Corrigé des applications du chapitre E5

Application n° 1 : Module et argument de signaux sinusoïdaux en notation complexe

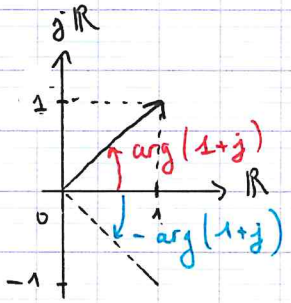
1. $\underline{u}(t) = \underline{U}\, e^{j\omega t}$ avec $\underline{U} = \sqrt{2}\, U_m\, e^{j\pi/4}$.
2. $u(t) = U_m \sin(\omega t) = -U_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ donc $\underline{u}(t) = \underline{U}\, e^{j\omega t}$ avec $\underline{U} = -U_m\, e^{+j\pi/2}$.
3. $u(t) = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -U_m \cos(\omega t + \pi)$ donc $\underline{u}(t) = \underline{U}\, e^{j\omega t}$ avec $\underline{U} = -U_m\, e^{j\pi} = U_m$.
4. $u(t) = U_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = \underline{U}\, e^{j\omega t}$ avec $\underline{U} = U_m\, e^{-j\pi/3}$.

$\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

1. $|\underline{U}| = 1$
   $\arg(\underline{U}) = 0$

2. $|\underline{U}| = 1$
   $\arg(\underline{U}) = \frac{\pi}{2}$

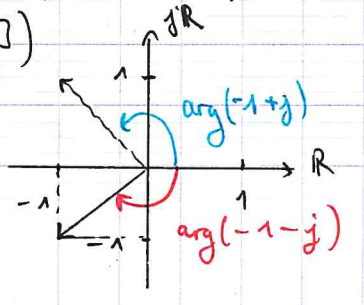
3. $|\underline{U}| = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
   $\arg(\underline{U}) = \arg(1) - \arg(1+j)$
   $= -\arg(1+j)$
   $= -\frac{\pi}{4}$



4. $|\underline{U}| = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1^2+1^2} \Leftrightarrow |\underline{U}| = 1$
   $\arg(\underline{U}) = \arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arg(1+j)$
   $= \arg(1+j)$
   $= \frac{\pi}{4}$

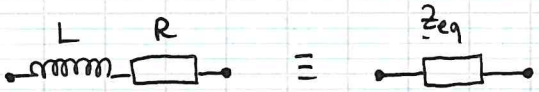
5. $|\underline{U}| = \sqrt{1^2+1^2} \Leftrightarrow |\underline{U}| = \sqrt{2}$
   $\arg(\underline{U}) = \arg(-1-j)$ ... compliqué, voir point méthode qui suit
   $= -\frac{3\pi}{4}$ (dans $]-\pi, \pi]$)

6. $|\underline{U}| = \sqrt{2}$
   $\arg(\underline{U}) = \arg(-1+j)$ ... idem
   $= \frac{3\pi}{4}$.



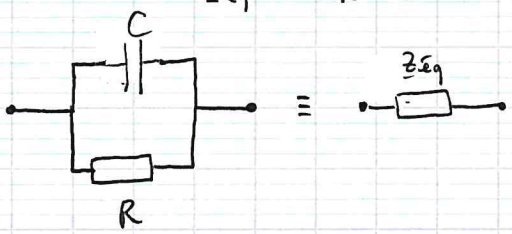
Application n° 2 : Condensateur réel et bobine réelle

Bobine réelle :



L et R sont en série d'où $\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L \Leftrightarrow \underline{Z}_{eq} = R + jL\omega$

Condensateur réel :



C et R sont en // d'où $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_C} \Leftrightarrow \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{jC\omega}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = jC\omega + \frac{1}{R} = \frac{1 + jRC\omega}{R}$ donc $\underline{Z}_{eq} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$

Application n° 3 : Etude du circuit RC série et du circuit RL série en RSF

Q1)

$\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t}$

$\underline{u_c}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_{u_c}}$.

D'après la formule du pont diviseur de tension : $\underline{u_c} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C}\,\underline{e}$

$\Leftrightarrow \underline{u_c} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega}\,\underline{e}$ $\times jC\omega$ et $\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t}$

$\Leftrightarrow \underline{u}_c(t) = \underbrace{\frac{E_0}{1 + jRC\omega}}_{\underline{U}_m} e^{j\omega t}$ donc $\underline{U}_m = \frac{E_0}{1 + jRC\omega}$ avec $\tau = RC$

Q2)

Idem : $\underline{u_L} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R}\,\underline{e} \Leftrightarrow \underline{u_L} = \frac{jL\omega E_0}{R + jL\omega} e^{j\omega t}$

$\Leftrightarrow \underline{u_L} = \frac{E_0}{1 - j/\omega\tau} e^{j\omega t}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$

Application n° 4 : Lecture graphique de Q sur un graphe de résonance en intensité d'un circuit RLC série

À la résonance, I_0 est maximale. Par lecture graphique $\omega_r = 1\,000$ rad.s^{-1} et $I_{0,max} = 10$ mA.

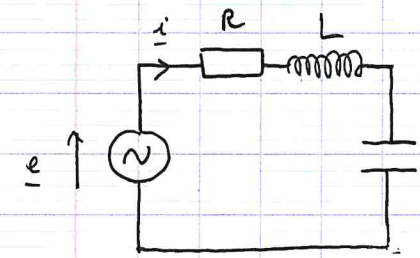
On $\frac{I_{0,max}}{\sqrt{2}} = 7{,}1$ mA $\simeq 7$ mA.

On trace en trait à 7,1 mA et on mesure $\begin{cases} \omega_{c,1} \simeq 810 \text{ rad.s}^{-1} \\ \omega_{c,2} \simeq 1220 \text{ rad.s}^{-1} \end{cases}$

Donc $\Delta\omega = \omega_{c,2} - \omega_{c,1} = 410$ rad.s^{-1}.

Donc $Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} \Leftrightarrow Q = \frac{1000}{410} \Leftrightarrow \boxed{Q = 2{,}4}$

Application n° 5 : Résonance de la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RLC série



- $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$
  donc $\underline{e}(t) = \underline{E}_0 e^{j\omega t}$ avec $\underline{E}_0 = E_0$
- $u_C(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$
  donc $\underline{u}_C(t) = \underline{U}_0 e^{j\omega t}$ avec $\underline{U}_0 = U_0 e^{j\varphi_u}$.

Pont diviseur de tension : $\underline{u}_C = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} \underline{e} \Leftrightarrow \underline{u}_C(t) = \frac{1/jC\omega}{R + jL\omega + 1/jC\omega} E_0 e^{j\omega t}$

Donc $\underline{u}_C(t) = \underbrace{\frac{E_0}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}}_{= \underline{u}_0} e^{j\omega t}$. Posons $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite

Donc $\boxed{\underline{u}_0(x) = \frac{E_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$ avec $\begin{cases} LC\omega^2 = x^2 & (1) \\ RC\omega = \frac{x}{Q} & (2) \end{cases}$

(1) : $LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ (heureusement pour un RLC série !)

E5

(2) : $RC\omega = \frac{\omega}{\omega_0 Q} \Leftrightarrow Q = \frac{1}{RC\omega_0} \Leftrightarrow Q = \frac{1}{R} \times \frac{\sqrt{LC}}{C} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

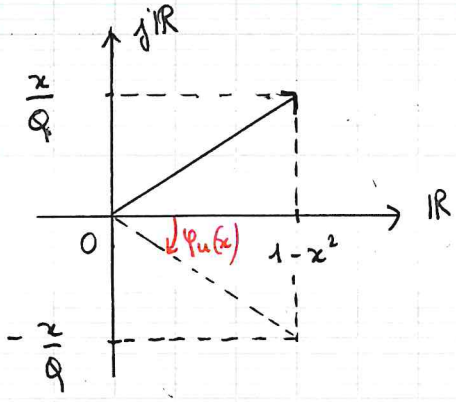
On retrouve bien le facteur de qualité du circuit RLC série.

Q2) $u_0(x) = |\underline{u_0}(x)| \Leftrightarrow \boxed{u_0(x) = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}}$

Q3) $\varphi_u(x) = \arg(\underline{u_0}(x)) = \overbrace{\arg(E_0)}^{=0 \text{ car } E_0 \in \mathbb{R}_+^*} - \arg\left(1 - x^2 + j\frac{x}{Q}\right)$

$\Leftrightarrow \varphi_u(x) = -\arg\left(1 - x^2 + j\frac{x}{Q}\right)$.

Cas n° 1 : si $x < 1$ $(1 - x^2 > 0)$



$\varphi_u(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ donc

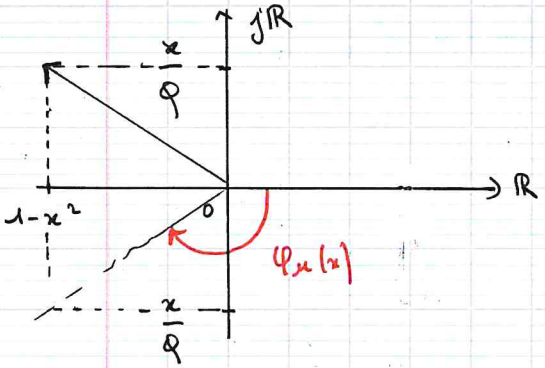
$\varphi_u(x) = \text{Arctan}\left(\tan(\varphi_u(x))\right)$.

$\tan(\varphi_u(x)) = \frac{-x/Q}{1-x^2} = \frac{-x}{Q(1-x^2)}$

Donc $\varphi_u(x) = \text{Arctan}\left(\frac{-x}{Q(1-x^2)}\right)$

Et donc finalement : $\boxed{\varphi_u(x) = -\text{Arctan}\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right)}$ $(x < 1)$

Cas n° 2 : si $x > 1$ $(1 - x^2 < 0)$



$\varphi_u(x) \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$.

On ne peut pas écrire $\varphi_u(x) = \text{Arctan}\left(\tan(\varphi_u(x))\right)$ car dans ce cas $\varphi_u(x) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ ce qui n'est pas le cas ici.

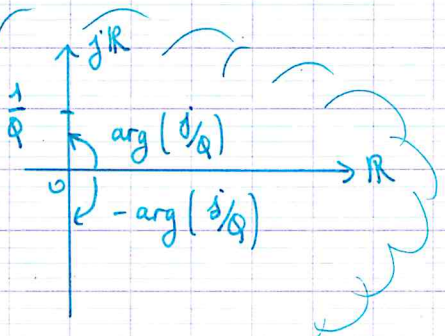
Donc, on écrit $\varphi_u(x) = \text{Arctan}\left(\tan(\varphi_u(x))\right) - \pi$

et donc $\boxed{\varphi_u(x) = -\pi - \text{Arctan}\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right)}$ $(x > 1)$

Pour conclure :

$$\varphi_u(x) = \begin{cases} -\text{Arctan}\left(\dfrac{x}{Q(1-x^2)}\right) & \text{si } x < 1 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 1 \\ -\pi - \text{Arctan}\left(\dfrac{x}{Q(1-x^2)}\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$\varphi_u(1) = -\arg\left(\frac{j}{Q}\right) = -\frac{\pi}{2}$



Q4) $u_0(x) = \dfrac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} = \dfrac{E_0}{\sqrt{f(x)}}$

avec $f : x \mapsto (1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{2x}{Q^2} + 2(1-x^2)(-2x)$

$\Leftrightarrow f'(x) = \underbrace{2x}_{\geq 0}\left(\dfrac{1}{Q^2} - 2(1-x^2)\right)$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{Q^2} - 2(1-x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 2(1-x^2) \leq \dfrac{1}{Q^2}$

$\Leftrightarrow 1 - x^2 \leq \dfrac{1}{2Q^2}$

$\Leftrightarrow x^2 \geq 1 - \dfrac{1}{2Q^2}$ ⚠ > 0

Il faut nécessairement que $1 - \dfrac{1}{2Q^2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2Q^2} < 1$

$\Leftrightarrow Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

condition de résonance.

Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors on a $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

$f'(x)$ change de signe

x	0	$\sqrt{1 - 1/2Q^2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$ 0 $+$	
Variats de f		↘	↗

Rq : Si $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 - \frac{1}{2Q^2} \leq 0$ donc $x^2 \geq 1 - \frac{1}{2Q^2}$ dans tous les cas donc $f'(x) \geq 0$

↳ u_C est

$$f\left(\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}\right) = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}$$

$$= \frac{1}{4Q^4} - \frac{2}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2}$$

$$= \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}.$$

Ainsi, il y a résonance pour $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

donc $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ pulsation de résonance

Q5) Ainsi $U_{0,max} = \frac{E_0}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}}} \underset{Q \gg 1}{\simeq} \frac{E_0}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}}}$

Donc $U_{0,max} \underset{Q \gg 1}{\simeq} Q E_0$.

Q6) Si R est très faible alors $Q \gg 1$ et donc $U_{0,max} \propto Q$ devient rapidement très élevé, ce qui a pour risque d'endommager le condensateur et/ou d'autres composants du circuit.