Détermination r et L avec oscillogramme

① graphiquement, on lit sur l'oscillogramme

$U_{em} = 5V$

$U_{Rm} = 2,5V$ on a $U_{Rm} < U_{em}$

② d'après la loi d'Ohm en convention récepteur, on a

$$u_R = Ri$$

En passant aux amplitudes complexes : $U_{Rm} = R\,i_m$

$$\boxed{i_m = \frac{U_{Rm}}{R}}$$ A.N $i_m = 0,062\ A$

④ On observe les 0 de ces 2 courbes : u_e atteint 0 avant u_R.

Ainsi, c'est u_e qui est en avance de phase sur u_R

③ Par définition de l'impédance complexe :

$$\underline{Z}_{AM} = \frac{\underline{U}_e}{\underline{i}}$$ → car c'est la tension complexe aux bornes du dipôle AM.

Ainsi $Z_{AM} = |\underline{Z}_{AM}| = \left|\frac{\underline{U}_e}{\underline{i}}\right|$

$$= \frac{|\underline{U}_e|}{|\underline{i}|}$$

$$\boxed{Z_{AM} = \frac{U_{em}}{i_m}}$$ A.N $Z_{AM} = 80,6\ \Omega$

⑤ Par définition

$$\varphi_{ue/i} = \pm \frac{2\pi \Delta t}{T}$$

- $\pm$: + ici car u_e est en avance sur u_R donc sur i
- Δt : écart temporel entre le maximum de u_e et maximum de u_R
- T : période des 2 signaux

- On lit ici qu'une seule période :

$$T = 4\,ms$$

- graphiquement, on trouve $\Delta t = 0{,}33\,ms$

Ainsi $\varphi_{ue/i} = 0{,}52\,rad$. Le déphasage entre la tension d'entrée et l'intensité est de 0,52 radians

⑥ On remarque l'association en série de r, L, C et R.

Les impédances s'additionnent. On a alors :

$$\underline{Z}_{AM} = \underline{Z}_r + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C + \underline{Z}_R$$

$$\underline{Z}_{AM} = r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R$$

} sous forme algébrique

$$\underline{Z}_{AM} = (r+R) + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

⑦ Par définition de l'impédance complexe

$$\underline{Z}_{AM} = \frac{\underline{u_e}}{\underline{i}} = \frac{U_{em} e^{j\varphi_e} e^{j\omega t}}{I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}} = \frac{U_{em}}{I_m} e^{j\varphi_{ue/i}}$$

Puis $\boxed{\underline{Z}_{AM} = Z_{AM} e^{j\varphi_{ue/i}}}$

⑧ Par définition de la partie réelle de $\underline{Z}_{AM}$

$$Re(\underline{Z}_{AM}) = Z_{AM} \cos(\varphi_{ue/i})$$

D'après la question 6, $Re(\underline{Z}_{AM}) = r + R$

d'où $r + R = Z_{AM} \cos(\varphi_{ue/i})$

$$\boxed{r = Z_{AM} \cos(\varphi_{ue/i}) - R}$$

A.N $\underline{r = 30\,\Omega}$ c'est le bon ordre de grandeur pour une résistance interne de bobine

⑨ Par définition de la partie imaginaire de $\underline{Z}_{AM}$:

$$Im(\underline{Z}_{AM}) = Z_{AM} \sin(\varphi_{ue/i})$$

D'après la q6, $Im(\underline{Z}_{AM}) = L\omega - \frac{1}{C\omega}$

d'où $L\omega - \frac{1}{C\omega} = Z_{AM} \sin(\varphi_{ue/i})$

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} + Z_{AM} \sin(\varphi_{ue/i})$$

$$L = \frac{1}{C\omega^2} + \frac{Z_{AM}}{\omega} \sin(\varphi_{ue/i})$$

$$\boxed{L = \frac{1}{C(2\pi f)^2} + \frac{Z_{AM}}{2\pi f} \sin(\varphi_{ue/i})}$$

A.N $\underline{L = 6{,}8 \times 10^{-2}\,H}$

c'est l'ordre de grandeur usuel pour les bobines utilisées en TP.

(10) D'après l'énoncé, on aura u_R et u_e en phase.

Comme une résistance n'induit pas de déphasage, cela signifie que nécessairement u_{AD} et i sont en phase.

Par définition de l'impédance

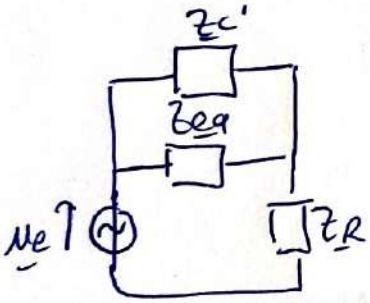
$$\underline{Z}_D = Z_{AD} e^{j\varphi_{u_{AD}/i}}$$

$$\underline{Z}_{AD} = Z_{AD}$$

Ainsi, l'impédance $\underline{Z}_{AD}$ est nécessairement réelle.

(11) Après avoir passé le circuit en complexes:
On a r, L et C en série, d'impédance équivalente

$$\underline{Z}_{eq} = r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$



$\underline{Z}_{C'}$ et $\underline{Z}_{eq}$ sont associées en parallèle

$$\frac{1}{\underline{Z}_{AD}} = \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} + \frac{1}{\underline{Z}_{C'}}$$

$$\underline{Y}_{AD} = \frac{1}{\underline{Z}_{AD}} = \frac{1}{r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} + jC'\omega$$

(12) D'après la q10, la partie imaginaire de $\underline{Z}_{AD}$, donc aussi de $\underline{Y}_{AD}$ est nulle.

Ainsi $\underline{Y}_{AD} = jC'\omega + \dfrac{1}{r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$

$$\underline{Y_{AD}} = jC'\omega + \frac{r - j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\underline{Y_{AD}} = j\left(C'\omega \mp \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}\right) + \frac{r}{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Ainsi, par identification :

$$C'\omega \mp \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = 0$$

$$C'\omega = + \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$C' = \frac{L - \frac{1}{C\omega^2}}{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\boxed{C' = \frac{L - \frac{1}{C \times (2\pi f)^2}}{r^2 + \left(L \times 2\pi f - \frac{1}{C \times 2\pi f}\right)^2}}$$

A.N $\underline{C' = 1{,}0 \times 10^{-5} F}$ c'est l'ordre de grandeur (haut) des condensateurs utilisés en TP

Circuit en régime sinusoïdal forcé

① Le régime sinusoïdal forcé correspond au régime permanent d'un circuit soumis à une excitation sinusoïdale. On se place à un temps tel que le régime transitoire est négligé.

② En complexes, on a :

$$\underline{e} = E e^{j\omega t}$$

$$\underline{s} = S e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\underline{s} = \underline{S} e^{j\omega t}, \text{ avec } \underline{S} = S e^{j\varphi}$$

③ • En convention récepteur, d'après la loi d'Ohm

$$u_R = Ri$$

En passant en complexes $\underline{u}_R = R\underline{i}$

Par définition de l'impédance $\boxed{\underline{Z}_R = \frac{\underline{u}_R}{\underline{i}} = R}$

$\underline{Z}_R$ est indépendante de la fréquence, donc $\underline{Z}_R$ est une résistance à hautes et basses fréquences.

• En convention récepteur, pour une bobine : $u_L = L\frac{di}{dt}$

On passe en complexes $\underline{u}_L = L\frac{d\underline{i}}{dt} = Lj\omega\,\underline{i}$

Par définition de l'impédance $\boxed{\underline{Z}_L = \frac{\underline{u}_L}{\underline{i}} = jL\omega}$

$|\underline{Z}_L| = L\omega$ $|\underline{Z}_L|$ dépend de ω

→ à BF $|\underline{Z}_L| \xrightarrow[\omega \to 0]{} 0$: la bobine est équivalente à un fil électrique

→ à HF: $|\underline{Z_L}| \xrightarrow[\omega \to +\infty]{} +\infty$ · la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert.

• En convention récepteur, pour le condensateur: $i = C\frac{du_c}{dt}$

On passe en complexes : $\underline{i} = C\frac{du_c}{dt} = jwC\,\underline{u_c}$

Par définition de l'impédance $\boxed{\underline{Z_c} = \frac{\underline{u_c}}{\underline{i}} = \frac{1}{jCw}}$

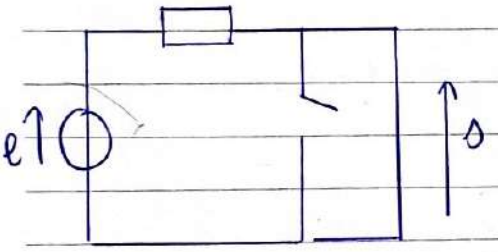
$|\underline{Z_c}| = \frac{1}{Cw}$ $|\underline{Z_c}|$ dépend de la fréquence

→ à BF: $|\underline{Z_c}| \xrightarrow[\omega \to 0]{} +\infty$: le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert

→ à HF: $|\underline{Z_c}| \xrightarrow[\omega \to \infty]{} 0$: le condensateur est équivalent à un fil électrique

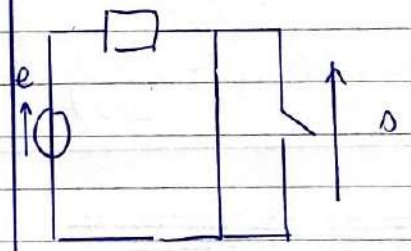
④ On fait les circuits équivalents:

à basses fréquences:



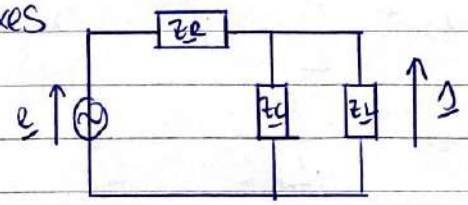
$s = 0$ (tension aux bornes d'un fil)

à hautes fréquences



$s = 0$ (tension aux bornes d'un fil)

⑤ On passe le circuit en complexes

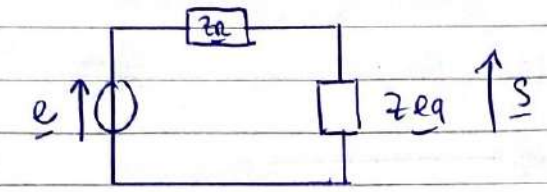


$\underline{Z_c}$ et $\underline{Z_L}$ sont associés en parallèle:

$$\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z_c}} + \frac{1}{\underline{Z_L}} = jCw + \frac{1}{jLw}$$

$$\boxed{\underline{Z_{eq}} = \frac{1}{jCw + \frac{1}{jLw}}}$$

On fait le circuit équivalent:



(6) Sur le circuit précédent, on reconnait un pont diviseur de tension:

$$\underline{s} = \frac{\underline{z_{eq}}}{\underline{z_{eq}} + \underline{z_R}}\,\underline{e}$$

$$\underline{s} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{z_R}}{\underline{z_{eq}}}}\,\underline{e}$$

$$\underline{s} = \frac{1}{1 + R\left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega}\right)}\,\underline{e}$$

$$\underline{s} = \frac{1}{1 + j\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}\,\underline{e}$$

On pose ~~$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et Q~~

- $\frac{Q}{\omega_0} = RC$ (1)
- $Q\omega_0 = \frac{R}{L}$ (2)

$\Rightarrow$ (1)$\times$(2) $Q^2 = R^2\frac{C}{L}$

on pose : $\boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$

$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{R}{LRC} = \frac{1}{LC}$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Puis on pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

D'où $\underline{S} = \dfrac{\underline{e}}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$

On passe aux amplitudes complexes (cf q2)

$$\boxed{\underline{S} = \frac{E}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}} \qquad A = E \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0} \qquad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(7) Par définition :

$$\boxed{S = |\underline{S}| = \frac{E}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}}$$

(8) Le phénomène est appelé phénomène de résonance

chercher x tel que S est maximale revient à chercher x tel que :

$f : x \mapsto 1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ est minimale (par croissance de la racine)

f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $f'(x) = Q^2 \times 2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0$ ou $1 + \frac{1}{x^2} = 0$ impossible $x \in \mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \quad x \neq 0$ car $x \in \mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \underline{x = 1}$

- f' est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $f''(x) = \left(\frac{+1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right) \times 2Q^2$

$f'(x) = 2Q^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$

$f''(1) = (1-2+3)_0^2 > 0$

Ainsi $x = 1$ est un minimum de f, donc un maximum de S. Ainsi, il y a résonance si $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

(9) La bande passante correspond à l'intervalle de fréquence tel que $S(\omega) \geq \frac{S_{max}}{\sqrt{2}}$

On détermine alors les pulsations de coupure, telles que $S(\omega) = \frac{S_{max}}{\sqrt{2}}$

- D'après la question précédente $S_{max} = S(x=1)$
  $S_{max} = A = E$
- Par définition de la pulsation de capure

$$S(\omega) = \frac{E}{\sqrt{2}} = \frac{E}{\sqrt{1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2}}$$

Par identification:

$$1 = Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$\frac{1}{Q^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$\pm \frac{1}{Q} = x - \frac{1}{x}$$

$$\pm \frac{1}{Q}x = x^2 - 1$$

On obtient 2 équations du second degré

$x^2 - 1 + \frac{1}{Q}x = 0$	$x^2 - \frac{1}{Q}x - 1 = 0$
de discriminant $\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4$	de discriminant $\Delta = 4 + \frac{1}{Q^2}$
on a 2 racines réelles	on a 2 racines réelles

$x_1 = -\frac{1}{Q} + \sqrt{\Delta}{2} > 0$

$x_1' = -\frac{1}{Q} - \sqrt{\Delta}{2} < 0$

impossible physiquement

$x_2 = \frac{1}{Q} + \sqrt{\Delta}{2} > 0$

$x_2' = +\frac{1}{Q} - \sqrt{\Delta}{2} < 0$, impossible physiquement

Les 2 pulsations réduites de coupure sont $\begin{cases} x_1 = \frac{-1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \\ x_2 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \end{cases}$

Les pulsations de coupure sont alors $\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 x_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\Delta} \\ \omega_2 = \omega_0 x_2 = \frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\Delta} \end{cases}$

La largeur de la bande passante est alors :

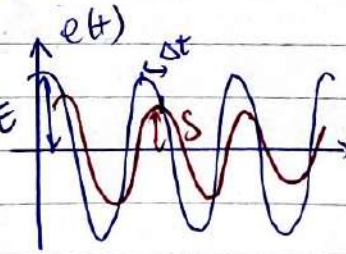
$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

$$= \frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\Delta} - \left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\Delta}\right)$$

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{\omega_0}{Q}}$$

(10) Pour obtenir ces graphiques,

- on doit envoyer en entrée plusieurs signaux à la suite de pulsation différentes. On doit viser au moins 10 points
- Pour une entrée donnée, on visualise sur l'oscilloscope la tension d'entrée et de sortie.
- Pour cette entrée donnée



→ mesurer l'amplitude d'entrée E

→ mesurer l'amplitude de sortie S

→ mesurer le décalage temporel Δt pour ensuite calculer le déphasage entre les 2 signaux.

On pourra ainsi avoir S en fonction de ω et φ en fonction de ω

(ii) • À la résonance, (= au maximum de S), on lit

$\omega_r = \omega_0 = 1 \times 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$ On le vérifie sur le graphique de la phase car S et E en phase à la résonance

• On lit graphiquement $S_{max} = 5V$

Pour trouver la largeur de la bande passante, on ~~prend~~ trace un trait à $\frac{S_{max}}{\sqrt{2}} = 3,5V$

• On lit ensuite $\omega_1 = 7 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$

$\omega_2 = 1,65 \times 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$

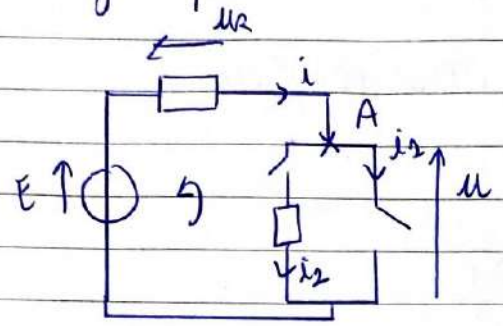
$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

Puis, d'après la q 9 : $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$

A.N : $Q = 1,05$ La valeur de Q est assez faible, la résonance n'est pas très piquée

Étude d'un circuit sous plusieurs angles

① Comme l'interrupteur est ouvert depuis très longtemps, on se situe en régime permanent continu. Le circuit est équivalent à 0^- :



On a directement
$i_1(0^-) = 0$
$i_2(0^-) = 0$

D'après la loi des noeuds en A : $i(0^-) = i_1(0^-) + i_2(0^-)$
$i(0^-) = 0$

D'après la loi des mailles orientée

$$u(0^-) + u_R(0^-) - E = 0$$

D'après la loi d'ohm en convention récepteur $u_R(0^-) = R\,i(0^-)$
$= 0$

D'où $u(0^-) = E$

② Par continuité de la tension aux bornes du condensateur

$$u(0^+) = u(0^-) = E$$

D'après la loi des mailles orientée en 0^+ :

$$u(0^+) + u_R(0^+) - E = 0$$

$$u_R(0^+) = E - u(0^+) = E - E = 0$$

D'après la loi d'ohm en convention récepteur $u_R(0^+) = R\,i(0^+)$

D'où $i(0^+) = 0$

D'après la loi des noeuds en A :

$$i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$$

$$i_1(0^+) = -i_2(0^+)$$

D'après la loi d'ohm en convention récepteur

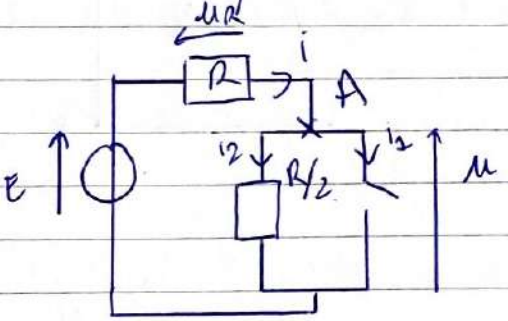
$$u(0^+) = \frac{R}{2} i_2(0^+)$$

$$i_2(0^+) = \frac{2u(0^+)}{R} = \frac{2E}{R}$$

Puis $i_1(0^+) = -i_2(0^+) = \frac{-2E}{R}$

③ Lorsque $t \to +\infty$, on se situe en régime permanent continu

Le circuit est équivalent à :



D'après le schéma :

$i_1(\infty) = 0$

On reconnaît un pont diviseur de tension

$$u(\infty) = \frac{R/2}{R/2 + R} E$$

$u(\infty) = \frac{E}{3}$

D'après la loi d'ohm en convention récepteur

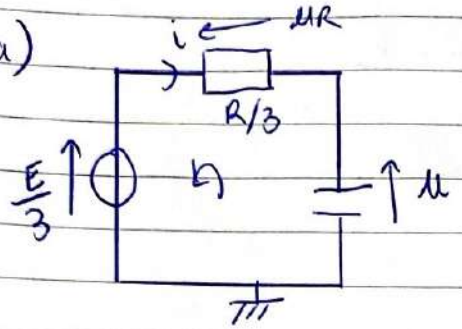
$$u(\infty) = \frac{R}{2} i_2(\infty)$$

$$i_2(\infty) = \frac{2u(\infty)}{R} = \frac{2E}{3R}$$

D'après la loi des noeuds en A $i(\infty) = i_1(\infty) + i_2(\infty)$
$= i_2(\infty)$

D'où $i(\infty) = \frac{2E}{3R}$

(4)(a)



D'après la loi des mailles orientée :

$u + u_R = \frac{E}{3}$ (1)

- D'après la loi d'Ohm en convention récepteur : $u_R = \frac{Ri}{3}$

(1) devient : $u + \frac{Ri}{3} = \frac{E}{3}$

- Pour un condensateur en convention récepteur : $i = C\frac{du}{dt}$

D'où

$$u + \frac{RC}{3}\frac{du}{dt} = \frac{E}{3}$$

On met sous forme canonique :

$$\frac{du}{dt} + \frac{3}{RC}u = \frac{E}{RC}$$

On pose $\tau = \frac{RC}{3}$, l'équation devient

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{3\tau}$$

c'est une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants et à second membre constant

(b) On résout cette équation différentielle

- solution homogène : $u_H(t) = A\exp(-\frac{t}{\tau})$, $A \in \mathbb{R}$ déterminée par les conditions initiales
- solution particulière : sous la même forme que le second membre, ici constant

$\frac{du_p}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\tau}u_p = \frac{E}{3\tau} \Rightarrow u_p = \frac{E}{3}$

• solution générale $u(t) = u_H(t) + u_p(t)$

$$u(t) = A\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + \frac{E}{3}$$

• conditions initiales. On avait à la question 2 :

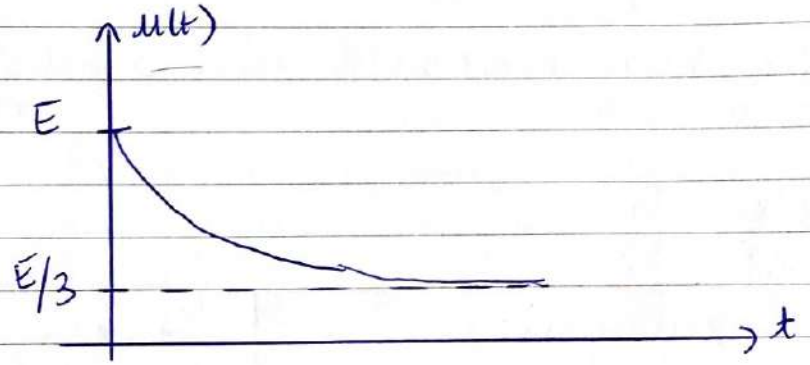
$$u(0) = E = A + \frac{E}{3} \Rightarrow A = E - \frac{E}{3}$$

$$A = \frac{2E}{3}$$

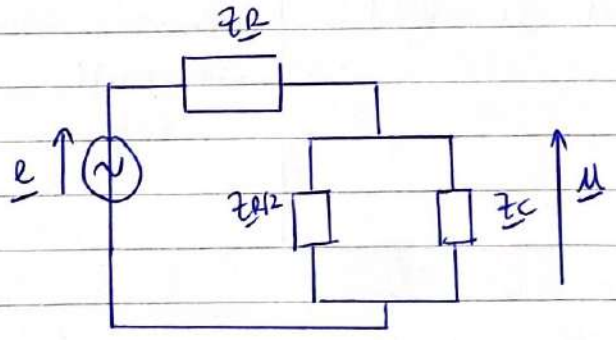
Ainsi $\forall t \geq 0$

$$u(t) = \frac{2E}{3}\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + \frac{E}{3}$$

(c)



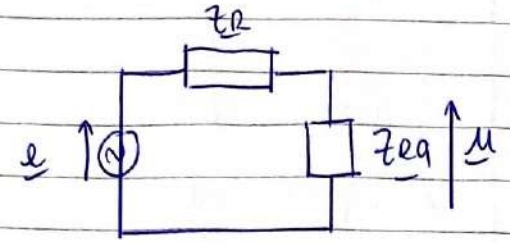
(5) On passe le circuit en complexes



$\underline{Z}_{R/2}$ et $\underline{Z}_C$ sont associées en parallèle :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_{R/2}} + \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{2}{R} + jC\omega$$

Le circuit équivalent est le suivant :



On reconnaît un pont diviseur de tension

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + \underline{Z_R}}\,\underline{e}$$

$$\underline{u} = \frac{1}{\frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_{eq}}} + 1}\,\underline{e}$$

$$\underline{u} = \frac{1}{R\left(\frac{2}{R} + jC\omega\right) + 1}\,\underline{e}$$

Puis $\underline{H} = \frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{1}{2 + jRC\omega + 1}$

$$= \frac{1}{3\left(1 + j\frac{RC\omega}{3}\right)}$$

$$\underline{H} = \frac{1/3}{1 + j\frac{RC}{2}\omega}$$

On met sous forme canonique. On pose $\omega_0 = \frac{2}{RC}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $H_0 = \frac{1}{2}$

D'où $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx} = \frac{1/3}{1 + jx}$

(6) Par définition du gain et du déphasage :

- $G = |\underline{H}| = \frac{1/3}{\sqrt{1 + x^2}}$

- $\varphi = \arg \underline{H} = \arg\left(\frac{1}{3}\right) - \arg(1 + jx)$

$$\varphi = -\arctan(x)$$

⑦

à basses fréquences

- $\underline{H} \underset{\substack{BF \\ \omega \to 0}}{\sim} H_0 = \frac{1}{3}$
- $G = |\underline{H}| = \frac{1}{3}$
- $G_{DB} = 20 \log G$
  $= 20 \log 1 - 20 \log 3$
  $= -20 \log 3$

  ← asymptote horizontale à $-20 \log 3$
- $\varphi = \arg \underline{H} = 0$

  ↳ asymptote horizontale à $\varphi = 0$

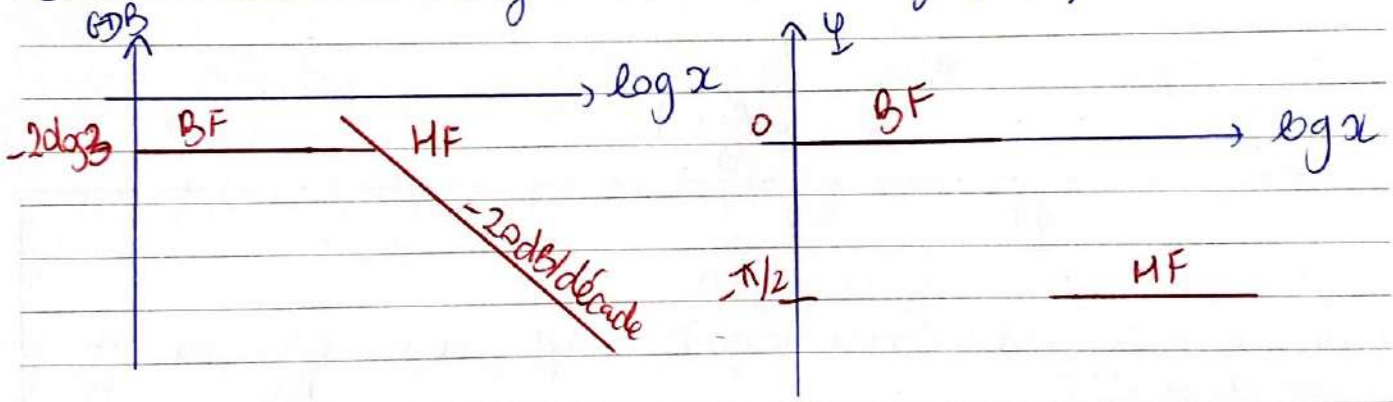
à hautes fréquences

- $\underline{H} \underset{\substack{HF \\ \omega \to +\infty}}{\sim} \frac{1/2}{jx}$
- $G = |\underline{H}| = \frac{1}{2x}$
- $G_{DB} = -20 \log 3 - 20 \log x$

  asymptote de pente -20 dB/décade
- $\varphi = \arg \underline{H} = \arg\left(\frac{1}{2}\right) - \arg(jx)$
  $= -\frac{\pi}{2}$

  asymptote horizontale à $-\frac{\pi}{2}$

On trace alors le diagramme de Bode asymptotique :



⑧ A hautes fréquences, ce diagramme de Bode de ce filtre présente une pente de -20 dB/décade, donc il est intégrateur à hautes fréquences

Démontrons le : à hautes fréquences $\underline{H} \sim \frac{1/3}{jx}$

$$\underline{H} \simeq \frac{1}{3} \times \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{3} \times \frac{1}{j\omega}$$

Puis, par définition de $\underline{H}$: $\underline{s} = \frac{\omega_0}{3} \times \frac{1}{j\omega} \underline{e}$

$$\underline{s} = \frac{\omega_0}{3} \int \underline{e}\, dt$$

Ainsi, à hautes fréquences, ce filtre est pseudo-intégrateur

(9) Par définition de la pulsation de coupure :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$$

- Ici $G_{max} = H_0 = \frac{1}{3}$

- D'où $\frac{1/3}{\sqrt{1+x_c^2}} = \frac{1/3}{\sqrt{2}}$

Par identification : $x_c^2 = 1$

$x_c = \pm 1$

D'où $\omega_c = \omega_0 = \frac{3}{RC}$

Puis par définition de la fréquence f_c et sa relation avec ω_c :

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{3}{RC}$$

$$\boxed{f_c = \frac{3}{2\pi RC}}$$

(10) (a) La pulsation/fréquence de coupure correspond à l'abscisse du point d'intersection des asymptotes à basses fréquences et à hautes fréquences.

graphiquement, on trouve $f_c = 200\,Hz$

(b) D'après la q 9 : $f_c = \frac{3}{2\pi RC} \Rightarrow \boxed{R = \frac{3}{2\pi R f_c}}$

A.N $C = 2{,}4 \times 10^{-6}$ F. c'est l'ordre de grandeur haut d'une capacité en TP

(M) On pose

- $e_1(t) = 5$
- $e_2(t) = 2\cos(0{,}5\omega_c t)$
- $e_3(t) = 2\cos(5\omega_c t + \frac{\pi}{3})$

Déterminons les signaux de sortie s_1, s_2, s_3 associés à e_1, e_2, e_3

- $e_1(t) = 5$.

Comme on a un filtre passe-bas, la valeur moyenne passe avec le gain maximal

$$s_1(t) = 5 \times G(0)$$
$$= 5 \times \frac{1}{3}$$

$s_1(t) = 1{,}7$ signal un peu atténué à cause du gain maximal

- $e_2(t) = 2\cos(0{,}5\omega_c t)$. Ce signal se situe dans la bande passante.

$$s_2(t) = 2 \times G(\omega = 0{,}5\omega_c)\cos(0{,}5\omega_c t + \varphi(\omega = 0{,}5\omega_c))$$

* graphiquement $G(\omega = 0{,}5\omega_c) = G(f = 0{,}5 f_c)$

$$= G(f = 100\,Hz)$$

On lit $G_{DB}(f = 100\,Hz) = -12$ dB

$$G(f = 100\,Hz) = 10^{\frac{G_{DB}(f=100Hz)}{20}}$$
$$= 0{,}25$$

* $\varphi = -\arctan(x)$

$\varphi = -\arctan(\frac{f}{f_c})$ $\varphi = -0{,}46$ rad

Ainsi $s_2(t) = 0{,}5\cos(0{,}5\omega_c t - 0{,}46)$ signal un peu atténué et un peu déphasé à cause du fait qu'on est presque à la limite de la bande passante

- $e_3(t) = 2\cos(5\omega_c t + \frac{\pi}{3})$: ce signal ne se situe pas dans la bande passante, il sera atténué

* $G(\omega = 5\omega_c t) = G(f = 5f_c)$
$= G(f = 1000\,Hz)$

On lit graphiquement : $G_{DB}(f = 1000\,Hz) = -24\,dB$

$G(f = 1000\,Hz) = 10^{\frac{G_{DB}(f=1000)}{20}}$
$= 0{,}063$

* $\varphi(f = 1000\,Hz) = -\arctan(\frac{f}{f_c})$
$= -1{,}37$ rad

→ signal très atténué et très déphasé : c'est normal, il n'est pas situé dans la bande passante

Ainsi $s_3(t) = 0{,}13\cos(5\omega_c t + \frac{\pi}{3} - 1{,}37)$

Par linéarité du filtre

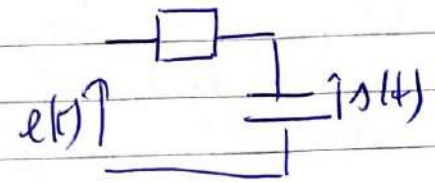
$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$

$s(t) = 1{,}7 + 0{,}5\cos(0{,}5\omega_c t - 0{,}46) + 0{,}13\cos(5\omega_c t + \frac{\pi}{3} - 1{,}37)$

(12) Pour construire un filtre moyenneur, on doit construire un filtre passe-bas qui ne conserve que la valeur moyenne. Il faut donc atténuer le fondamental et tous les pics suivants dans le spectre du signal d'entrée.

- le fondamental a une fréquence $f = \frac{1}{T} = 50\,Hz$
- on cherche un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est bien inférieure à f

• le filtre passe-bas le plus classique est



de pulsation de coupure

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

On choisit $f_c = 5\,Hz = \frac{\omega_c}{2\pi}$

D'où $\frac{1}{2\pi RC} = 5$

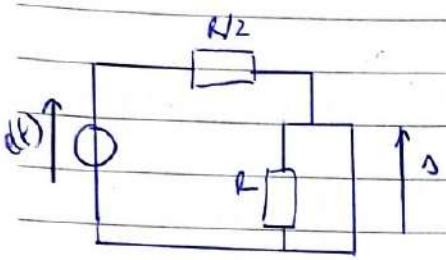
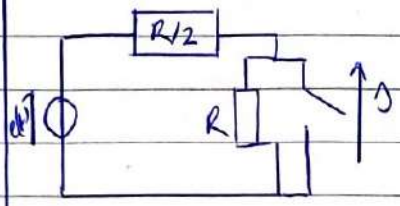
on pose $C = 100\,nF$, ordre de grandeur classique par les TPs.

$$R = \frac{1}{2\pi \times C \times f_c}$$

A.N $R = 318 \times 10^3\ \Omega$

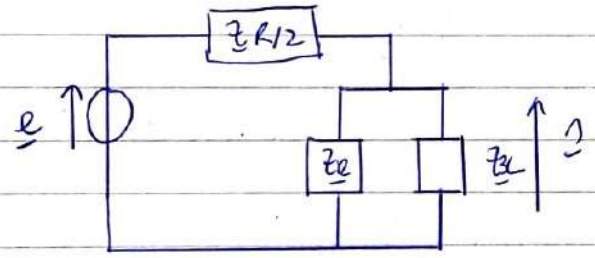
Un dernier filtre

① On réalise des circuits équivalents à hautes et basses fréquences

Basses fréquences	Hautes fréquence
	 On reconnait un pont diviseur de tension
$s = 0$ (tension aux bornes d'un fil)	$s = \frac{R}{R+\frac{R}{2}} e = \frac{2R}{3R} e = \frac{2}{3} e$

On a alors un <u>filtre passe-haut</u>

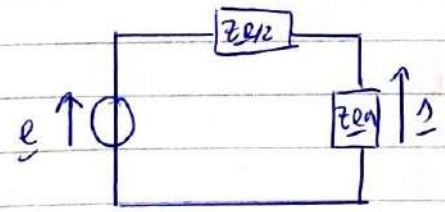
② On passe le circuit en complexes (car régime sinusoïdal forcé)



$\underline{Z}_L$ et $\underline{Z}_R$ sont associées en parallèle, donc

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_{SL}} + \frac{1}{\underline{Z}_R} = \frac{1}{3jL\omega} + \frac{1}{R}$$

Le circuit équivalent est le suivant :



On reconnait un pont diviseur de tension !

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_{R/2}} \underline{e}$$

Puis $\underline{s} = \dfrac{1}{\dfrac{z_{eq/2}}{z_{eq}} + 1}\ \underline{e}$.

$$= \frac{1}{1 + \frac{R}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{3jLw}\right)}$$

$$\underline{s} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{R}{6jLw}}\ \underline{e}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{6jLw}{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \times 6jLw + R}$$

$$= \frac{6jLw}{9jLw + R}$$

$$\underline{H} = \frac{6j\frac{Lw}{R}}{1 + \frac{9jLw}{R}}$$

On pose $w_0 = \dfrac{R}{9L}$ et $x = \dfrac{w}{w_0}$ D'où

$$\underline{H} = \frac{\frac{2}{3} \times 9\frac{jLw}{R}}{1 + jx}$$

$$\underline{H} = \frac{\frac{2}{3}jx}{1 + jx} = \frac{H_0 jx}{1 + jx} \text{ avec } H_0 = \frac{2}{3}$$

(3) Par définition du gain $G = |\underline{H}|$

$$= \frac{|H_0| x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \frac{|H_0| x}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}$$

Puis $G = \dfrac{|H_0|}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

En observant cette fonction, elle est maximale lorsque $x \to +\infty$. Le gain maximal est donc $|H_0| = \frac{2}{3}$ ici

④ Par définition de la pulsation de coupure :

$$G(x_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{2/3}{\sqrt{2}} \quad \text{d'après q3}$$

$$\frac{|H_0|}{\sqrt{1+\frac{1}{x_c^2}}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{1+1}}$$

Par identification $\frac{1}{x_c^2} = 1$

$x_c^2 = 1$

$x_c = \pm 1$

Ainsi $\omega_c = \omega_0$

⑤ On étudie la fonction de transfert à hautes et basses fréquences

Basses fréquences

$\underline{H} \underset{BF}{\sim} \dfrac{H_0 jx}{1}$

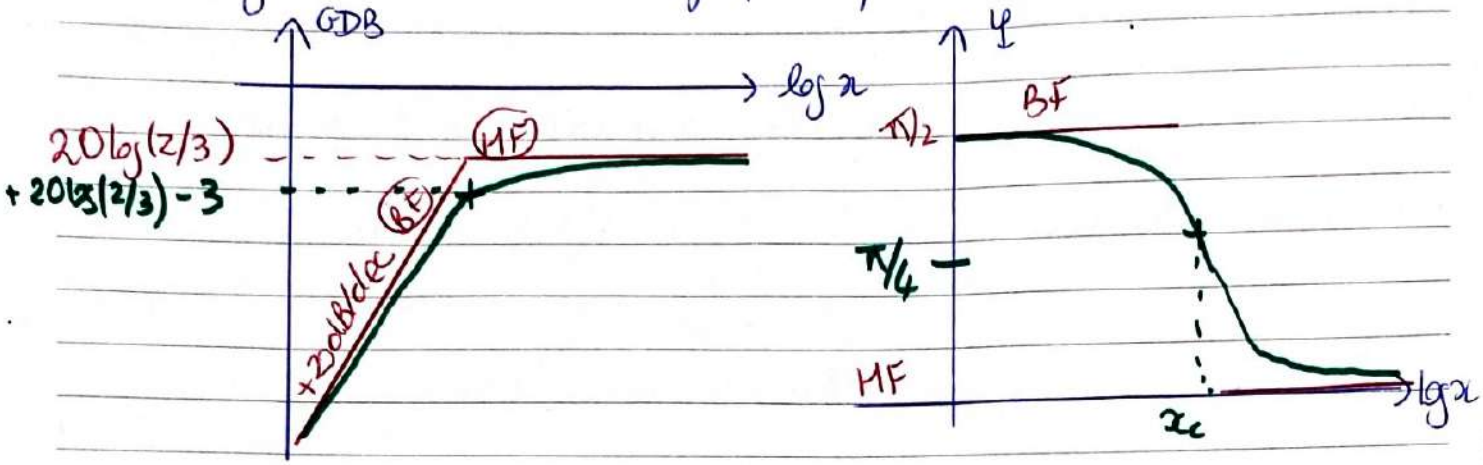
- $G = |\underline{H}| = |H_0 jx| = H_0 x$
- $G_{DB} = 20\log G = 20\log H_0 + 20\log x$
  ↳ asymptote de pente +20 dB/décade
- $\varphi = \arg \underline{H} = \arg(H_0 jx) = +\frac{\pi}{2}$
  asymptote horizontale à $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Hautes fréquences

$\underline{H} \underset{HF}{\sim} \dfrac{H_0 jx}{jx} = H_0$

- $G = |\underline{H}| = |H_0| = H_0$
- $G_{DB} = 20\log G = 20\log H_0$
  ↳ asymptote horizontale à $G_{DB} = 20\log H_0$
- $\varphi = \arg \underline{H} = \arg H_0 = 0$
  ↳ asymptote horizontale à $\varphi = 0$

Le diagramme de Bode asymptotique est le suivant :



Pour tracer le diagramme de Bode réel, il nous manque un point, la pulsation de coupure

- $G(x_c) = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \rightarrow \underline{G_{DB}(x_c) = 20 \log H_0 - 3\,dB}$

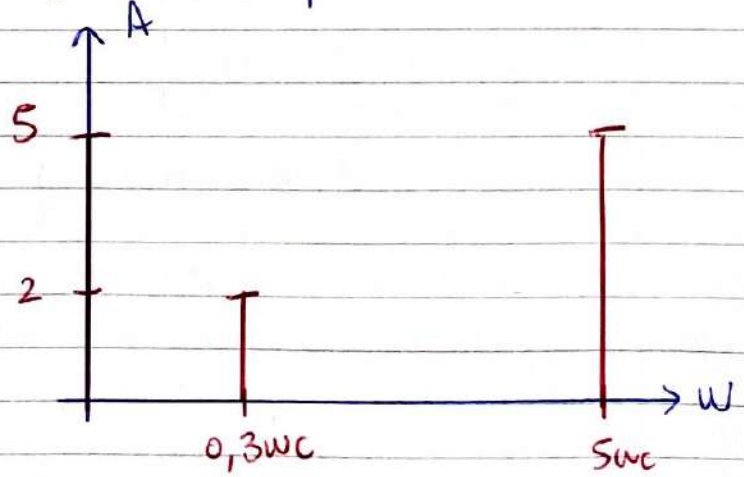
- $\varphi(x_c = 1) = \arg(H_0 j) - \arg(1 + j)$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

On place ce point en vert sur le diagramme précédent et on trace le diagramme réel en vert

⑥ Le spectre en amplitude de $e(t)$ est le suivant :



⑦ On décompose le signal d'entrée :

$$\begin{cases} e_1(t) = 5 \\ e_2(t) = 2\cos(0,3\omega_c t) \\ e_3(t) = 5\cos(5\omega_c t + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

- $e_1(t) = 5$

$s_1(t) = 0$ car la valeur moyenne ne passe pas dans un passe-haut

- $s_2(t) = G(\omega = 0,3\omega_c) \times 2 \times \cos(0,3\omega_c t + \varphi(\omega = 0,3\omega_c))$

$G(\omega = 0,3\omega_c) = G(x = \frac{0,3\omega_c}{\omega_c})$ $\quad \varphi(\omega = 0,3\omega_c) = \varphi(x = 0,3)$

A.N $G(x = 0,3) = \frac{H_0 \times 0,3}{\sqrt{1+0,3^2}}$ A.N $\varphi(0,3\omega_c) = \frac{\pi}{2} - \arctan(0,3)$

$= 0,19$ $\quad = 1,28$ rad

D'où $s_2(t) = 0,38\cos(0,3\omega_c t + 1,28)$ signal déphasé et beaucoup atténué, car il n'est pas dans la bande passante

- $s_3(t) = G(\omega = 3\omega_c) \times 5\cos(5\omega_c t + \frac{\pi}{2} + \varphi(\omega = 3\omega_c))$

$G(\omega = 5\omega_c) = G(x = 5)$ $\quad \varphi(\omega = 5\omega_c) = \varphi(x = 5)$

A.N $= \frac{H_0 \times 5}{\sqrt{1+5^2}}$ A.N $= \frac{\pi}{2} - \arctan(5)$

$= 0,6$ $\quad = 0,2$ rad

D'où $s_3(t) = 3\cos(5\omega_c t + 1,78)$ signal un peu atténué (car $H_0 < 1$) et signal dans la bande passante, très peu déphasé

Par linéarité du filtre $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$

$$s(t) = 0,38\cos(0,3\omega_c t + 1,28) + 3\cos(5\omega_c t + 1,78)$$

(8) (a) Le signal envoyé a une fréquence très faible par rapport à la fréquence de capure :

$f \ll f_c$

La fonction de transfert $\underline{H} = \frac{H_0 \, jx}{1+jx}$ est équivalente

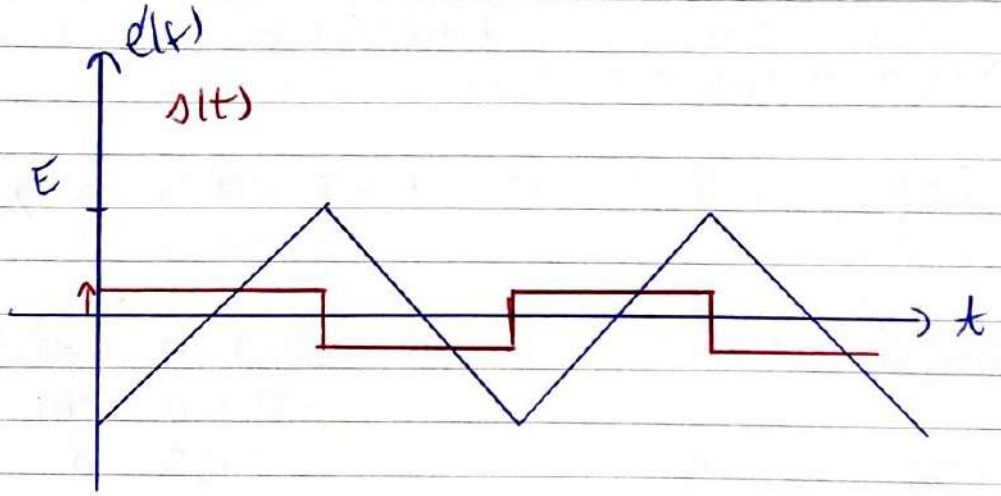
à basses fréquences à : $\underline{H} \underset{BF}{\sim} H_0 \, jx$

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}'} \simeq H_0 \, j \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\underline{s} \simeq \frac{H_0}{\omega_0} \times j\omega \underline{e}'$$

$$\underline{s} \simeq \frac{H_0}{\omega_0} \times \frac{d\underline{e}'}{dt}$$

Ainsi, à basses fréquences, le signal de sortie est proportionnel à la dérivée du signal d'entrée



L'amplitude du signal de sortie est beaucoup plus faible que celle du signal d'entrée car le signal n'est pas situé dans la bande passante