Chapitre E5 : Régime sinusoïdal forcé en électrocinétique

Plan du cours

I. Utilisation des nombres complexes en électrocinétique 2
- I. 1 - Écriture d'un nombre complexe en sciences physiques . . . 3
- I. 2 - Notation complexe d'un signal sinusoïdal . . . 4
- I. 3 - Propriétés de dérivation et d'intégration . . . 6

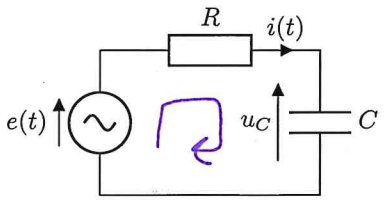
II. Électrocinétique en RSF 7
- II. 1 - Retour à l'étude du circuit RC série en RSF présenté en introduction . . . 7
- II. 2 - Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux . . . 8
- II. 3 - Impédance complexe . . . 9
- II. 4 - Association d'impédances complexes en RSF . . . 10
- II. 5 - Ponts diviseurs en RSF . . . 12

III. Étude du circuit RLC série en RSF, phénomène de résonance 13
- III. 1 - Résonance en intensité du circuit RLC série . . . 13
- III. 2 - Bande passante, pulsation de coupure . . . 16
- III. 3 - Détermination de ω_0 et Q par lecture graphique . . . 18
- III. 4 - Résonance en tension du circuit RLC série . . . 19

Introduction

▷ Le chapitre précédent traitait du régime transitoire des circuits évoluant librement après une perturbation ponctuelle, telle qu'une marche de tension provenant d'un GBF. Ce chapitre aborde le régime sinusoïdal forcé (RSF). « Forcé » s'oppose à « libre » : le générateur envoie désormais une tension sinusoïdale de pulsation ω. On peut montrer que ce type d'excitation force toutes les grandeurs du circuit (i, u_C, u_L...) à être également sinusoïdales, de même fréquence que le générateur. Nous allons voir dans ce chapitre que lorsque certaines conditions d'excitation sont réunies, un phénomène de résonance peut avoir lieu. À la résonance, l'amplitude des grandeurs du circuit peuvent connaître une croissance spectaculaire. Nous allons également voir qu'on peut donner un nouveau sens au facteur de qualité : Q caractérise l'acuité de la résonance.

On considère un circuit RC série alimenté par un GBF de tension sinusoïdale e telle que $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.



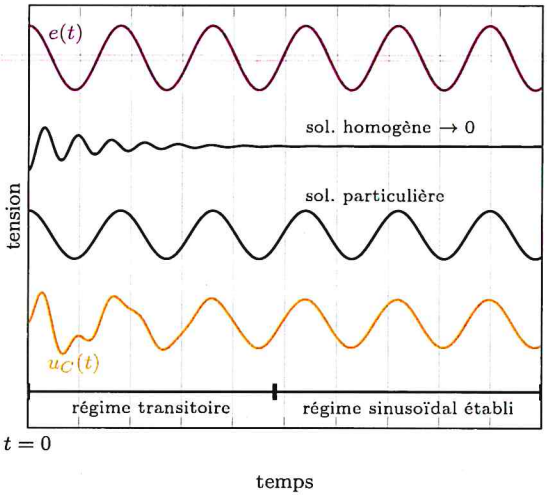
LDM : $E = u_R + u_C \Leftrightarrow e = RC\frac{du_C}{dt} + u_C$ Donc $\frac{du_C}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}u_C(t) = \frac{E_0}{\tau}\cos(\omega t)$

avec $\tau = RC$

On remarque la présence d'un second membre sinusoïdal : il caractérise l'excitation imposée par l'expérimentateur, le **forçage**.
L'équation homogène associée admet pour solution (voir chapitre E1) : $u_{C,h}(t) = Ae^{-t/\tau}$ où $A \in \mathbb{R}$.
En revanche, la solution particulière n'est plus une constante. En fait, la solution particulière **prend la forme du second membre**. On prend donc une fonction sinusoïdale la plus générale possible :

La solution générale se met sous la forme :

$$u_C(t) = \underbrace{Ae^{-t/\tau}}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{U_m \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{régime sinusoïdal permanent}}$$



Lorsque $t \gtrsim 5\tau$, le régime permanent s'établit et on a : $u_C(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ avec $U_m \neq 0$ et $\varphi \neq 0$!

Définition n°1 : Régime sinusoïdal forcé (RSF)

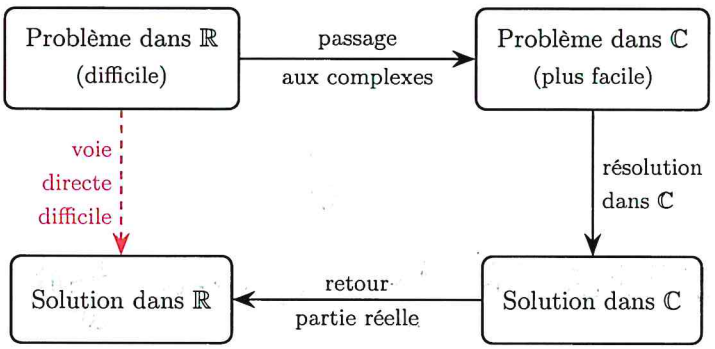
▷ Le régime sinusoïdal forcé (RSF) correspond au régime permanent d'un système physique soumis à une excitation sinusoïdale. Ce régime est toujours établi après la disparition d'un régime transitoire.

Problématique :

Comment déterminer intégralement ce régime sinusoïdal forcé (i.e U_m et φ) ? Quelles conséquences cela peut-il avoir sur un oscillateur électrique ?

I. Utilisation des nombres complexes en électrocinétique

▷ Afin de déterminer U_m et φ, il est judicieux de quitter un instant le corps des réels et basculer dans le corps des complexes paradoxalement, les calculs y sont plus aisés pour résoudre ce genre de problème.



I. 1 - Écriture d'un nombre complexe en sciences physiques

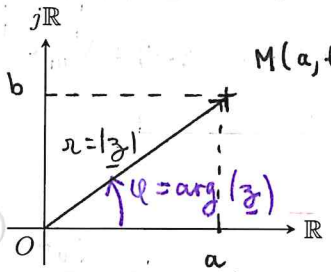
Définition n°2 : Forme algébrique d'un nombre complexe

▷ Soit $\underline{z} \in \mathbb{C}$. La forme algébrique de $\underline{z}$ est :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \underline{z} = a + jb \text{ tel que } j^2 = -1,$$

où $a = \text{Re}(\underline{z})$ désigne la **partie réelle** de $\underline{z}$, $b = \text{Im}(\underline{z})$ désigne la **partie imaginaire** de $\underline{z}$.
NB : On n'utilise pas i mais j, cette lettre étant réservée pour l'intensité du courant électrique.
Le conjugué de $\underline{z}$ se note $\underline{z}^*$ avec $\underline{z}^* = a - jb$.

Représentons $\underline{z}$ dans le plan complexe.



M(a,b) est l'image de $\underline{z}$ dans le plan complexe.

On se rend compte que l'on peut paramétrer $\underline{z}$ à l'aide de la "longueur" de la flèche et de l'angle qu'elle fait avec l'axe des abscisses.

Définition n°3 : Module et argument d'un nombre complexe

▷ Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit M le point d'affixe $\underline{z}$ et $\overrightarrow{OM}$ le vecteur associé.

— Le **module** de $\underline{z}$ est le réel $r \geq 0$ défini par $r = \|\overrightarrow{OM}\|$. On le note $|\underline{z}|$.

— Si $\underline{z} \neq 0$, l'**argument** de $\underline{z}$ est une mesure (définie modulo 2π) de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. On le note $\arg(\underline{z})$.

Représentons ces deux grandeurs sur le schéma ci-dessus. Ainsi, on se rend compte :

$\cos(\varphi) = \frac{a}{r} \Leftrightarrow a = r\cos(\varphi) \Leftrightarrow a = |\underline{z}|\cos(\arg(\underline{z}))$

$\sin(\varphi) = \frac{b}{r} \Leftrightarrow b = r\sin(\varphi) \Leftrightarrow b = |\underline{z}|\sin(\arg(\underline{z}))$

On en déduit la forme trigonométrique de $\underline{z}$.

Définition n°4 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe

▷ Soit $\underline{z} \in \mathbb{C}$. La forme trigonométrique de $\underline{z}$ est :

$$\exists (r,\varphi) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \ / \ \underline{z} = r(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))$$

$r = |\underline{z}|$: module de $\underline{z}$

$\varphi = \arg(\underline{z})$: argument de $\underline{z}$.

D'après la formule d'Euler : $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$

Définition n°5 : Forme exponentielle d'un nombre complexe

▷ Soit $\underline{z} \in \mathbb{C}$: La forme exponentielle de $\underline{z}$ est :

$$\exists (r,\varphi) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \ / \ \underline{z} = re^{j\varphi} = |\underline{z}|e^{j\arg(\underline{z})}$$

Propriété n°1 : Règles de calcul sur $|\underline{z}|$ et $\arg(\underline{z})$

▷ Soit $\underline{z} = a + jb \in \mathbb{C}$ avec $r = |\underline{z}|$ et $\varphi = \arg(\underline{z})$. Soient $(\underline{z}_1, \underline{z}_2) \in \mathbb{C}^2$.

- $r = |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- $|\underline{z}_1 \times \underline{z}_2| = |\underline{z}_1| \times |\underline{z}_2|$;
- $\left|\dfrac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right| = \dfrac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}$;
- $\tan(\varphi) = \tan(\arg(\underline{z})) = \dfrac{b}{a}$;
- $\arg(\underline{z}_1 \times \underline{z}_2) = \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2)$;
- $\arg\left(\dfrac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right) = \arg(\underline{z}_1) - \arg(\underline{z}_2)$.

I. 2 - Notation complexe d'un signal sinusoïdal

Soit $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ un signal sinusoïdal quelconque. On remarque immédiatement que $u(t)$ est la partie réelle du nombre complexe $\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi)}$.

En effet : $\mathrm{Re}(\underline{u}(t)) = \mathrm{Re}\left(U_m e^{j(\omega t+\varphi)}\right)$

$= \mathrm{Re}\left(U_m (\cos(\omega t+\varphi) + j\sin(\omega t+\varphi))\right)$

$= U_m \cos(\omega t + \varphi)$

Donc $\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t+\varphi)} = U_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ donc $\underline{u}(t) = \underline{U} e^{j\omega t}$ avec $\underline{U} = U_m e^{j\varphi}$

Propriété n°2 : Notation complexe d'un signal sinusoïdal quelconque

▷ Soit $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. La notation complexe de $u(t)$ s'écrit : $\underline{u}(t) = \underline{U} e^{j\omega t}$.

où $\underline{U} = U_m e^{j\varphi}$ désigne l'amplitude complexe de $\underline{u}$. TOUTES LES INFOS UTILES SUR U_m ET φ SONT CONTENUES DANS $\underline{U}$!!! $\begin{cases} U_m = |\underline{U}| \\ \varphi = \arg(\underline{U}) \end{cases}$

Application n°1 : Module et argument de signaux sinusoïdaux en notation complexe

Pour les signaux ci-dessous, déterminer leur notation complexe. Vous préciserez bien l'amplitude complexe.

1. $u(t) = \sqrt{2}\, u_m \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
2. $u(t) = u_m \sin(\omega t)$.
3. $u(t) = u_m \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$.
4. $u(t) = u_m \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Déterminer les modules et les arguments des amplitudes complexes ci-dessous.

1. $\underline{U} = 1$.
2. $\underline{U} = j$.
3. $\underline{U} = \dfrac{1}{1+j}$.
4. $\underline{U} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$.
5. $\underline{U} = -1 - j$.
6. $\underline{U} = -1 + j$.

Méthode : Déterminer φ lorsque $a > 0$

▷ Soit $\underline{z} = a + jb$ avec $a > 0$. On considère que $\varphi \in]-\pi, \pi[$.

1. Représenter $\underline{z}$ dans le plan complexe.
2. Calculer $\cos(\varphi)$: ici, $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} > 0$. On en déduit que $\varphi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
3. Calculer $\tan(\varphi)$: ici $\tan(\varphi) = \dfrac{b}{a}$. On peut prendre arctan car $\varphi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\right[$ qui correspond bien au domaine d'arrivée de la fonction arctan. Finalement, $\boxed{\varphi = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)}$.

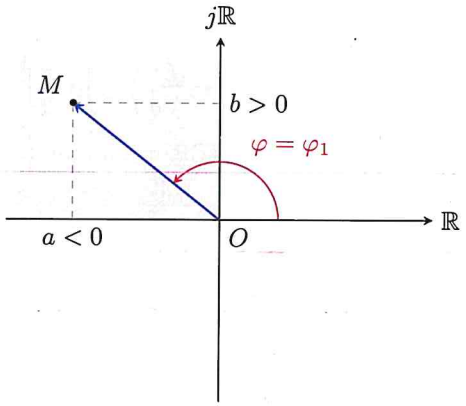
Attention !

▷ Comme observé aux points 5. et 6. de l'application n°1, on se rend compte qu'on ne peut pas toujours écrire $\tan(\varphi) = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$. Il suffit que $a < 0$ pour que cela ne fonctionne pas.

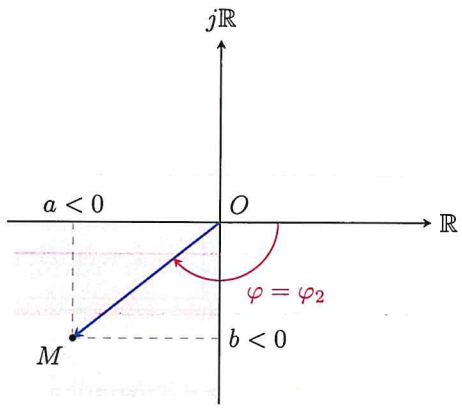
Méthode : Déterminer φ lorsque $a < 0$

▷ Soit $\underline{z} = a + jb \in \mathbb{C}$ avec $a < 0$. On considère que $\varphi \in]-\pi, \pi[$.

1. Représenter $\underline{z}$ dans le plan complexe.



Cas n°1 : $b > 0$

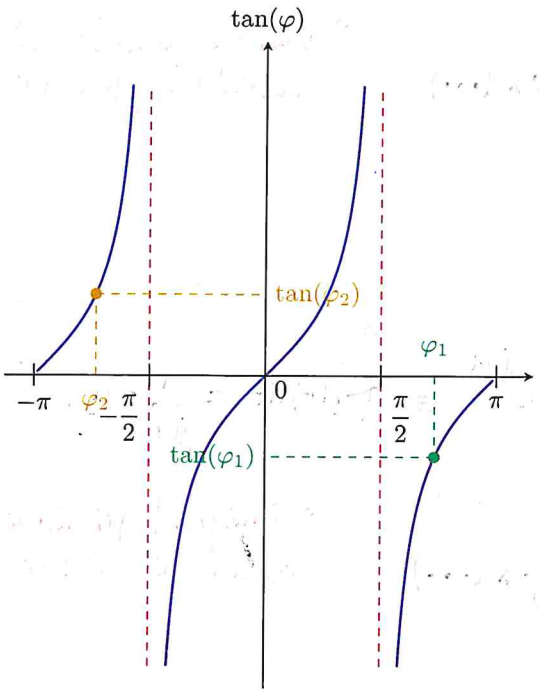


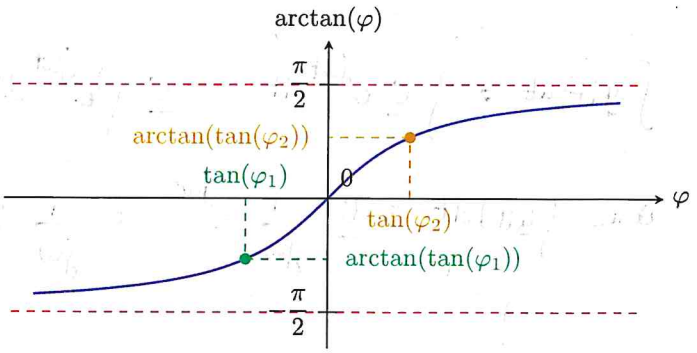
Cas n°2 : $b < 0$

2. Calculer $\cos(\varphi)$: ici, $\cos(\varphi) = \cos(\pi - \varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} < 0$: on en déduit que $\varphi \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ ou $\varphi \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Cela pose problème, on ne peut pas prendre arctan de $\tan(\varphi)$ pour obtenir φ car la fonction arctan renvoie un réel nécessairement compris dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   Pour rappel, arctan est la **bijection réciproque** de la fonction tan restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

3. Calculer $\tan(\varphi)$: ici, $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$. Ne pas hésiter à tracer tan et arctan pour bien visualiser ce que vous faites.





Si $b > 0$ ($\varphi = \varphi_1$) :

Dans ce premier cas, $\tan(\varphi_1) < 0$. On en déduit que $\varphi_1 \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Cependant, du fait de son ensemble d'arrivée, $\arctan(\tan(\varphi_1)) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ car $\tan(\varphi_1) < 0$.

Pour que φ_1 soit dans son bon intervalle, il faut donc **RAJOUTER** π à $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$. Finalement :

$$\text{Si } a < 0 \text{ et } b > 0, \text{ alors } \tan(\varphi_1) = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi_1 = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$$

Si $b < 0$ ($\varphi = \varphi_2$) :

Dans ce deuxième cas, $\tan(\varphi_2) > 0$. On en déduit que $\varphi_2 \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$.

Cependant, du fait de son ensemble d'arrivée, $\arctan(\tan(\varphi_2)) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ car $\tan(\varphi_2) > 0$.

Pour que φ_2 soit dans son bon intervalle, il faut donc **RETRANCHER** π à $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$. Finalement :

$$\text{Si } a < 0 \text{ et } b < 0, \text{ alors } \tan(\varphi_2) = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$$

I. 3 - Propriétés de dérivation et d'intégration

▷ Considérons toujours le signal complexe $\underline{u}(t) = \underline{U}e^{j\omega t}$ où $\underline{U} = U_m e^{j\omega t}$ associé au signal sinusoïdal $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. Dérivons $\underline{u}$ par rapport au temps :

$\frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\underline{U}e^{j\omega t}\right) = \underline{U}\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right)$

Donc $\frac{d\underline{u}}{dt} = j\omega \underline{U} e^{j\omega t} \Leftrightarrow \frac{d\underline{u}}{dt} = j\omega \cdot \underline{u}$

Propriété n°3 : Dériver un signal sinusoïdal en notation complexe

$$\frac{d}{dt}(\dots) \leftrightarrow j\omega \times (\dots)$$

"Dériver revient à multiplier par $j\omega$"

Déterminons à présent une primitive de $\underline{u}$.

$\int \underline{u}(t)\,dt = \int \underline{U} e^{j\omega t}\,dt = \underline{U}\int e^{j\omega t}\,dt$

Donc $\int \underline{u}(t)\,dt = \underline{U}\frac{1}{j\omega}e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega}\underline{U}e^{j\omega t} \Leftrightarrow \int \underline{u}(t)\,dt = \frac{1}{j\omega}\cdot\underline{u}$

Propriété n°4 : Primitiver un signal sinusoïdal en notation complexe

$$\int(\dots)\,dt \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \times (\dots)$$

"Intégrer / primitiver revient à diviser par $j\omega$".

II. Électrocinétique en RSF

II. 1 - Retour à l'étude du circuit RC série en RSF présenté en introduction

▷ Nous avions établi en introduction l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur lorsque le circuit est alimenté par un GBF fournissant une tension $e(t) = E_0\cos(\omega t)$:

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{\tau}u_C(t) = \frac{E_0}{\tau}\cos(\omega t) \text{ où } \tau = RC. \quad (ED)$$

Après avoir attendu la fin du régime transitoire, on obtient en RSF $u_C(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi)$. Mettons en application les outils qui ont été détaillés en I.2 et I.3.
En notation complexe, il vient $\underline{u_C}(t) = \underline{U_m}e^{j\omega t}$ où $\underline{U_m} = U_m e^{j\varphi}$.

> **Remarque**
> ▷ $\cos(\omega t)$ a pour notation complexe $e^{j\omega t}$.

La tension aux bornes du condensateur u_C étant solution de l'équation différentielle, $\underline{u_C}$ l'est aussi (par linéarité) :

$\underline{u_C}$ solution de (ED) $\Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}\underline{u_C}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}\underline{u_C} = \dfrac{E_0}{\tau}e^{j\omega t}$

$\Leftrightarrow j\omega\underline{u_C} + \dfrac{1}{\tau}\underline{u_C} = \dfrac{E_0}{\tau}e^{j\omega t}$

$\Leftrightarrow j\omega\underline{U_m}e^{j\omega t} + \dfrac{1}{\tau}\underline{U_m}e^{j\omega t} = \dfrac{E_0}{\tau}e^{j\omega t}$

$\Leftrightarrow \underline{U_m}\left(\dfrac{1}{\tau} + j\omega\right) = \dfrac{E_0}{\tau} \quad \times\tau \quad \Leftrightarrow \underline{U_m} = \dfrac{E_0}{1+j\omega\tau}$

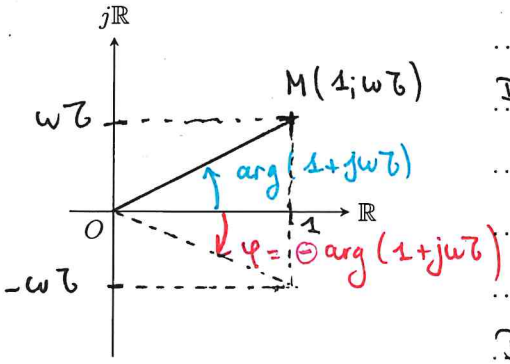
D'après les propriétés de l'amplitude complexe :

$$\begin{cases} U_m = |\underline{U_m}| = \dfrac{E_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \\ \varphi = \arg(\underline{U_m}) = \arg\left(\dfrac{E_0}{1+j\omega\tau}\right) \end{cases}$$

$= 0$ car $E_0 \in \mathbb{R}_+^*$

Donc $\varphi = \arg(E_0) - \arg(1+j\omega\tau)$

$\Leftrightarrow \varphi = -\arg(1+j\omega\tau)$



Dans le plan complexe, il vient :
$\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ce qui correspond bien au domaine d'arrivée de la fonction Arctan.
→ On a bien $\mathrm{Arctan}(\tan(\varphi)) = \varphi$

D'où $\tan(\varphi) = \dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} \Leftrightarrow \tan(\varphi) = -\dfrac{\omega\tau}{1} = -\omega\tau$

Donc $\varphi = \mathrm{Arctan}(-\omega\tau) \Leftrightarrow \varphi = -\mathrm{Arctan}(\omega\tau)$ car $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$ est impaire

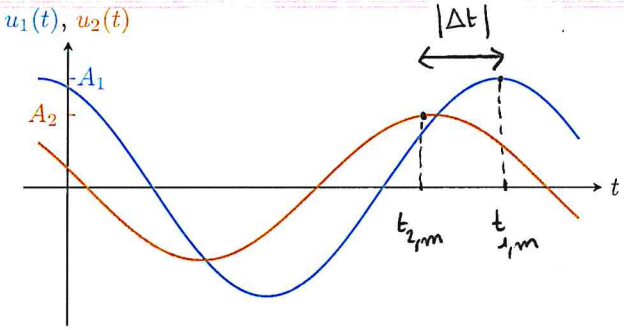
Finalement : $u(t) = \mathrm{Re}(\underline{u}(t)) = U_m\cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow u(t) = \dfrac{E_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\cos(\omega t - \mathrm{Arctan}(\omega\tau))$

avec $\tau = RC$

II. 2 - Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux

Propriété n°5 : Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux

Soient u_1 et u_2 deux signaux de même pulsation tq : $\begin{cases} u_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ u_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$



⇔ Si, $\Delta\varphi_{2/1} > 0$: le signal u_2 est en avance de phase par rapport au signal 1 : le max. de u_2 est atteint avant le max de u_1.

On définit le déphasage du signal 2 par rapport au signal 1 comme :

$$\boxed{\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1}$$

et on a : $\boxed{|\Delta\varphi_{2/1}| = \frac{2\pi}{T}|\Delta t|}$ avec $|\Delta t|$ la valeur absolue de l'écart temporel entre deux extrêma consécutifs de même nature ($\Delta t = t_{2,m} - t_{1,m}$)

- Si $\Delta\varphi_{2/1} > 0$, alors u_2 est en avance de phase par rapport à u_1
- Si $\Delta\varphi_{2/1} < 0$, alors u_2 est en retard de phase par rapport à u_1

} se déduit graphiquement

Démonstration :

u_1 et u_2 atteignent des maximum lorsque $\begin{cases} \omega t_{1,max} + \varphi_1 = 2k\pi, & k \in \mathbb{N} \\ \omega t_{2,max} + \varphi_2 = 2k\pi, & k \in \mathbb{N} \end{cases}$

Ainsi $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega t_{2,max} - 2k\pi - (\omega t_{1,max} - 2k\pi)$

$\Leftrightarrow \Delta\varphi = \omega(t_{2,max} - t_{1,max})$

Donc $|\Delta\varphi| = \omega\,|t_{2,max} - t_{1,max}|$

$\Leftrightarrow |\Delta\varphi| = \omega \cdot |\Delta t|$) $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\Leftrightarrow \boxed{|\Delta\varphi| = \frac{2\pi}{T}|\Delta t|}$

■

Pour le circuit RC de l'introduction : $\begin{cases} e(t) = E_0 \cos(\omega t) \\ u_c(t) = \dfrac{E_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \cos(\omega t - \text{Arctan}(\omega\tau)) \end{cases}$

donc $\Delta\varphi_{u_c/e} = -\text{Arctan}(\omega\tau) < 0$ donc u_c est en retard de phase par rapport à e.

II. 3 - Impédance complexe

Définition n°6 : Impédance complexe

▷ Un appelle impédance complexe d'un dipôle passif la grandeur complexe $\underline{Z}$ définie en convention récepteur par :

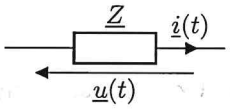
$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\underline{U}e^{j\omega t}}{\underline{I}e^{j\omega t}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

avec :

— $\underline{u}$, le signal complexe associé à $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi_u)$, tension aux bornes du dipôle passif ;

— $\underline{i}$, le signal complexe associé à $i(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i)$, intensité qui traverse le dipôle, sinusoïdal de même pulsation que la tension.

On a donc une loi d'OHM complexe en convention récepteur : $\underline{u} = \underline{Z} \times \underline{i}$

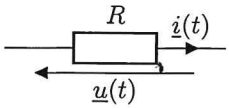


Remarque

▷ On peut également définir l'admittance complexe comme $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$.

Déterminons les impédances complexes des dipôles passifs usuels étudiés depuis le chapitre E1, à savoir le résistor de résistance R, le condensateur de capacité C et la bobine d'inductance L.

Impédance complexe de la résistance



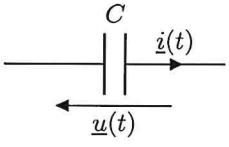
Notons $\underline{Z}_R$ l'impédance complexe de la résistance

D'après la loi d'Ohm : $\underline{u} = R\underline{i}$ d'où $R = \dfrac{\underline{u}}{\underline{i}}$

Par définition de l'impédance complexe, $\underline{Z}_R = \dfrac{\underline{u}}{\underline{i}}$

D'où l'on déduit $\boxed{\underline{Z}_R = R}$

Impédance complexe du condensateur



Notons $\underline{Z}_C$ l'impédance complexe du condensateur. D'après la relation intensité | tension du condensateur : $\underline{i} = C\dfrac{d\underline{u}}{dt} \Leftrightarrow \underline{i} = C.j\omega\underline{u}$

Par définition de l'impédance complexe, $\underline{Z}_C = \dfrac{\underline{u}}{\underline{i}}$

On a $\underline{i} = jC\omega\underline{u} \Leftrightarrow \dfrac{\underline{u}}{\underline{i}} = \dfrac{1}{jC\omega}$ Donc $\boxed{\underline{Z}_C = \dfrac{1}{jC\omega}}$

Propriété n°6 : Comportement à basse fréquence (BF) et haute fréquence (HF) du condensateur

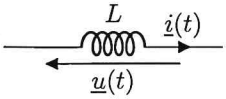
À BF, $|\underline{Z}_c(\omega)| = \frac{1}{C\omega} \xrightarrow[\omega \to 0]{} +\infty$ donc $\underset{C}{\dashv\vdash} \leftrightarrow$ interrupteur ouvert

(résistance infinie ⇔ circuit ouvert)

À HF, $|\underline{Z}_c(\omega)| = \frac{1}{C\omega} \xrightarrow[\omega \to +\infty]{} 0$ donc $\underset{C}{\dashv\vdash} \leftrightarrow$ fil

(résistance nulle ⇔ fil)

Impédance complexe de la bobine



Notons $\underline{Z}_L$ l'impédance complexe de la bobine. D'après la relation intensité/tension de la bobine, $\underline{u} = L\frac{d\underline{i}}{dt} \Leftrightarrow \underline{u} = Lj\omega\underline{i}$

Par définition de l'impédance complexe : $\underline{Z}_L = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$

D'où $\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = Lj\omega$ donc ** $\boxed{\underline{Z}_L = jL\omega}$

Propriété n°7 : Comportement à basse fréquence (BF) et haute fréquence (HF) de la bobine

À BF, $|Z_L(\omega)| = L\omega \xrightarrow[\omega \to 0]{} 0$ donc $\overset{L}{\text{mmm}} \leftrightarrow$ fil

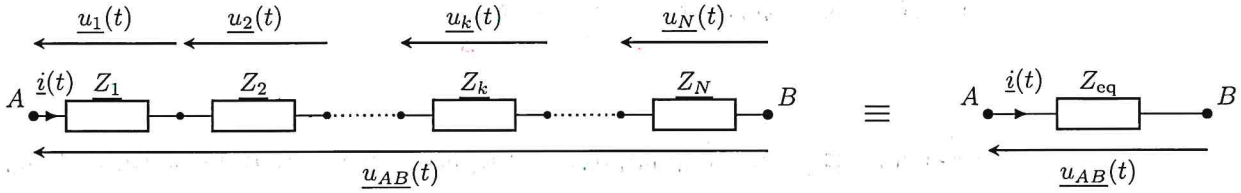
À HF, $|Z_L(\omega)| = L\omega \xrightarrow[\omega \to +\infty]{} +\infty$ donc $\overset{L}{\text{mmm}} \leftrightarrow$ interrupteur ouvert

II. 4 - Association d'impédances complexes en RSF

▷ Pour rappel, dans le chapitre E1, on avait énoncé que les lois de KIRCHHOFF étaient valables en régime variable. Ainsi, les associations d'impédances complexes en RSF sont totalement analogues aux associations de résistance en régime continu. Rappelons tout de même ces résultats (en revanche pas les démonstrations, car elles sont totalement analogues à celles qui ont été écrites dans le chapitre E1).

Propriété n°8 : Impédance complexe équivalente à une association d'impédances complexes en série

▷ Considérons une association de N impédances complexes placées en série sur une même branche. Ces impédances complexes sont parcourues par un courant électrique d'intensité complexe $\underline{i}(t)$. On peut montrer que ce montage est équivalent à une impédance complexe que l'on notera $\underline{Z}_{\text{eq}}$.

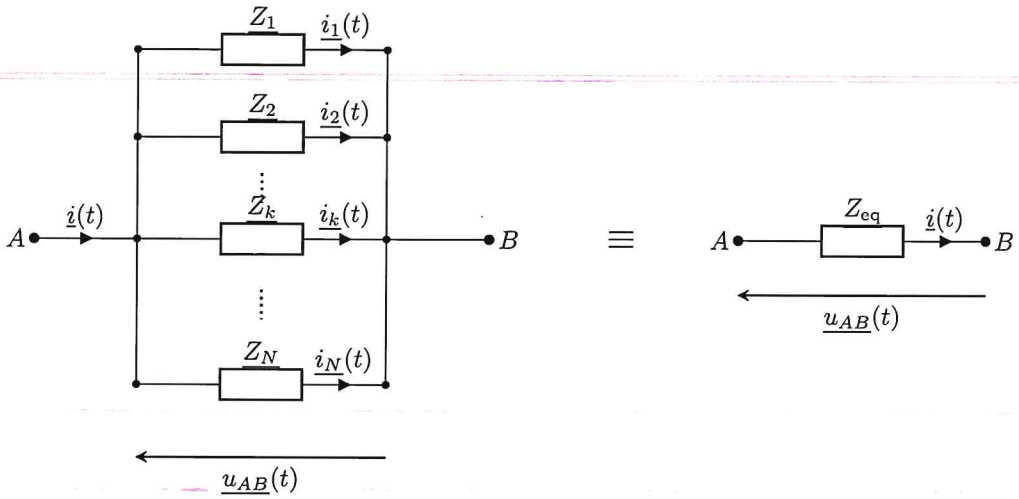


Pour un tel montage, on a :

** $$\boxed{\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^{N} \underline{Z}_k}$$

Propriété n°9 : Impédance complexe équivalente à une association d'impédances complexes en parallèle

▷ Considérons une association de N impédances complexes placées en parallèle. Ces résistances sont soumises à une même tension $\underline{u_{AB}}(t)$. On peut montrer que ce montage est équivalent à une résistance que l'on notera $\underline{Z_{\text{eq}}}$.



Pour un tel montage, on a :

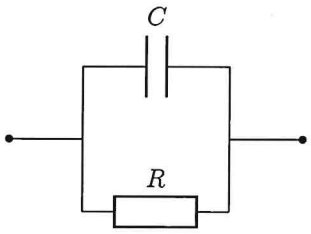
$$\boxed{\frac{1}{\underline{Z_{\text{eq}}}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\underline{Z_k}}}.$$

On peut également réécrire ce résultat à l'aide d'admittances complexes :

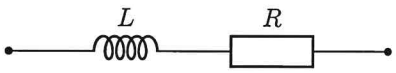
$$\boxed{\underline{Y_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^{N} \underline{Y_k}}.$$

Application n°2 : Condensateur réel et bobine réelle

Question : Déterminer l'impédance complexe équivalente des deux circuits ci-dessous.



Modélisation d'un condensateur réel



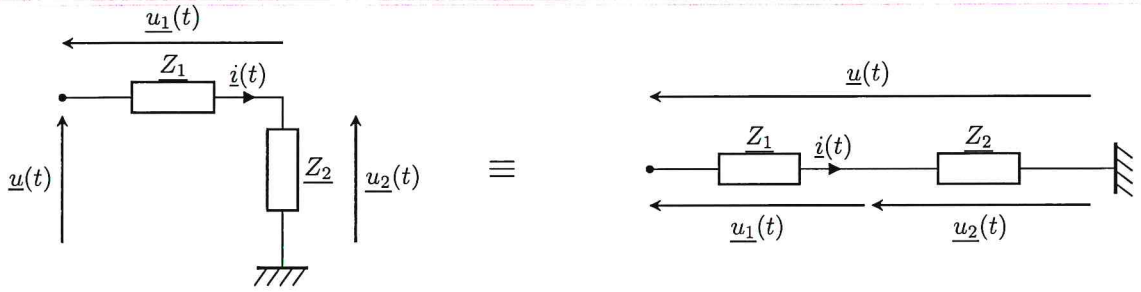
Modélisation d'une bobine réelle

II. 5 - Ponts diviseurs en RSF

▷ Encore une fois, tout se traite de façon analogue au régime libre.

Propriété n°10 : Pont diviseur de tension en RSF

▷ Pour des impédances complexes placées en série et traversées par un **MÊME COURANT** $\underline{i}(t)$:

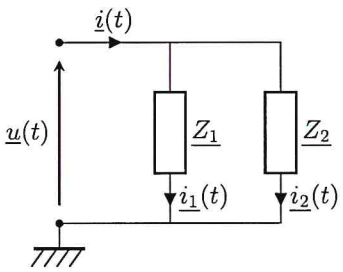


Ainsi il vient :

$$\boxed{\underline{u_1}(t) = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\underline{u}(t)} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{u_2}(t) = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\underline{u}(t)}$$

Propriété n°11 : Pont diviseur de courant

▷ Pour des impédances complexes placées en parallèle et soumises à la **MÊME TENSION** $\underline{u}(t)$:

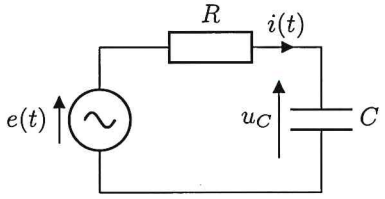


Ainsi il vient :

$$\boxed{\underline{i_1}(t) = \frac{1/\underline{Z_1}}{1/\underline{Z_1}+1/\underline{Z_2}}\underline{i}(t) \Leftrightarrow \underline{i_1}(t) = \frac{\underline{Y_1}}{\underline{Y_1}+\underline{Y_2}}\underline{i}(t)} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{i_2}(t) = \frac{1/\underline{Z_2}}{1/\underline{Z_1}+1/\underline{Z_2}}\underline{i}(t) \Leftrightarrow \underline{i_2}(t) = \frac{\underline{Y_2}}{\underline{Y_1}+\underline{Y_2}}\underline{i}(t)}$$

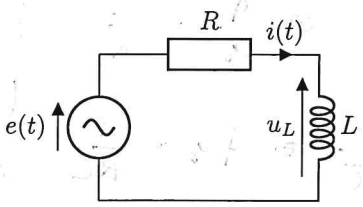
Application n°3 : Étude du circuit RC série et du circuit RL série en RSF

▷ On considère le circuit RC série de l'introduction alimenté par un GBF de tension sinusoïdale e telle que $e(t) = E_0\cos(\omega t)$.



Q 1. À l'aide de la propriété du pont diviseur de tension, montrer que l'amplitude complexe du signal complexe $\underline{u_C}$ a pour expression : $\underline{U_m} = \dfrac{E_0}{1+j\omega\tau}$ où $\tau = RC$.

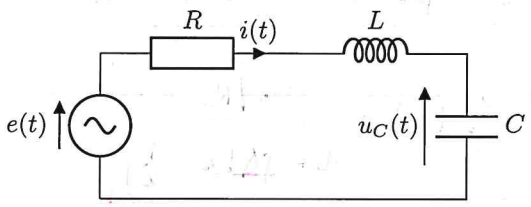
▷ On considère maintenant un circuit RL alimenté par le même GBF.



Q 2. Déterminer l'expression de l'amplitude complexe du signal complexe $\underline{u_L}$.

III. Étude du circuit RLC série en RSF, phénomène de résonance

▷ On considère le circuit RLC série alimenté par un GBF de tension sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.



En RSF, l'intensité a pour expression $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$,ce qui donne en représentation complexe : $\underline{i}(t) = \underline{i_0} e^{j\omega t}$ avec $\underline{i_0} = i_0 e^{j\varphi_i}$.

III. 1 - Résonance en intensité du circuit RLC série

Le but de cette sous-partie est de montrer que pour une certaine pulsation ω, l'intensité subit une forte augmentation. Il faut donc déterminer avec précision i_0 et φ_i.

Appliquons un pont diviseur de tension : $\underline{u_R} = \dfrac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L} + \underline{Z_C}} \underline{e}$ (et $\underline{u_R} = R\underline{i}$, loi d'Ohm)

Donc on a : $R\underline{i} = \dfrac{R}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}} \underline{e}$

$\Leftrightarrow \underline{i}(t) = \dfrac{E_0}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}} e^{j\omega t}$; $\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t}$

$\underline{i_0}$

Travaillons l'expression de $\underline{i_0}$ pour la mettre sous "forme canonique". Dans le chapitre E4, on avait vu :

$\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} & \text{pulsation propre} \quad (1) \\ Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} & \text{facteur de qualité} \quad (2) \end{cases}$

$\underline{i_0} = \dfrac{E_0/R}{1 + j\left(\dfrac{L}{R}\omega + \dfrac{1}{jRC\omega}\right)}$ Exprimons $\dfrac{L}{R}$ et $\dfrac{1}{RC}$ en fonction de ω_0 et Q pour alléger l'expression

$\frac{(2)}{(1)} : \frac{Q}{\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \times \sqrt{LC} \Leftrightarrow \frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R}$

$(2)\times(1) : Q\omega_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \times \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow Q\omega_0 = \frac{1}{RC}$

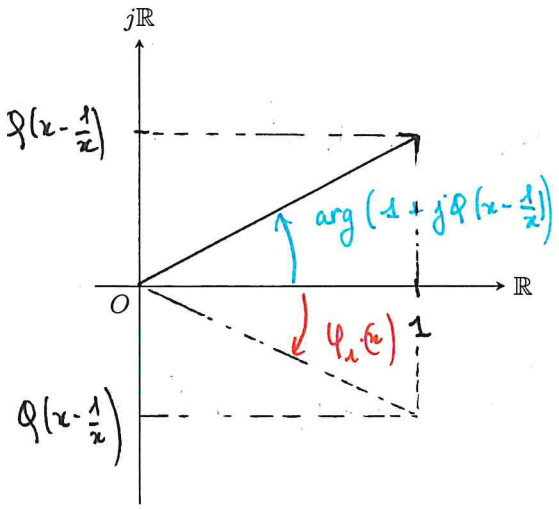
Relations utiles !!

Donc $\underline{i}_0 = \dfrac{E_0/R}{1 + jQ\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{Q\omega_0}{j\omega}}$

On pose $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite d'où : $\underline{i}_0(x) = \dfrac{E_0/R}{1 + jQx + \frac{Q}{jx}}$

et donc finalement : $\underline{i}_0(x) = \dfrac{E_0/R}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$

$$\begin{cases} i_0(x) = |\underline{i}_0(x)| \\ \varphi_i(x) = \arg(\underline{i}_0(x)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i_0(x) = \dfrac{E_0/R}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \\ \varphi_i(x) = \underbrace{\arg\left(\frac{E_0}{R}\right)}_{=0 \text{ car } \frac{E_0}{R} \in \mathbb{R}_+^*} - \arg\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) \end{cases}$$



On remarque bien que $\varphi_i(x) \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\varphi_i(x) = \text{Arctan}(\tan(\varphi_i(x)))$

Par ailleurs, $\tan(\varphi_i(x)) = \dfrac{-Q\left(x - 1/x\right)}{1}$

$\Leftrightarrow \tan(\varphi_i(x)) = -Q\left(x - \frac{1}{x}\right)$

Donc $\varphi_i(x) = \text{Arctan}\left(-Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$ $\Leftrightarrow \varphi_i(x) = -\text{Arctan}\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$ (Arctan est impaire)

Donc $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$

$$\Leftrightarrow i(t) = \frac{E_0/R}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \text{Arctan}\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)\right)$$

Définition n°7 : Résonance

Phénomène correspondant à l'existence d'une fréquence f_r telle que l'amplitude réelle du signal de sortie soit maximale lorsque le système est soumis à une excitation périodique. La pulsation $\omega_r = 2\pi f_r$ pour laquelle l'amplitude réelle du signal de sortie est maximale est nommée pulsation de résonance.

Déterminons la pulsation ω_r (donc le réel $x_r = \frac{\omega_r}{\omega_0}$) pour laquelle l'amplitude de i, i.e. i_0 est maximale. On remarque que $i_0(x) = \frac{E_0/R}{\sqrt{f(x)}}$ en $f : x \longmapsto 1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$.

Si f admet un minimum, alors i_0 admettra un maximum. Etudions la fonction f

f étant dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ comme composée de fct dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$, il vient :

$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f'(x) = \underbrace{2Q^2}_{\geq 0}\underbrace{\left(x - \frac{1}{x}\right)}_{?}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}_{\geq 0}$

$f'(x) \geq 0 \iff x - \frac{1}{x} \geq 0 \iff x^2 - 1 \geq 0 \iff x \geq 1 \quad (x \in \mathbb{R}_*^+)$

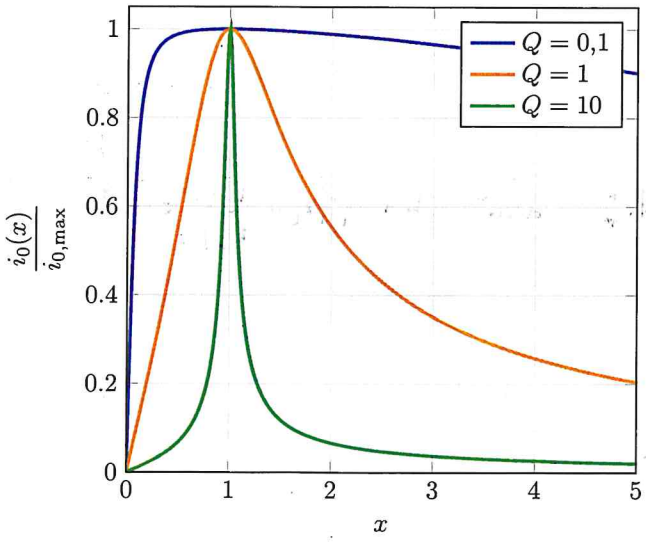
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	$f(1) = 1$	↗	‖ $+\infty$

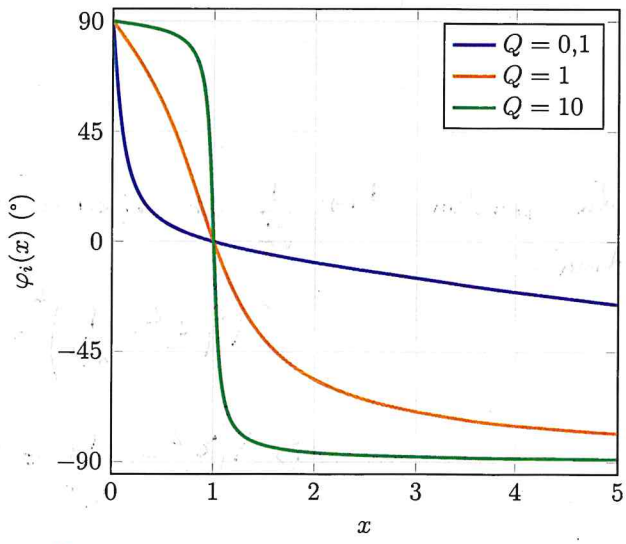
Donc i_0 admet bien un maximum lorsque $x = 1$ et ce maximum vaut

$i_{0,max} = i_0(1)$

$\iff i_{0,max} = \frac{E_0}{R}$ résonance pour $\omega = \omega_0$

Traçons $\frac{i_0}{i_{0,\max}} = g(x)$ et $\varphi_i = h(x)$ pour plusieurs valeurs de Q où $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$ et $h : x \mapsto -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$.





** À la résonance, on a toujours $\varphi_{i,r} = \varphi_i(0) = 0$

Propriété n°12 : Résonance en intensité d'un circuit RLC série

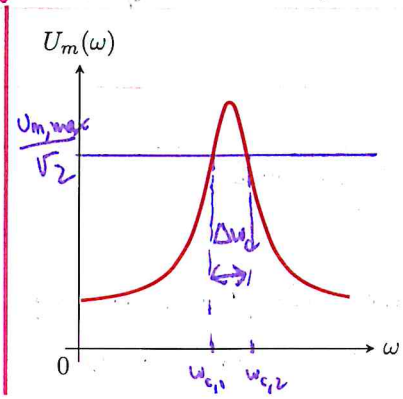
▷ Un circuit RLC série excité à une pulsation ω par un GBF de tension $e(t) = E_0\cos(\omega t)$ a **NÉCESSAIREMENT** une résonance en intensité pour $\omega = \omega_r = \omega_0$ où $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ désigne la pulsation propre du circuit. En notant $i_0(\omega)$ la valeur de l'amplitude de l'intensité du courant électrique, on a à la résonance :

$$\boxed{i_0(\omega_r) = i_{0,\max} = \frac{E_0}{R}}.$$

L'acuité de la résonance (=la finesse du pic) dépend du facteur de qualité Q du circuit : plus Q est élevé et plus la résonance présente un pic fin autour de la pulsation de résonance.

III. 2 - Bande passante, pulsation de coupure

Définition n°8 : Bande passante



On considère un signal sinusoïdal $u(t) = U_m(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$ dont l'amplitude présente une résonance à la pulsation $\omega = \omega_r$. On représente ainsi $U_m = f(\omega)$.

La bande passante est l'intervalle de pulsations $[\omega_{c,1}\,;\omega_{c,2}]$ tel que

$$U_m(\omega) \geq \frac{U_{m,max}}{\sqrt{2}}$$

avec $\Delta\omega_c = \omega_{c,2} - \omega_{c,1}$ la largeur de la BP

$\omega_{c,2}$: pulsation de coupure

Remarques

— La bande passante correspond à une gamme de fréquences pour laquelle le signal est peu atténué.

— La pulsation de résonance ω_c vérifie exactement $\boxed{U_m(\omega_c) = \dfrac{U_{m,\max}}{\sqrt{2}}}$.

Déterminons la largeur de la bande passante $\Delta\omega_c$ en fonction de la pulsation propre ω_0 du circuit RLC série et de son facteur de qualité Q. Il faut donc résoudre l'équation :

$$i_0(x_c) = \frac{i_{0,\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{E_0/R}{\sqrt{1+Q^2\left(x_c - \dfrac{1}{x_c}\right)^2}} = \frac{E_0/R}{\sqrt{2}} \text{ où } x_c = \frac{\omega_c}{\omega_0}$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est bijective sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $1 + Q^2\left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2 = 2$

Ainsi :

$$Q^2\left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow Q\left(x_c - \frac{1}{x_c}\right) = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow x_c - \frac{1}{x_c} = \pm\frac{1}{Q} \quad \Leftrightarrow x_c^2 - 1 = \pm\frac{1}{Q}x_c$$

$$\Leftrightarrow x_c^2 \mp \frac{1}{Q}x_c - 1 = 0$$

En raison du symbole "$\mp$", cette dernière équation contient les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} x_c^2 - \frac{1}{Q} x_c - 1 = 0 & (1) \\ x_c^2 + \frac{1}{Q} x_c - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Et pour rappel $x_c = \frac{\omega_c}{\omega_0} > 0$.

$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4$

De (1) : $\begin{cases} x_{c,1}^{(1)} = \frac{1/Q - \sqrt{\Delta}}{2} < 0 \text{ car } \sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} > \frac{1}{Q} \\ x_{c,2}^{(1)} = \frac{1/Q + \sqrt{\Delta}}{2} > 0 \end{cases}$

De plus, on observe que $x_{c,2}^{(1)} > x_{c,2}^{(2)}$.

De (2) : $\begin{cases} x_{c,1}^{(2)} = \frac{-1/Q - \sqrt{\Delta}}{2} < 0 \\ x_{c,2}^{(2)} = \frac{-1/Q + \sqrt{\Delta}}{2} > 0 \end{cases}$

D'où $\Delta x_c = x_{c,2}^{(1)} - x_{c,2}^{(2)}$

$\Rightarrow \Delta x_c = \frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} - \left(\frac{-1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right)$

$\Leftrightarrow \Delta x_c = \frac{1}{Q}$

Or $x_c = \frac{\omega_c}{\omega_0}$, donc on obtient finalement pour la largeur de la bande passante : $\frac{\Delta\omega_c}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$

Propriété n°13 : Largeur de la bande passante

La largeur de la bande passante, pour l'intensité du courant électrique d'un circuit RLC série est :

$$\Delta\omega_c = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Remarque : $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_c}$ → plus la résonance est "pointue", plus Q ↗

et cela se produit pour des systèmes très peu amortis ($R \ll R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

III. 3 - Détermination de ω_0 et Q par lecture graphique

Méthode : Trouver graphiquement ω_0 et Q dans un circuit RLC série pour une résonance en intensité

▷ Pour trouver ω_0 :

— Avec l'amplitude réelle de l'intensité : nous avons vu qu'à la résonance, l'amplitude de l'intensité était maximale. Donc en regardant le maximum, on peut trouver la pulsation réduite/pulsation/fréquence par lecture graphique de l'abscisse du maximum.

— Avec le déphasage entre l'intensité et la tension d'entrée : nous avons vu que pour la résonance en intensité, on avait l'intensité et la tension d'entrée en phase : on peut lire la pulsation réduite/pulsation/fréquence de résonance en regardant l'abscisse pour laquelle $\varphi_{i/e}$ est nulle.

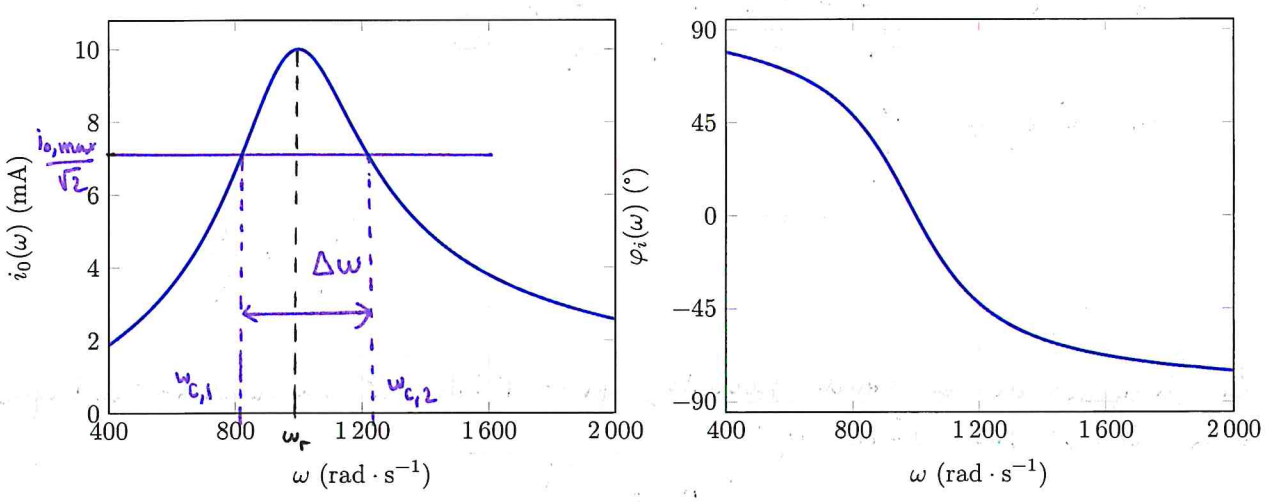
▷ Pour trouver Q :

1. Trouver le maximum de i_0.
2. Calculer $\frac{i_{0,\max}}{\sqrt{2}}$ et tracer une ligne horizontale à cette valeur sur le graphique.
3. Les deux intersections avec la courbe sont les pulsations de coupure $\omega_{c,1}$ et $\omega_{c,2}$: les relever.
4. Utiliser la formule $Q = \dfrac{\omega_0}{\omega_{c,2} - \omega_{c,1}}$ pour trouver Q. Il faut donc également trouver ω_0.

Application n°4 : Lecture graphique de Q sur un graphe de résonance en intensité dans un circuit RLC série

▷ On considère un circuit RLC série alimenté par un GBF dont on fait varier la fréquence au cours du temps. On enregistre l'amplitude de i (i.e i_0) lorsque ω varie entre 400 et 2 000 rad · s^{-1}.

Question : Déterminer la valeur numérique du facteur de qualité Q de ce circuit RLC série.

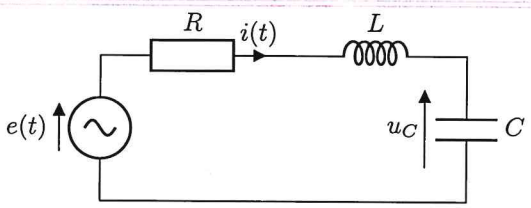


III. 4 - Résonance en tension du circuit RLC série

L'application qui va suivre résume tout le cours. Il faut donc la maîtriser sur le bout des doigts.

Application n°5 : Résonance de la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RLC série

▷ On considère toujours le circuit RLC série alimenté par un GBF de tension sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.



En régime sinusoïdal forcé, la tension aux bornes du condensateur a pour expression : $u_C(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$.

Q 1. Montrer que l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur a pour expression :

$$\underline{u_0}(x) = \frac{E_0}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}$$

où l'on a posé $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ avec ω_0 et Q à exprimer en fonction des données du problème.

Q 2. Déterminer l'expression de l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur $u_0(x)$.

Q 3. Déterminer l'expression de la phase $\varphi_u(x)$.
Indication : Attention à bien faire la disjonction de cas $x > 1$ et $x < 1$.

Q 4. Déterminer les valeurs de Q pour lesquelles on observe un phénomène de résonance, puis le cas échéant, exprimer la pulsation de résonance ω_r en fonction de ω_0 et Q.

Q 5. Dans la limite $Q \gg 1$, exprimer l'amplitude maximale de la tension aux bornes du condensateur $u_{0,\max}$ en fonction de Q et E_0.

Q 6. En déduire les risques d'une valeur de résistance R très faible sur le circuit électrique.

Propriété n°14 : Résonance en tension aux bornes d'un condensateur d'un circuit RLC série

▷ Un circuit RLC série excité à une pulsation ω par un GBF de tension $e(t) = E_0\cos(\omega t)$ ne possède une résonance en tension **UNIQUEMENT SI** $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dans ce cas-là, la résonance a lieu a la pulsation :

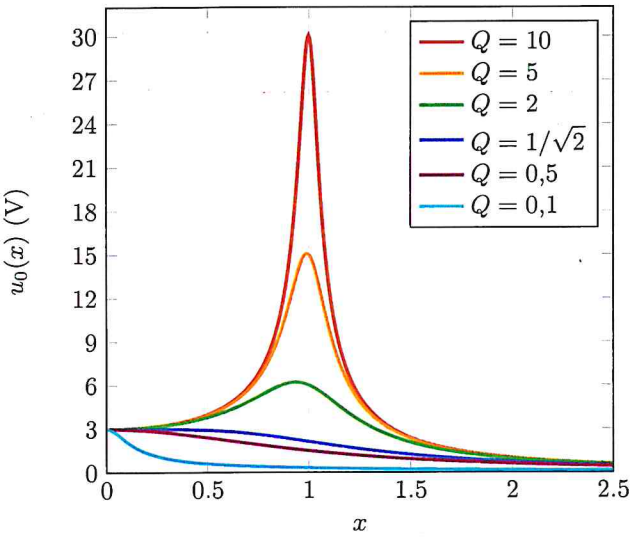
$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$$

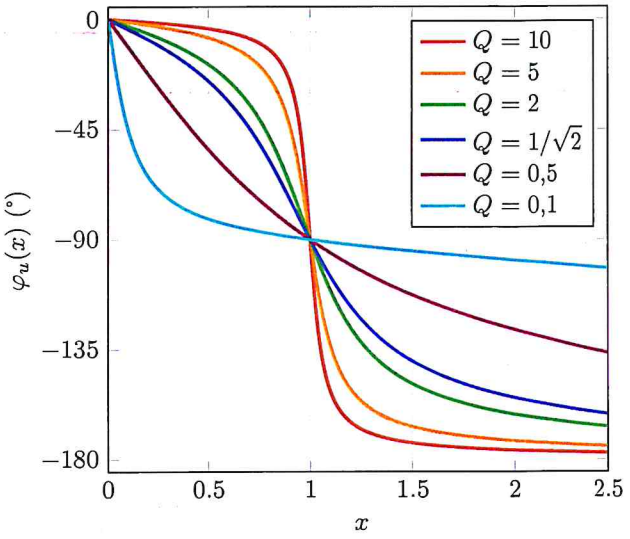
où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ désigne la pulsation propre du circuit. En notant $u_0(\omega)$ la valeur de l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur, on a à la résonance :

$$\boxed{u_0(\omega_r) = u_{0,\max} = QE_0}$$

ce qui est très dangereux pour un très faible amortissement du circuit (i.e $Q \gg 1$).

Traçons pour plusieurs valeurs de Q le graphe $u_0 = f(x)$ où $f : x \mapsto \dfrac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2+\frac{x^2}{Q^2}}}$ ainsi que le graphe $\varphi_u = g(x)$:





Remarques

— On voit bien qu'il y a résonance en tension aux bornes du condensateur **seulement pour** $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. On le voit sur le graphique précédent (pour $Q < 0,7 \simeq 1/\sqrt{2}$, pas de pic). La pulsation de résonance ω_r et le maximum alors atteint $u_{0,\max}$

— Plus Q est grand (moins le système est amorti), plus la bande passante est étroite.

— Si $Q \gg 1$ (système très peu amorti), on voit bien que $u_{0,\max} = QE_0 \gg E_0$ à la résonance : danger potentiel pour le système. (*On a pris* $E_0 = 3$ V*).*

— Lorsque $Q \gg 1$, $\omega_r \simeq \omega_0$: on observe sur le graphe que le pic de résonance se rapproche de $x = 1$.