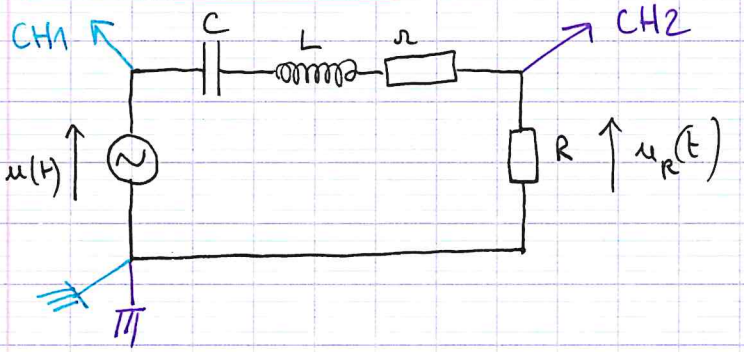
Corrigé du TD ES

EX 1- Etude expérimentale du circuit RLC série soumis à une excitation sinusoïdale

Q1)



Pas de court-circuit dans cette configuration → on peut bien afficher simultanément les deux tensions.

Q2) On lit $U_m = 8V$

$RI_m = 4V \Rightarrow I_m = 0,2A$

$2T = 8ms \Rightarrow T = 4ms$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \omega = 1,6 \times 10^3 rad.s^{-1}$

Q3) On remarque que u est en avance de phase par rapport à u_R.

Donc i est en retard de phase sur u : $\varphi_{i/u} < 0$.

et $\varphi_{i/u} = \frac{2\pi}{T}\Delta t$ avec $\Delta t = -0,5 ms \Rightarrow \varphi_{i/u} = \varphi = -0,8 rad$

Q4) $\underline{Z} = \underline{Z}_r + \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C \Leftrightarrow \underline{Z} = r + R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \Leftrightarrow \underline{Z} = r + R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ ($\frac{1}{j} = -j$)

Par ailleurs, $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$ avec $\underline{u} = U_m e^{j\omega t}$ et $\underline{i} = \underline{i}_m e^{j\omega t}$

avec $\underline{i}_m = I_m e^{j\varphi_{i/u}} = I_m e^{j\varphi}$.

Donc $\underline{Z} = \frac{U_m}{I_m e^{j\varphi}} = \frac{U_m}{I_m} e^{-j\varphi} = \frac{U_m}{I_m}(\cos(\varphi) - j\sin(\varphi))$

Donc $Re(\underline{Z}) = r + R = \frac{U_m}{I_m}\cos(\varphi) \Leftrightarrow r = \frac{U_m}{I_m}\cos(\varphi) - R$

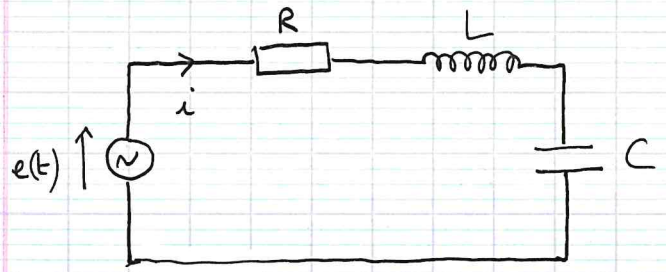
AN : $r = 7,9\Omega \simeq 8\Omega$

Q5) $Im(\underline{Z}) = L\omega - \frac{1}{C\omega} = -\frac{U_m}{I_m}\sin(\varphi) \Leftrightarrow L = +\frac{1}{C\omega^2} - \frac{U_m \sin(\varphi)}{I_m \omega}$

AN : $L = 5{,}7 \times 10^{-2}$ H $\Leftrightarrow$ $\underline{L = 57\ mH}$

EX2 - Résonance en intensité du circuit RLC série

Q1)



$\underline{e} = E e^{j\omega t}$

$\underline{i} = \underline{i}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{i}_m = I_m e^{j\varphi_{i/e}}$.

$\underline{u_R} = \dfrac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L} + \underline{Z_C}}\ \underline{e}$ d'après la pont diviseur de tension :

$\Leftrightarrow R\underline{i} = \dfrac{R}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}}\ \underline{e}$

$\Leftrightarrow \underline{i} = \dfrac{1}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}\ \underline{e}$. avec $\underline{e} = E e^{j\omega t}$.

$\Leftrightarrow \underline{i} = \underbrace{\dfrac{E}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}}_{\underline{i}_m(\omega) =}\ e^{j\omega t}$

Donc $I_m(\omega) = |\underline{i}_m(\omega)| \Leftrightarrow \boxed{I_m(\omega) = \dfrac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}}$

Q2) Bande - passante : $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ (circuit RLC série)

Résonance pour $\omega = \omega_0$.

↳ $\underline{\omega_0 = 1{,}00 \times 10^4\ rad \cdot s^{-1}}$.

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ avec $\omega_i : \dfrac{I_{m,max}}{\sqrt{2}}$

$i \in [\![1, 2]\!]$.

$$I_{m,max} = \frac{E}{R} \Leftrightarrow R = \frac{E}{I_{m,max}} \Leftrightarrow \underline{R = 100\,\Omega}$$

$I_{m,max} = 0{,}05$ A d'où $I_{m,max}/\sqrt{2} = 0{,}035$ A

On mesure $\Delta\omega = (1{,}10 - 0{,}90) \times 10^6$ rad.s^{-1}

$\Leftrightarrow \underline{\Delta\omega = 0{,}20 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}}$.

D'où $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \Leftrightarrow \underline{Q = 5}$

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$

donc $\omega_0 Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \times \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow \omega_0 Q = \frac{1}{RC}$

donc $\underline{C = \frac{1}{R\omega_0 Q}}$.

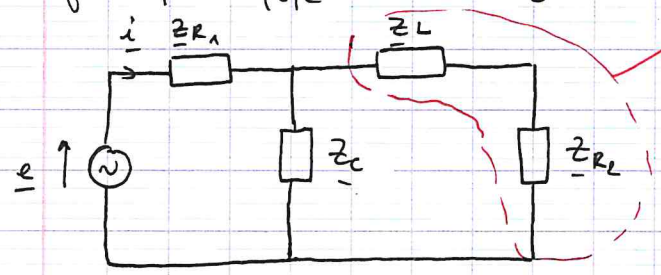
AN : $C = 2 \times 10^{-7}$ F

$\Leftrightarrow \underline{C = 200\text{ nF}}$

Et donc $\underline{L = \frac{1}{\omega_0^2 C}}$ AN $L = 0{,}05$ H $\Leftrightarrow \underline{L = 50\text{ mH}}$

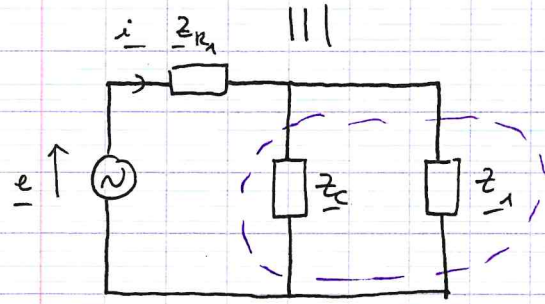
EX 3 - Condition de mise en phase de l'intensité et de la tension

Pour que l'intensité i soit en phase avec la tension e, il faut que $\varphi_{i/e} \equiv 0\ [2\pi]$.



$\rightarrow \underline{Z_1} = \underline{Z_L} + \underline{Z_{R_2}} = R_2 + jL\omega$

- $\underline{i} = \underline{i}_m e^{j\omega t} = i_m e^{j\varphi_{i/e}} e^{j\omega t}$
- $\underline{e} = E_0 e^{j\omega t}$.

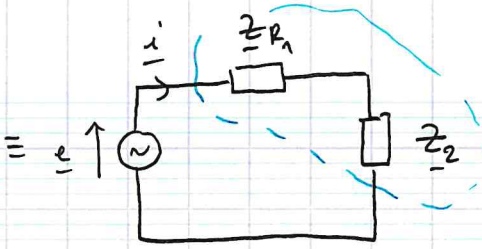


$\rightarrow \underline{Y_2} = \underline{Y_{C_1}} + \underline{Y_1} = jC\omega + \frac{1}{R_2 + jL\omega}$

D'où $\underline{Y_2} = \frac{1 + jR_2C\omega - LC\omega^2}{R_2 + jL\omega}$

$\Leftrightarrow \underline{Z_2} = \frac{R_2 + jL\omega}{1 + jR_2C\omega - LC\omega^2}$.

TD E5



$\rightarrow \underline{Z}_3 = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{R_1}$

$\Leftrightarrow \underline{Z}_3 = R_1 + \dfrac{R_2 + jL\omega}{1 + jR_2C\omega - LC\omega^2}$.

$\Leftrightarrow \underline{Z}_3 = \dfrac{R_1 + jR_1R_2C\omega - R_1LC\omega^2 + R_2 + j}{1 - LC\omega^2 + jR_2C\omega}$

$\Leftrightarrow \underline{Z}_3 = \dfrac{R_1 + R_2 - R_1LC\omega^2 + j(R_1R_2C\omega + L}{1 - LC\omega^2 + jR_2C\omega}$

On a $\underline{e} = \underline{Z}_3 . \underline{i}$

$\Leftrightarrow \underline{i} = \dfrac{\underline{e}}{\underline{Z}_3}$.

D'où $\underline{i} = \underbrace{\dfrac{E_0 (1 - LC\omega^2 + jR_2C\omega)}{R_1 + R_2 - R_1LC\omega^2 + j(R_1R_2C\omega + L\omega)}}_{\underline{i}_m} e^{j\omega t}$

$\varphi_{i/e} = \arg(\underline{i}_m)$.

Pour que $\varphi_{i/e} = 0$, il faut que $\arg(\underline{i}_m) = 0 \Leftrightarrow \underline{i}_m \in \mathbb{R}_+^*$

Donc $\begin{cases} Re(\underline{i}_m) > 0 \\ Im(\underline{i}_m) = 0. \end{cases}$

$(1 - LC\omega^2 + jR_2C\omega)(R_1 + R_2 - R_1LC\omega^2 - j(R_1R_2C\omega + L\omega))$

$= R_1 + R_2 - R_1LC\omega^2 - j(R_1R_2C\omega + L\omega) - R_1LC\omega^2 - R_2LC\omega^2$

$+ R_1(LC)^2\omega^4 + jLC\omega^2(R_1R_2C\omega + L\omega) + jR_1R_2C\omega + jR_2^2C\omega$

$- jR_1R_2LC^2\omega^3 + R_2C\omega(R_1R_2C\omega + L\omega)$.

$Im(\underline{i}_m) = 0 \Leftrightarrow -\cancel{R_1R_2C\omega} - L\omega + \cancel{LC^2\omega^3R_1R_2} + L^2C\omega^3 + \cancel{R_1R_2C\omega}$

$+ R_2^2C\omega - \cancel{R_1R_2LC^2\omega^3} = 0$

$\Leftrightarrow L^2C\omega^{\cancel{3}} - L\cancel{\omega} + R_2^2C\cancel{\omega} = 0$

$\Leftrightarrow L^2C\omega^2 - L + R_2^2C = 0$

$\Leftrightarrow \omega^2 = \dfrac{L - R_2^2C}{L^2C} \Leftrightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R_2^2}{L^2}}}$

Et il faut que $\mathrm{Re}(i_{\text{im}}) > 0$, soit :

$R_1 + R_2 - R_1 LC\omega^2 - R_1 LC\omega^2 - R_2 LC\omega^2 + R_1 (LC)^2 \omega^4 + R_2 LC\omega^2 + R_1 R_2^2 C^2 \omega^2 > 0$

$\Leftrightarrow R_1 + R_2 - 2R_1 LC\omega^2 + R_1 (LC)^2 \omega^4 + R_1 R_2^2 C^2 \omega^2 > 0$

$\Leftrightarrow R_2 + R_1 \left(1 + (R_2 C\omega)^2 - 2LC\omega^2 + (LC)^2 \omega^4 \right) > 0$

$\Leftrightarrow \boxed{R_2 + R_1 \left((1 - LC\omega^2)^2 + (R_2 C\omega)^2 \right) > 0}$ toujours vrai

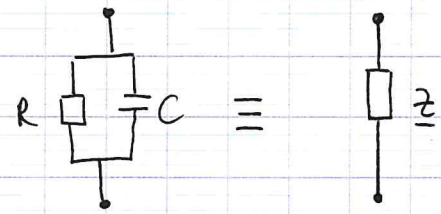
La seule condition pour avoir i et e en phase est donc d'avoir $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_2^2}{L^2}}}$

EX 4 - Cellules RC en parallèle

Condition : $\varphi_{i/i_2} = 0$.

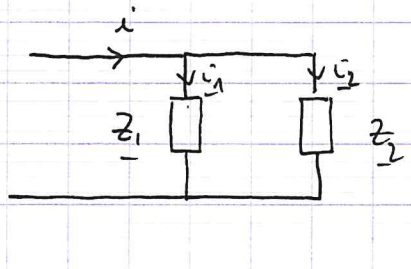
$\frac{i}{i_2} = k > 1$.

Idée : Faire un pont diviseur de courant



avec $\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R} = \frac{1 + jRC\omega}{R}$ $\left(= \frac{1}{\underline{Z}} \right.$

Ainsi, on a :



avec $\underline{i_2} = \frac{\underline{Y_2}}{\underline{Y_1} + \underline{Y_2}} \underline{i}$

$\Leftrightarrow \frac{\underline{i}}{\underline{i_2}} = \frac{\underline{Y_1} + \underline{Y_2}}{\underline{Y_2}}$ $\Leftrightarrow \frac{\underline{i}}{\underline{i_2}} = 1 + \frac{\underline{Y_1}}{\underline{Y_2}}$

On a donc $1 + \frac{\underline{V_1}}{\underline{V_2}} = k$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1 + jR_1C_1\omega}{R_1} \cdot \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega} = k \quad (1)$$

Par ailleurs $\underline{i_2} = \dfrac{\frac{1 + jR_2C_2\omega}{R_2}}{\frac{1 + jR_2C_2\omega}{R_2} + \frac{1 + jR_1C_1\omega}{R_1}} \underline{i}$

$$\Leftrightarrow \underline{i_2} = \frac{\frac{1 + jR_2C_2\omega}{R_2}}{\frac{R_1 + jR_1R_2C_2\omega + R_2 + jR_1R_2C_1\omega}{R_1R_2}} \underline{i}$$

$$\Leftrightarrow \underline{i_2} = \frac{1 + jR_2C_2\omega}{\cancel{R_2}} \times \frac{R_1\cancel{R_2}}{R_1 + R_2 + jR_1R_2\omega(C_1 + C_2)} \underline{i}$$

$$\Leftrightarrow \underline{i_2} = \underbrace{\frac{R_1(1 + jR_2C_2\omega)}{R_1 + R_2 + jR_1R_2\omega(C_1 + C_2)}}_{\underline{A} = 1/k \in \mathbb{R}} \underline{i}.$$

$\underline{i_2}$ et $\underline{i}$ sont en phase si $\underline{A} \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(\underline{A}) = 0$.

$$R_1(1 + jR_2C_2\omega)(R_1 + R_2 - jR_1R_2\omega(C_1 + C_2)) =$$

$$R_1(R_1 + R_2 - jR_1R_2(C_1 + C_2)\omega + j(R_1 + R_2)R_2C_2\omega + R_1R_2^2C_2\omega^2(C_1 + C_2)$$

$$\mathrm{Im}(\underline{A}) = \cancel{R_1}(R_1 + R_2)\cancel{R_2}C_2\omega - \cancel{R_1R_2}(C_1 + C_2)\omega = 0$$

$$\Leftrightarrow (R_1 + R_2)C_2 = R_1(C_1 + C_2)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{R_1}C_2 + R_2C_2 = R_1C_1 + \cancel{R_1}C_2$$

$$\Leftrightarrow R_1C_1 = R_2C_2 \quad (2)$$

$= \tau$

(1) : $1 + \dfrac{1 + j\omega\tau}{R_1} \cdot \dfrac{R_2}{1 + j\omega\tau} = k$

$\Leftrightarrow \quad 1 + \dfrac{R_2}{R_1} = k$

D'où $\dfrac{R_2}{R_1} = k - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{R_1 = \dfrac{R_2}{k-1}}$

et $C_1 = \dfrac{R_2}{R_1} C_2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{C_1 = (k-1) C_2}$.

EX5 - Résonance du circuit RLC parallèle.

Q1) R, L et C sont en // d'où $\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C$

$\Leftrightarrow \boxed{\underline{Y} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{jL\omega} + jC\omega}$.

Q2) $R\underline{Y} = 1 + \dfrac{R}{jL\omega} + jRC\omega \quad \Leftrightarrow \quad R\underline{Y} = 1 + j\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)$

On a $\begin{cases} \dfrac{R}{L} = \omega_0 Q \text{ donc } \dfrac{R}{L\omega} = \dfrac{\omega_0 Q}{\omega} = \dfrac{Q}{x}, & x = \dfrac{\omega}{\omega_0}, \\ RC = \dfrac{R}{L} \cdot LC = \omega_0 Q \times \dfrac{1}{\omega_0^2} = \dfrac{Q}{\omega_0} \text{ donc } RC\omega = \dfrac{\omega}{\omega_0} Q = xQ. \end{cases}$

Donc $R\underline{Y} = 1 + j\left(xQ - \dfrac{Q}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{R\underline{Y} = 1 + jf(x,Q)}$

avec $f(x,Q) = xQ - \dfrac{Q}{x} = Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$

Q3) $\underline{Z} = \dfrac{1}{\underline{Y}} \quad \text{et} \quad \underline{Z} = \dfrac{R}{R\underline{Y}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\underline{Z} = \dfrac{R}{1 + jQ\left(x - 1/x\right)}}$

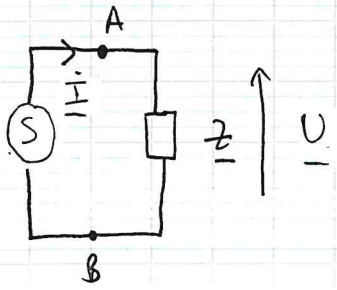
Q4) À BF $(x \to 0)$ $|\underline{Z}| = \dfrac{R}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - 1/x\right)^2}} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{R}{\sqrt{\dfrac{Q^2}{x^2}}} = \dfrac{xR}{Q}$

$x - \dfrac{1}{x} \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{1}{x}$ (le terme en $\frac{1}{x}$ est bcp + important que le terme en x)

$|\underline{Z}| \underset{x\to 0}{\sim} \frac{xR}{Q} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc le dipôle équivalent entre A et B se comporte comme un fil aux basses fréquences.

À HF $(x \to +\infty)$: $|\underline{Z}| \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{R}{Qx} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ Le comportement est identique par rapport à celui observé aux basses fréquences : c'est un fil

Q5)



$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$

avec $\underline{I} = I_m e^{j\omega t}$.

D'où $\underline{U} = \underbrace{\frac{RI_m}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}}_{\underline{U}_{AB}} e^{j\omega t}$.

$\varphi = \arg(\underline{U}_{AB})$

$U_{AB} = |\underline{U}_{AB}| \Leftrightarrow U_{AB} = \frac{RI_m}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$.

Soit $g : x \mapsto 1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$. Etudions les variations de g.

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de f° dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = 2Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

U_{AB} est max lorsque $x = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0' = \omega_0 = \sqrt{\ }$

et dans ce cas $U_{AB,max} = RI_m$