L_3)$: $-\alpha + 2\beta = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = 2\beta$

(L_1) : $2\beta - \beta + 0 = 0$

donc $\boxed{\beta = 0}$

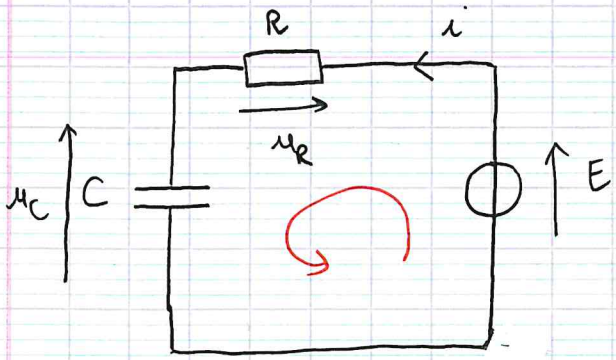
et donc $\boxed{\alpha = 0}$

Donc η ne dépend ni des valeurs de R, C ni E.

II.1) Premier procédé de charge

Q11) Le condensateur étant initialement déchargé, $u_c(0^-) = 0$.
Par continuité de la tension aux bornes du condensateur : $u_c(0^-) = u_c(0^+)$
donc $\underline{u_c(0^+) = 0}$.

Q12) Schéma du circuit :



LDM : $E - u_R - u_C = 0$

$\Leftrightarrow u_R + u_C = E$

Or $u_R = Ri$ et $i = C\frac{du_c}{dt}$

donc $RC\frac{du_c}{dt} + u_c = E$

$\Leftrightarrow \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c = \frac{E}{RC}$

$\Leftrightarrow \underline{\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau}u_c = \frac{E}{\tau}}$ (ED)

avec $\underline{\tau = RC}$ la constante de temps caractéristique de ce système. Au bout de $\underline{t \geq 5\tau}$, le régime permanent est établi et le condensateur est chargé.

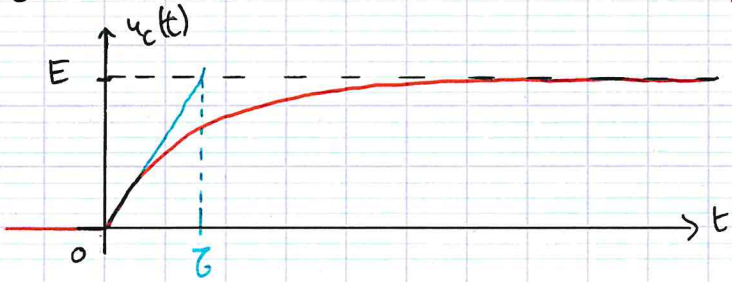
Q13) (EH) : $\frac{du_{ch}}{dt} + \frac{1}{\tau}u_{ch} = 0$ d'où $u_{ch}(t) = Ae^{-t/\tau}$, $A \in \mathbb{R}$.

Sol. part. : $u_{cp}(t) = K \in \mathbb{R}^*$ d'où dans (ED) il vient :

$$\frac{1}{\tau}K = \frac{E}{\tau} \Leftrightarrow u_{cp}(t) = K = E.$$

Finalement : $u_c(t) = E + Ae^{-t/\tau}$.
CI : $u_c(0) = 0 = E + A$ donc $A = -E$

$\Leftrightarrow \underline{u_c(t) = E(1 - e^{-t/\tau})}$



Q14) L'énergie stockée par le condensateur a pour expression : $\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} C u_c^2(t)$

En fin de charge $u_c(t) = E = u_{c,f}$. $(t \to +\infty)$

D'où $\mathcal{E}_{c,f} = \frac{1}{2} C E^2$

Q15) On sait que $i_c = C \frac{du_c}{dt}$ d'où $i_c(t) = C \frac{d}{dt}\left(E(1 - e^{-t/\tau})\right)$

Donc $i_c(t) = CE\left(\frac{d}{dt}(1) - \frac{d}{dt}(e^{-t/\tau})\right)$

$= CE \times \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$ $\Big)$ $\tau = RC$

Donc $i_c(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$

Q16) Le générateur fournit une puissance $P_g(t) = E\, i_c(t)$ à l'instant t.

Ainsi $\mathcal{E}_{g,f} = \int_0^{+\infty} P_g(t)\, dt$ (énergie fournie par le générateur)

$\Leftrightarrow \mathcal{E}_{g,f} = \frac{E^2}{R} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t/\tau}\, dt}_{= \left[-\tau e^{-t/\tau}\right]_0^{+\infty} = -\underbrace{\lim_{t \to +\infty} \tau e^{-t/\tau}}_{=0} + \tau}$

Donc $\mathcal{E}_{g,f} = \frac{\tau E^2}{R} \Leftrightarrow \mathcal{E}_g = CE^2$.

Q17) $\eta = \frac{\mathcal{E}_{c,f}}{\mathcal{E}_{g,f}} \Leftrightarrow \eta = \frac{\frac{1}{2} CE^2}{CE^2} \Leftrightarrow \eta = \frac{1}{2} = 50\,\%$

η est indépendant de R donc le rendement ne peut être amélioré en changeant la résistance R.

II.2) Second procédé de charge

Q18) Pendant la première phase de charge, le condensateur est chargé

par un GBF de fém cste $\frac{E}{2}$. L'ED est quasi identique :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_c = \frac{E}{2\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

D'où $u_c(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{E}{2}$ et $u_c(0) = 0 = A + \frac{E}{2}$ donc $A = -\frac{E}{2}$

et donc $\boxed{u_c(t) = \frac{E}{2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

Q19) Posons $\beta = 0{,}99$. Résolvons $u_c(t_1) = \frac{\beta E}{2}$ ($u_c(t \to +\infty) = u_{cf} = E/2$

$\Leftrightarrow \frac{E}{2}\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right) = \frac{\beta E}{2}$

$\Leftrightarrow 1 - e^{-t_1/\tau} = \beta$

$\Leftrightarrow e^{-t_1/\tau} = 1 - \beta$

$\Leftrightarrow \boxed{t_1 = -\tau \ln(1-\beta)}$ avec $\tau = RC$

Q20) Soit $t \in [t_1; +\infty[$. (2ème charge), avec $u_c(t_1) = \frac{E}{2}$.

L'ED est la même qu'à la Q12) : $\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_c = \frac{E}{\tau}$

d'où $u_c(t) = A e^{-t/\tau} + E$.

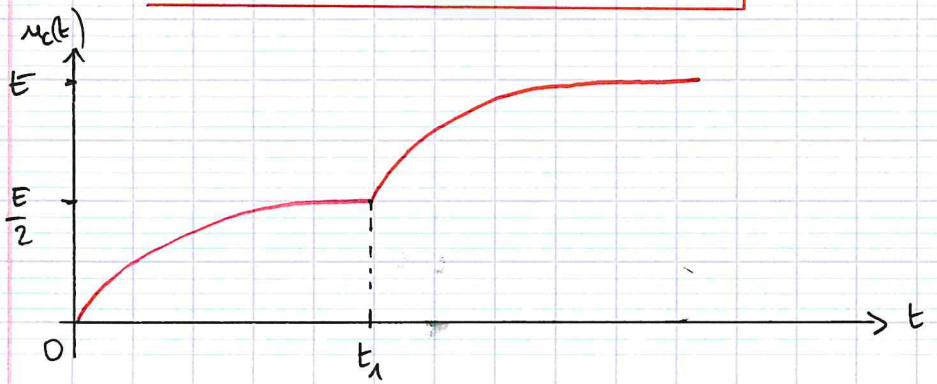
Or $u_c(t_1) = \frac{E}{2} = A e^{-t_1/\tau} + E \Leftrightarrow A e^{-t_1/\tau} = -\frac{E}{2}$

$\Leftrightarrow A = -\frac{E}{2} e^{t_1/\tau}$.

Donc $u_c(t) = E - \frac{E}{2} e^{t_1/\tau} e^{-t/\tau}$.

$\Leftrightarrow \boxed{u_c(t) = E\left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}}\right)}$

Q21)



Q22) Soit $t \in [0; t_1]$: $u_c(t) = \frac{E}{2}(1 - e^{-t/\tau})$.

D'où $i_{c\,①}(t) = C\frac{d}{dt}(u_c(t))$ ⇔ $i_{c\,①}(t) = \frac{E}{2R} e^{-t/\tau}$.

Soit $t \in [t_1, +\infty[$: $u_c(t) = E\left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}}\right)$.

D'où $i_{c\,②}(t) = CE \cdot \frac{1}{2\tau} \exp\left(\frac{-(t-t_1)}{\tau}\right)$

⇔ $i_{c\,②}(t) = \frac{E}{2R} e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}}$. avec $t_1 = -\tau \ln(1-p) \simeq 5\tau$

Q23) $\mathcal{E}_{g,f} = \mathcal{E}_{g,f①} + \mathcal{E}_{g,f②}$

à ne pas faire E ici.

$\mathcal{E}_{g,f①} = \int_0^{t_1} \frac{E\, i_{c①}(t)}{2}\, dt = \frac{E^2}{4R} \int_0^{t_1} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{E^2}{4R} \left[-\tau e^{-t/\tau}\right]_0^{t_1}$

$= \frac{E^2}{4R}\left(\tau - \tau e^{-t_1/\tau}\right)$ or $\frac{t_1}{\tau} \simeq 5$ et $e^{-5} \simeq 0$

D'où $\mathcal{E}_{g,f①} = \frac{\tau E^2}{4R}$ ⇔ $\mathcal{E}_{g,f①} = \frac{1}{4} CE^2$

$\mathcal{E}_{g,f②} = \int_{t_1}^{+\infty} E\, i_{c①}(t)\, dt = \frac{E^2}{2R} e^{t_1/\tau} \int_{t_1}^{+\infty} e^{-t/\tau} dt = \frac{E^2}{2R} e^{t_1/\tau} \left[-\tau e^{-t/\tau}\right]_{t_1}^{+\infty}$

$= \frac{E^2}{2R} e^{t_1/\tau}\left(0 + \tau e^{-t_1/\tau}\right)$

$= \frac{\tau E^2}{2R}$

D'où $\mathcal{E}_{g,f②} = \frac{1}{2} CE^2$

Et donc $\mathcal{E}_{g,f} = \frac{3}{4} CE^2$

Q24) À la fin des deux phases, $u_c(+\infty) = E$ d'où $\mathcal{E}_{c,f} = \frac{1}{2} CE^2$.

Donc $\eta = \frac{\frac{1}{2} CE^2}{\frac{3}{4} CE^2}$ et $\eta = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$ ⇔ $\eta = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$

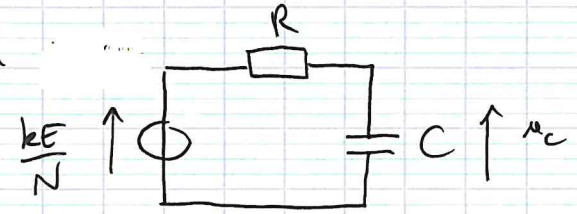
Avantage : meilleur rendement

Désavantage : montage ⊕ complexe et encombrant nécessitant l'utilisation d'1 GBF.

II. 3) Généralisation à une charge en N étapes

Q25) a) Lors de l'étape k de charge, $t \in [t_{k-1}, t_k]$ et le GBF fournit une tension $\frac{kE}{N}$.

D'où



$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_c = \frac{kE}{\tau N}$$

avec $\tau = RC$

Donc $u_c(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{kE}{N}$. Or $u_c(t_{k-1}) = (k-1)\frac{E}{N}$

donc $(k-1)\cdot\frac{E}{N} = Ae^{-t_{k-1}/\tau} + \frac{kE}{N}$

$\Leftrightarrow Ae^{-t_{k-1}/\tau} = \frac{kE}{N} - \frac{E}{N} - \frac{kE}{N}$ $\Leftrightarrow A = -\frac{E}{N} e^{t_{k-1}/\tau}$.

Donc $u_c(t) = -\frac{E}{N} e^{t_k/\tau} e^{-t/\tau} + \frac{kE}{N}$

$\Leftrightarrow u_c(t) = \frac{E}{N}\left(k - e^{-(t-t_{k-1})/\tau}\right)$ expression de u_c à l'étape k de charge

b) $i_c(t) = C\frac{du_c}{dt}(t)$

$\Leftrightarrow i_c(t) = \frac{CE}{N} e^{t_{k-1}/\tau} \cdot \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$

$\Leftrightarrow i_c(t) = \frac{E}{NR} \exp\left(\frac{-(t-t_{k-1})}{\tau}\right)$ expression de i_c à l'étape k de charge.

DLn°3

c) $$\mathcal{E}_{g,f}(k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{kE}{N} \cdot \frac{E}{NR} e^{\frac{-(t-t_{k-1})}{\tau}} dt$$

$$= \frac{kE^2}{N^2R} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-(t-t_{k-1})/\tau} dt$$

$$= \frac{kE^2}{N^2R} e^{t_{k-1}/\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-t/\tau} dt$$

$$= \frac{kE^2}{N^2R} e^{t_{k-1}/\tau} \left[-\tau e^{-t/\tau}\right]_{t_{k-1}}^{t_k}$$

$$= \frac{\tau kE^2}{N^2R} e^{t_{k-1}/\tau} \left(e^{-t_{k-1}/\tau} - e^{-\frac{t_k}{\tau}}\right)$$

$$= \frac{k}{N^2} CE^2 \left(1 - e^{-(t_k - t_{k-1})/\tau}\right)$$

Or $e^{-(t_k - t_{k-1})/\tau} = e^{-(k \times 5\tau - (k-1)\times 5\tau)/\tau} = e^{-5} \simeq 0$

D'où $\boxed{\mathcal{E}_{g,f}(k) = \frac{k}{N^2} CE^2}$.

d) On en déduit que $\mathcal{E}_{g,f} = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{E}_{g,f}(k)$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_{g,f} = \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N^2} CE^2$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_{g,f} = \frac{CE^2}{N^2} \sum_{k=1}^{N} k$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_{g,f} = CE^2 \cdot \frac{N(N+1)}{2N^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{g,f} = \frac{N+1}{2N} \cdot CE^2}$$

e) Comme $\mathcal{E}_{c,f} = \frac{1}{2} C E^2$, on en déduit que :

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_{c,f}}{\mathcal{E}_{g,f}} \Leftrightarrow \eta = \frac{\frac{1}{2} C E^2}{\frac{N+1}{2N} C E^2} \Leftrightarrow \eta = \frac{1}{2} \times \frac{2N}{N+1}$$

Donc $\underline{\eta = \frac{N}{N+1}} \left(\underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \right)$