

## Réponses temporelles des SLCI



Robot NAO (ALDEBARAN Robotics)

### Objectifs

La finalité de ce cours est l'analyse des réponses temporelles des SLCI fondamentaux – dont ceux du premier et du second ordre – soumis aux entrées types (impulsion, échelon et rampe). Il s'agit de pouvoir évaluer des performances en termes de précision et de rapidité mais aussi de pouvoir identifier les constantes caractéristiques d'un modèle de connaissance voire même associer à une réponse temporelle un modèle comportement.

## Table des matières

|          |                                                                     |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>                                                 | <b>3</b>  |
| 1.1      | Ordre et classe des systèmes . . . . .                              | 3         |
| 1.2      | Systèmes fondamentaux . . . . .                                     | 4         |
| 1.3      | Démarche d'étude des réponses temporelle des systèmes . . . . .     | 8         |
| <b>2</b> | <b>Étude temporelle des systèmes fondamentaux</b>                   | <b>9</b>  |
| 2.1      | Systèmes intégrateurs . . . . .                                     | 9         |
| 2.2      | Systèmes du premier ordre . . . . .                                 | 10        |
| 2.3      | Systèmes du second ordre sur-amortis ( $\xi > 1$ ) . . . . .        | 18        |
| 2.4      | Systèmes du second ordre en régime critique ( $\xi = 1$ ) . . . . . | 26        |
| 2.5      | Systèmes du second ordre sous-amortis ( $0 < \xi < 1$ ) . . . . .   | 29        |
| <b>3</b> | <b>Identification d'un modèle de comportement</b>                   | <b>39</b> |
| 3.1      | Modèle du premier ordre . . . . .                                   | 39        |
| 3.2      | Modèle du second ordre . . . . .                                    | 40        |
| <b>4</b> | <b>Performances des systèmes asservis</b>                           | <b>44</b> |
| 4.1      | Stabilité . . . . .                                                 | 45        |
| 4.2      | Précision . . . . .                                                 | 48        |
| 4.3      | Rapidité . . . . .                                                  | 51        |



# 1 Introduction

## 1.1 Ordre et classe des systèmes

Le comportement dynamique d'un système linéaire continu et invariant, d'entrée  $e(t)$  et de sortie  $s(t)$ , obéit à une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type :

$$a_0 e(t) + a_1 \frac{de}{dt}(t) + \dots + a_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) = b_0 s(t) + b_1 \frac{ds}{dt}(t) + \dots + b_n \frac{d^n s}{dt^n}(t)$$

et vérifiant le principe de causalité des systèmes ( $m \leq n$ ).

### Définition 1.1 (Ordre d'un système)

L'ordre d'un système (causal) correspond au degré de dérivation le plus élevé du signal de sortie dans l'équation différentielle traduisant son comportement.

En supposant, sans pertes de généralités, des conditions initiales nulles, la fonction de transfert des systèmes étudiés pourra toujours se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n}$$

où le degré  $n$  du polynôme au dénominateur – associé à l'équation caractéristique de l'équation différentielle vérifiée par  $s(t)$  – est l'ordre du système. On appelle zéros  $z_i$  les racines réelles ou complexes du numérateur et pôles  $p_j$  celles du dénominateur de la fonction de transfert. Leur identification permet de décomposer toute fonction de transfert sous la forme d'un produit de fonctions élémentaires associées à ses pôles et ses zéros :

$$H(p) = \frac{\text{Gain} \times \text{Numérateur d'ordre 1 (zéro réel négatif)} \times \text{Numérateur d'ordre 2 (paire de zéros complexes conjugués)}}{\text{Intégrateur (pôle nul)} \times \text{Premier ordre (pôle réel négatif)} \times \text{Second ordre (paire de pôles complexes conjugués)}}$$

$$H(p) = \frac{K \times \prod_{\beta} (1 + \tau_{\beta} p) \times \prod_{\delta} \left( 1 + \frac{2\xi_{\delta}}{\omega_{0\delta}} p + \frac{p^2}{\omega_{0\delta}^2} \right)}{p^{\alpha} \times \prod_{\kappa} (1 + \tau_{\kappa} p) \times \prod_{\mu} \left( 1 + \frac{2\xi_{\mu}}{\omega_{0\mu}} p + \frac{p^2}{\omega_{0\mu}^2} \right)}$$

Après factorisation complète, on peut faire apparaître le gain  $K$  et la classe  $\alpha$  du système correspondant au nombre d'intégrateurs.

### Définition 1.2 (Classe d'une fonction de transfert)

La classe d'une fonction de transfert correspond à son nombre de pôles nuls, c'est-à-dire le nombre d'intégrateurs.

## 1.2 Systèmes fondamentaux

La réponse temporelle d'un système quelconque est généralement la superposition de réponses de systèmes fondamentaux qu'il est indispensable de bien connaître pour pouvoir analyser la réponse globale. De plus, en choisissant une plage de fonctionnement donnée ou en faisant quelques hypothèses de modélisation raisonnables, on peut fréquemment assimiler le comportement d'un système réel à celui d'un système du premier ou du second ordre. Ceci est intéressant car ces systèmes sont les seuls dont les propriétés soient à la fois bien connues et en nombre limité.

### 1.2.1 Systèmes à action proportionnelle

Le comportement de nombreux systèmes peut être modélisé par une constante, c'est-à-dire une relation de proportionnalité directe entre l'entrée et la sortie.

#### Définition 1.3 (Système à action proportionnelle)

Un système continu et invariant est dit à action proportionnelle si pour toute entrée  $e(t)$  sa sortie  $s(t)$  lui est proportionnelle :

$$s(t) = K e(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad S(p) = K E(p)$$

La constante de proportionnalité  $K$  est appelée le gain du système.

La fonction de transfert d'un système à action proportionnelle peut s'écrire :

$$\begin{array}{c} E(p) \rightarrow \boxed{K} \rightarrow S(p) \end{array} \quad H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K$$

#### Exemple 1.1 (Ressort de compression)

La relation reliant l'effort  $F(t)$  développé par un ressort de compression et son allongement  $\Delta x(t)$  est donnée par :

$$F(t) = k \Delta x(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \Delta X(p) \xrightarrow{\quad} \boxed{k} \xrightarrow{\quad} F(p)$$

où  $k$  est la raideur du ressort et le gain du système.



#### Exemple 1.2 (Réducteur de vitesse à roue et vis sans fin)

Le rapport de réduction entre les vitesses angulaires d'une vis sans fin et une dentée d'un système roue et vis sans fin est proportionnel au rapport du nombre de filets de la vis et au nombre de dents de la roue. Si on note  $\omega_1(t)$  la vitesse de rotation de la vis qui possède  $Z_1$  filets et  $\omega_2(t)$  celle de la roue qui possède  $Z_2$  dents, la condition d'engrènement se traduit par la relation :

$$Z_1 \omega_1(t) = Z_2 \omega_2(t)$$



On peut traduire cette relation dans le domaine de Laplace par la fonction de transfert :

$$\frac{\Omega_2(p)}{\Omega_1(p)} = \frac{Z_1}{Z_2} = K$$

Parmi les systèmes modélisables par un gain pur, on retiendra :

- les transmetteurs de puissances (engrenages, systèmes roue et vis sans fin, systèmes pignon-crémaillère, systèmes vis-écrou, etc.) ;
- les pré-actionneurs (distributeur, hacheur, variateur, etc.) ;
- les capteurs (potentiomètre, génératrice tachymétrique, etc.).

### Remarque 1.1 (Étude des réponses temporelles ?)

L'étude des réponses temporelles d'un système à action proportionnelle présente peu d'intérêt puisqu'elle se limite à appliquer une transformation d'amplitude du graphe de l'entrée  $e(t)$  d'un facteur  $K$ .

## 1.2.2 Systèmes intégrateurs

L'application des lois de la physique conduit souvent à l'expression d'une relation intégrale entre deux grandeurs. C'est par exemple le cas du principe fondamental de la dynamique qui relie une différence d'effort à la variation de vitesse d'un objet.

### Définition 1.4 (Système intégrateur)

Un système intégrateur est un système dynamique linéaire continu et invariant dont le comportement est caractérisé par une équation différentielle du type :

$$\dot{s}(t) = K e(t) \iff s(t) = s(0) + \int_0^t K e(t) dt$$

où  $e(t)$  est le signal d'entrée,  $s(t)$  celui de sortie et  $K$  une constante réelle appelée le gain.

La transformée de Laplace de l'équation différentielle conduit à :

$$\dot{s}(t) = K e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} pS(p) - s(0) = K E(p)$$

En supposant une condition initiale nulle  $s(0) = 0$ , la fonction de transfert d'un système intégrateur peut s'écrire :

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{E(p)} & \boxed{\frac{K}{p}} & \xrightarrow{S(p)} \end{array} \qquad H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p}$$

Dans le cas où le gain  $K$  est unitaire, on parle d'intégrateur pur. Dans tous les cas, un intégrateur est caractérisé par un pôle nul.

### 1.2.3 Systèmes du premier ordre

#### Définition 1.5 (Système du premier ordre)

Un système du premier ordre est un système dynamique linéaire continu et invariant dont le comportement est caractérisé par une équation différentielle du type :

$$s(t) + \tau \dot{s}(t) = K e(t)$$

où  $e(t)$  est le signal d'entrée,  $s(t)$  celui de sortie et où les constantes caractéristiques sont :

- $K$  le gain du système (unité :  $[s]/[e]$ ) ;
- $\tau$  la constante de temps du système (en secondes).

En supposant une condition initiale nulle  $s(0) = 0$ , la fonction de transfert d'un système du premier ordre peut s'écrire :

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{E(p)} & \boxed{\frac{K}{1 + \tau p}} & \xrightarrow{S(p)} \end{array} \quad H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert d'un système du premier ordre fait apparaître un pôle réel négatif :

$$1 + \tau p = 0 \iff p = \frac{-1}{\tau} < 0$$

### 1.2.4 Systèmes du second ordre

#### Définition 1.6 (Système du second ordre)

Un système du second ordre est un système dynamique linéaire continu et invariant dont le comportement est caractérisé par une équation différentielle du type :

$$s(t) + \frac{2\xi}{\omega_0} \dot{s}(t) + \frac{1}{\omega_0^2} \ddot{s}(t) = K e(t)$$

où  $e(t)$  est le signal d'entrée,  $s(t)$  celui de sortie et où les constantes caractéristiques sont :

- $K$  le gain du système (unité :  $[s]/[e]$ ) ;
- $\omega_0$  la pulsation propre du système non amorti (en rad/s) ;
- $\xi$  le facteur d'amortissement (sans unité).

En supposant des conditions initiales nulles  $s(0) = 0$  et  $\dot{s}(0) = 0$ , la fonction de transfert d'un système du second ordre peut s'écrire :

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{E(p)} & \boxed{\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} & \xrightarrow{S(p)} \end{array} \quad H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert d'un système du second ordre est un trinôme du second degré de discriminant :

$$\Delta = \frac{4}{\omega_0^2} (\xi^2 - 1)$$

Comme  $\omega_0$  est un réel, le signe de ce discriminant ne dépend que de la valeur de  $\xi$ . Ainsi, un système du second ordre peut être caractérisé par :

- deux pôles réels négatifs si  $\xi > 1$  ( $\Delta > 0$ )

$$p_{1/2} = \omega_0 \left( -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right) < 0$$

tels que la fonction de transfert puisse s'écrire comme le produit de deux fonctions du premier ordre :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

de constantes de temps  $\tau_i = -1/p_i$  ( $i = 1, 2$ ) vérifiant :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

On parle de régime apériodique ou de comportement sur-amorti.

- un pôle réel négatif double si  $\xi = 1$  ( $\Delta = 0$ )

$$p_{12} = -\omega_0 < 0$$

tel que la fonction de transfert puisse se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)^2}$$

de constante de temps

$$\tau = \frac{1}{\omega_0}$$

On parle de régime apériodique critique ou simplement critique.

- deux pôles complexes à partie réelle négative si  $0 < \xi < 1$  ( $\Delta < 0$ )

$$p_{1/2} = \omega_0 \left( -\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2} \right) \in \mathbb{C}$$

avec  $j$  la variable complexe. La fonction de transfert n'est pas simplifiable :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On parle de régime pseudo-oscillant ou de comportement sous-amorti.

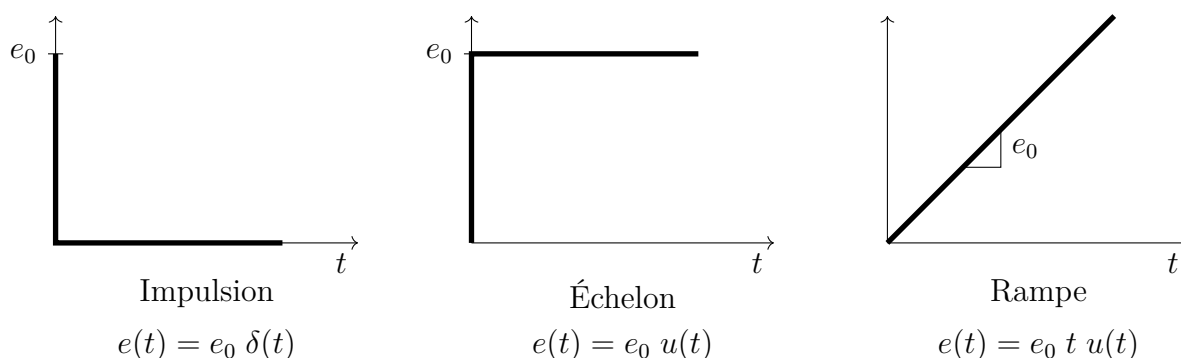
- deux pôles imaginaires purs si  $\xi = 0$  dans le cas des oscillateurs harmoniques.

| Système               | Fonction de transfert                                           | Constante(s) caractéristique(s)                                                                                          |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Gain pur              | $K$                                                             | $K$ : gain ( $[s]/[e]$ )                                                                                                 |
| Intégrateur           | $\frac{K}{p}$                                                   | $K$ : gain ( $[s]/[e] \cdot s^{-1}$ )                                                                                    |
| 1 <sup>er</sup> ordre | $\frac{K}{1 + \tau p}$                                          | $K$ : gain ( $[s]/[e]$ ) ;<br>$\tau$ : constante de temps (s).                                                           |
| 2 <sup>e</sup> ordre  | $\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ | $K$ : gain ( $[s]/[e]$ ) ;<br>$\omega_0$ : pulsation propre non amorti (rad/s) ;<br>$\xi$ : facteur d'amortissement (-). |

TABLE 1 – Systèmes fondamentaux.

### 1.3 Démarche d'étude des réponses temporelle des systèmes

La réponse temporelle d'un système dépend de son comportement mais aussi de l'entrée imposée. Le principal objectif de l'étude temporelle des systèmes est d'étudier pour pouvoir comparer leurs comportements. Pour cela on utilisera une des trois entrées types :



tout en sachant que l'entrée en échelon est la plus communément utilisée pour identifier le comportement des systèmes. La réponse impulsionnelle d'un système permet d'étudier son comportement à une variation brusque de l'entrée. La réponse à une rampe d'un système permet d'étudier son comportement en suivi d'une consigne.

Pour chaque système, de fonction de transfert supposée connue  $H(p)$ , le principe de calcul de sa réponse temporelle  $s(t)$  à une entrée  $e(t)$  donnée sera toujours :

1. expression de la transformée de Laplace du signal d'entrée  $E(p)$  ;
2. expression de la réponse du système dans le domaine de Laplace  $S(p) = H(p)E(p)$  ;
3. décomposition en éléments simples de  $S(p)$  ;
4. identification des fonctions élémentaires et de leurs transformées de Laplace inverses ;
5. assemblage des contributions et expression de la réponse temporelle  $s(t)$ .



## 2 Étude temporelle des systèmes fondamentaux

### 2.1 Systèmes intégrateurs

#### Proposition 2.1 (Réponse impulsionnelle d'un système intégrateur)

Si un système intégrateur de gain  $K$  est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme  $e(t) = e_0 \delta(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K e_0 u(t)$$

*Démonstration.* Si on impose une entrée de la forme  $e(t) = e_0 \delta(t)$  à un système intégrateur, alors l'expression de sa réponse sera dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K}{p} e_0 = \frac{K e_0}{p}$$

dont la transformée de Laplace inverse est un échelon d'expression temporelle :

$$s(t) = K e_0 u(t)$$

□

La réponse impulsionnelle d'un système intégrateur possède toutes les caractéristiques de la fonction échelon (figure 1a).

#### Proposition 2.2 (Réponse indicielle d'un système intégrateur)

Si un système intégrateur de gain  $K$  est soumis à une entrée indicielle de la forme  $e(t) = e_0 u(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K e_0 t u(t)$$

*Démonstration.* Si on impose une entrée de la forme  $e(t) = e_0 u(t)$  à un système intégrateur, alors l'expression de sa réponse sera dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K}{p} \frac{e_0}{p} = \frac{K e_0}{p^2}$$

dont la transformée de Laplace inverse est une rampe d'expression temporelle :

$$s(t) = K e_0 t u(t)$$

□

La réponse indicielle d'un système intégrateur possède toutes les caractéristiques d'une rampe (figure 1b).

#### Proposition 2.3 (Réponse à une rampe d'un système intégrateur)

Si un système intégrateur de gain  $K$  est soumis à une entrée en rampe de la forme  $e(t) = e_0 t u(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = \frac{1}{2} K e_0 t^2 u(t)$$

*Démonstration.* Si on impose une entrée de la forme  $e(t) = e_0 t u(t)$  à un système intégrateur, alors l'expression de sa réponse sera dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K}{p} \frac{e_0}{p^2} = \frac{K e_0}{2} \frac{2}{p^3}$$

dont la transformée de Laplace inverse est une parabole d'expression temporelle :

$$s(t) = \frac{K e_0}{2} t^2 u(t) \quad \square$$

La réponse à une rampe d'un système intégrateur possède toutes les caractéristiques d'une parabole (figure 1c).

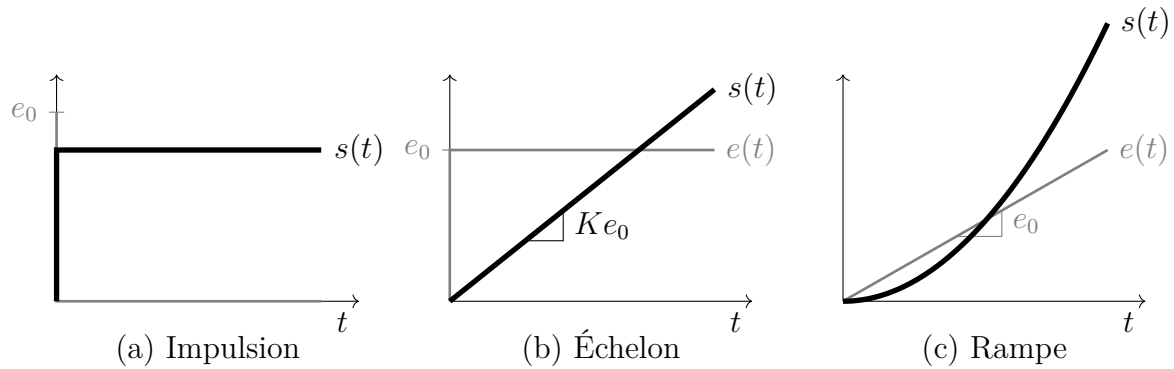


FIGURE 1 – Réponses temporelles d'un système intégrateur.

Un système intégrateur a, par définition, une action proportionnelle (gain  $K$ ) et une action intégrale (intégrateur pur  $1/p$ ). L'action intégrale signifie que la réponse d'un système intégrateur correspond à l'intégrale du signal d'entrée. L'action proportionnelle se surimpose en multipliant simplement le signal de sortie par  $K$ .

## 2.2 Systèmes du premier ordre

### 2.2.1 Réponse impulsionnelle

#### Proposition 2.4 (Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre)

Si un système du premier ordre, de gain  $K$  et de constante de temps  $\tau$ , est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme  $e(t) = e_0 \delta(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = \frac{K e_0}{\tau} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) u(t)$$

*Démonstration.* Si on impose une entrée de la forme  $e(t) = e_0 \delta(t)$  à un système du premier ordre, alors l'expression de sa réponse sera dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} e_0 = \frac{K e_0}{\tau} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}$$

où l'on reconnaît immédiatement la transformée de Laplace de la réponse :

$$s(t) = \frac{K e_0}{\tau} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) u(t)$$

□

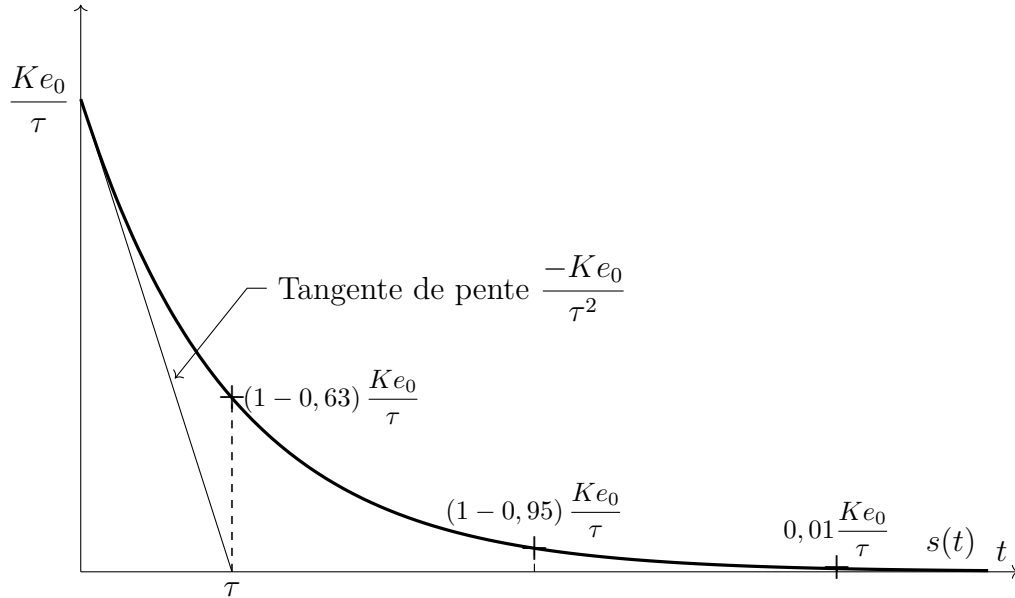


FIGURE 2 – Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre.

Un exemple de réponse temporelle d'un système du premier ordre à une impulsion est représenté sur la figure 2. Cette réponse est caractérisée par :

- une valeur initiale non nulle  $s(0) = \frac{K e_0}{\tau}$  ;

En calculant la limite de l'expression temporelle, il vient :

$$s(0) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{K e_0}{\tau} \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)}_{=1} = \frac{K e_0}{\tau}$$

ce que l'on retrouve évidemment en exploitant le théorème de la valeur initiale :

$$s(0) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{K}{1 + \tau p} e_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{K e_0 p}{1 + \tau p} = \frac{K e_0}{\tau}$$

- une tangente à l'origine de pente  $\dot{s}(0) = \frac{-K e_0}{\tau^2}$  ;

L'expression de la pente à l'origine peut être déterminée en calculant  $\dot{s}(0)$ . À partir de l'expression de la dérivée de réponse temporelle

$$\dot{s}(t) = \frac{d\left(\frac{K e_0}{\tau} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)}{dt} u(t) = \frac{-K e_0}{\tau^2} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) u(t)$$

il vient la tangente à l'origine :

$$\dot{s}(0) = \frac{-K e_0}{\tau^2}$$

- une réponse décroissante si  $K e_0 > 0$  ;  
En dérivant l'expression de la réponse temporelle, il vient :

$$\dot{s}(t) = \frac{d \left( \frac{K e_0}{\tau} \exp \left( \frac{-t}{\tau} \right) \right)}{dt} u(t) = \frac{-K e_0}{\tau^2} \exp \left( \frac{-t}{\tau} \right) u(t) < 0$$

- une limite finie  $s(\infty) = 0$  vers laquelle converge asymptotiquement la réponse.  
En calculant la limite de l'expression temporelle, il vient :

$$s(\infty) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K e_0}{\tau} \underbrace{\exp \left( \frac{-t}{\tau} \right)}_{\rightarrow 0} = 0$$

ce que l'on retrouve évidemment en exploitant le théorème de la valeur finale :

$$s(\infty) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{K}{1 + \tau p} e_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K e_0 p}{1 + \tau p} = 0$$

De plus, en regardant la pente de la tangente à la réponse au temps grand, correspondant à la limite de la dérivée de l'expression de la réponse temporelle, il vient :

$$\dot{s}(\infty) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-K e_0}{\tau^2} \underbrace{\exp \left( \frac{-t}{\tau} \right)}_{\rightarrow 0} u(t) = 0$$

signifiant que la tangente finale est de pente nulle et donc que la réponse possède une asymptote finale horizontale.

En plus des deux asymptotes initiales et finales, le tracé de la réponse temporelle peut se faire à partir de trois points caractéristiques qu'il est indispensable de connaître :

| $t$                     | $\tau$ | $3\tau$ | $5\tau$ |
|-------------------------|--------|---------|---------|
| $1 - \frac{s(t)}{s(0)}$ | 63 %   | 95 %    | 99 %    |

### 2.2.2 Réponse indicielle

#### Proposition 2.5 (Réponse indicielle d'un système du premier ordre)

Si un système du premier ordre, de gain  $K$  et de constante de temps  $\tau$ , est soumis à une entrée indicielle de la forme  $e(t) = e_0 u(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K e_0 \left[ 1 - \exp \left( \frac{-t}{\tau} \right) \right] u(t)$$

*Démonstration.* Si on impose une entrée de la forme  $e(t) = e_0 u(t)$  à un système du premier ordre, alors l'expression de sa réponse sera dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \frac{e_0}{p} = \frac{K e_0}{p(1 + \tau p)}$$

Pour déterminer la transformée de Laplace inverse de cette fraction rationnelle, il est nécessaire de la décomposer en éléments simples sous la forme :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{1}{\tau}}$$

telle que la réponse temporelle soit donnée par :

$$s(t) = \left[ A + B \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] u(t)$$

avec les coefficients obtenus à partir des relations :

$$A = \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = K e_0$$

$$B = \lim_{p \rightarrow -1/\tau} \left( p + \frac{1}{\tau} \right) S(p) = -K e_0$$

□

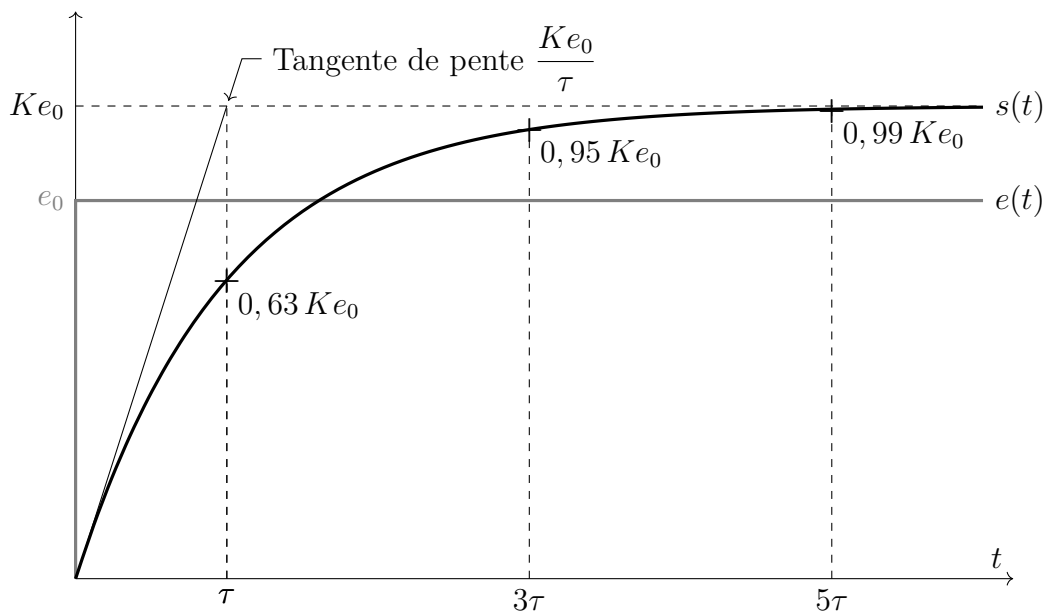


FIGURE 3 – Réponse indicielle d'un système du premier ordre.

Un exemple de réponse temporelle d'un système du premier ordre à un échelon est représenté sur la figure 3. Cette réponse est caractérisée par :

- une valeur initiale nulle  $s(0) = 0$ ;

En calculant la limite de l'expression temporelle, il vient :

$$s(0) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{t \rightarrow 0} K e_0 \left[ 1 - \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)}_{=1} \right] = 0$$

ce que l'on retrouve évidemment en exploitant le théorème de la valeur initiale :

$$s(0) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{K}{1 + \tau p} \frac{e_0}{p} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{K e_0}{1 + \tau p} = 0$$

- une tangente à l'origine de pente  $\dot{s}(0) = \frac{K e_0}{\tau}$ ;

L'expression de la pente à l'origine peut être déterminée en calculant  $\dot{s}(0)$ . À partir de l'expression de la dérivée de réponse temporelle

$$\dot{s}(t) = \frac{d \left( K e_0 \left[ 1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] \right)}{dt} u(t) = \frac{K e_0}{\tau} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) u(t)$$

il vient la tangente à l'origine :

$$\dot{s}(0) = \frac{K e_0}{\tau}$$

- une réponse sans dépassement, croissante si  $K e_0 > 0$ ;

En dérivant l'expression de la réponse temporelle, il vient :

$$\dot{s}(t) = \frac{d \left( K e_0 \left[ 1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] \right)}{dt} u(t) = \frac{K e_0}{\tau} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) u(t) > 0$$

- vérifiant à chaque instant  $s(t) + \tau \dot{s}(t) = K e_0$ ;
- une limite finie  $s(\infty) = K e_0$  vers laquelle converge asymptotiquement la réponse.

En calculant la limite de l'expression temporelle, il vient :

$$s(\infty) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} K e_0 \left[ 1 - \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)}_{\rightarrow 0} \right] = K e_0$$

ce que l'on retrouve évidemment en exploitant le théorème de la valeur finale :

$$s(\infty) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{K}{1 + \tau p} \frac{e_0}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K e_0}{1 + \tau p} = K e_0$$

De plus, en regardant la pente de la tangente à la réponse au temps grand, correspondant à la limite de la dérivée de l'expression de la réponse temporelle, il vient :

$$\dot{s}(\infty) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K e_0}{\tau} \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)}_{\rightarrow 0} u(t) = 0$$

signifiant que la tangente finale est de pente nulle et donc que la réponse possède une asymptote finale horizontale.

En plus des deux asymptotes initiales et finales, le tracé de la réponse temporelle peut se faire à partir de trois points caractéristiques qu'il est indispensable de connaître :

| $t$                      | $\tau$ | $3\tau$ | $5\tau$ |
|--------------------------|--------|---------|---------|
| $\frac{s(t)}{s(\infty)}$ | 63 %   | 95 %    | 99 %    |

### Propriété 2.1 (Temps de réponse)

Le temps de réponse à 5 % d'un système du premier ordre, de constante de temps  $\tau$ , à un échelon est de  $3\tau$ .

Le temps de réponse ne dépend ni de la consigne d'entrée ni du gain mais uniquement de la constante de temps  $\tau$  du système. Plus la constante de temps est faible, plus le système sera dit rapide (figure 4b).

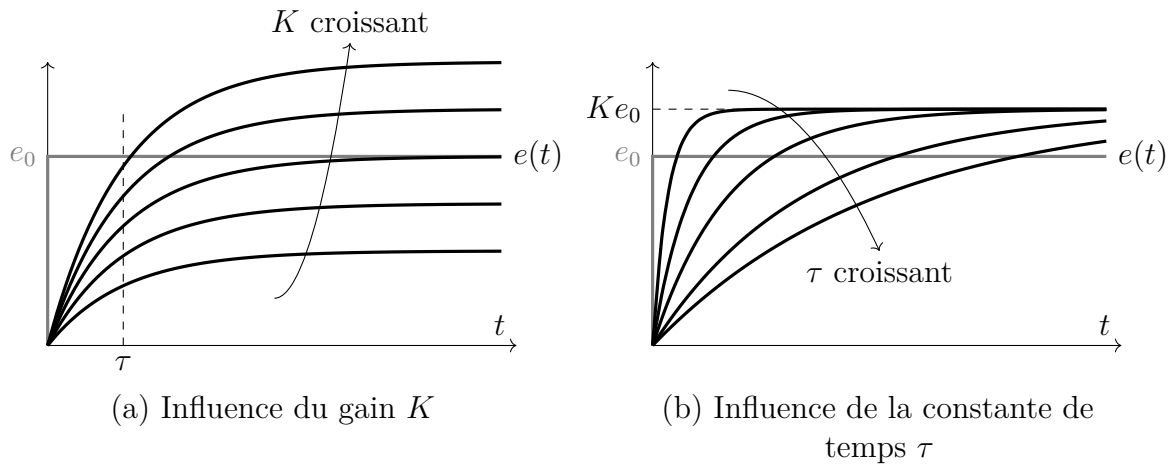


FIGURE 4 – Influence du gain (a) et de la constante de temps (b) d'un système du premier ordre sur sa réponse indicielle.

### 2.2.3 Réponse à une rampe

#### Proposition 2.6 (Réponse à une rampe d'un système du premier ordre)

Si un système du premier ordre, de gain  $K$  et de constante de temps  $\tau$ , est soumis à une entrée en rampe de la forme  $e(t) = e_0 t u(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K e_0 \left[ t - \tau + \tau \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] u(t)$$

*Démonstration.* Si on impose une entrée de la forme  $e(t) = e_0 t u(t)$  à un système du premier ordre, alors l'expression de sa réponse sera dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \frac{e_0}{p^2} = \frac{K e_0}{\tau} \frac{1}{p^2 \left(p + \frac{1}{\tau}\right)}$$

Pour déterminer la transformée de Laplace inverse de cette fraction rationnelle, il est nécessaire de la décomposer en éléments simples sous la forme :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p + \frac{1}{\tau}}$$

telle que la réponse temporelle soit donnée par :

$$s(t) = \left[ A + B t + C \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] u(t)$$

avec les coefficients obtenus à partir des relations :

$$B = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 S(p) = K e_0$$

$$C = \lim_{p \rightarrow -1/\tau} \left(p + \frac{1}{\tau}\right) S(p) = K e_0 \tau$$

et une valeur particulière, par exemple  $p = 1$ , conduit à

$$\frac{K e_0}{1 + \tau} = A + K e_0 + \frac{K e_0 \tau}{1 + \frac{1}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad A = -K e_0 \tau$$

□

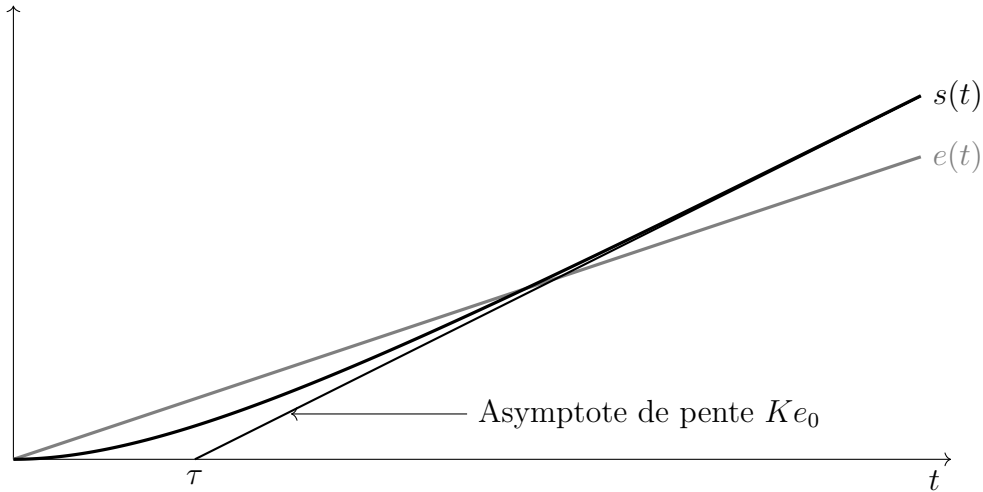


FIGURE 5 – Réponse à une rampe d'un système du premier ordre.

Un exemple de réponse temporelle d'un système du premier ordre à une rampe est représenté sur la figure 5. Cette réponse est caractérisée par :



- une valeur initiale nulle  $s(0) = 0$ ;

En calculant la limite de l'expression temporelle, il vient :

$$s(0) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{t \rightarrow 0} K e_0 \left[ t - \tau + \tau \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)}_{=1} \right] = 0$$

ce que l'on retrouve évidemment en exploitant le théorème de la valeur initiale :

$$s(0) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{K}{1 + \tau p} \frac{e_0}{p^2} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{K e_0 p}{p(1 + \tau p)} = 0$$

- une tangente à l'origine de pente nulle ;

L'expression de la pente à l'origine peut être déterminée en calculant  $\dot{s}(0)$ . À partir de l'expression de la dérivée de réponse temporelle

$$\dot{s}(t) = \frac{d \left( K e_0 \left[ t - \tau + \tau \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] \right)}{dt} u(t) = K e_0 \left[ 1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] u(t)$$

il vient la tangente à l'origine :

$$\dot{s}(0) = 0$$

- une réponse croissante si  $K e_0 > 0$  ;

En dérivant l'expression de la réponse temporelle, il vient :

$$\dot{s}(t) = \frac{d \left( K e_0 \left[ t - \tau + \tau \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] \right)}{dt} u(t) = K e_0 \left[ 1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] u(t) > 0$$

- pas de limite finie mais une asymptote d'équation  $K e_0 (t - \tau) u(t - \tau)$ .

On cherche une asymptote finale de la forme  $at + b$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (a t + b - s(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( a t + b - K e_0 \left[ t - \tau + \tau \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)}_{\rightarrow 0} \right] \right) = 0$$

Par identification, il vient immédiatement  $a = K e_0$  et  $b = -K e_0 \tau$ . On notera que  $a$  correspond bien à la pente de la tangente finale de la réponse, c'est-à-dire la limite de la dérivée de réponse temporelle

$$a = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} K e_0 \left[ 1 - \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)}_{\rightarrow 0} \right] = K e_0$$

## 2.3 Systèmes du second ordre sur-amortis ( $\xi > 1$ )

### 2.3.1 Réponse impulsionnelle

#### Proposition 2.7 (Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre sur-amorti)

Si un système du second ordre sur-amorti, de gain  $K$  et de constantes de temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme  $e(t) = e_0 \delta(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = \frac{K e_0}{\tau_1 - \tau_2} \left( \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) - \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) \right) u(t)$$

*Démonstration.* Si on impose une entrée de la forme  $e(t) = e_0 \delta(t)$  à un système du second ordre sur-amorti, alors l'expression de sa réponse sera dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K e_0}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

Pour déterminer la transformée de Laplace inverse de cette fraction rationnelle, il est nécessaire de la décomposer en éléments simples sous la forme :

$$S(p) = \frac{A}{p + \frac{1}{\tau_1}} + \frac{B}{p + \frac{1}{\tau_2}}$$

telle que la réponse temporelle soit donnée par :

$$s(t) = \left[ A \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) + B \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) \right] u(t)$$

avec les coefficients obtenus à partir des relations :

$$\begin{aligned} A &= \lim_{p \rightarrow -1/\tau_1} \left( p + \frac{1}{\tau_1} \right) S(p) = \frac{K e_0}{\tau_1 - \tau_2} \\ B &= \lim_{p \rightarrow -1/\tau_2} \left( p + \frac{1}{\tau_2} \right) S(p) = \frac{-K e_0}{\tau_1 - \tau_2} \end{aligned}$$

□

#### Proposition 2.8 (Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre sur-amorti)

Si un système du second ordre sur-amorti, de gain  $K$ , de pulsation propre  $\omega_0$  et de facteur d'amortissement  $\xi > 1$ , est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme  $e(t) = e_0 \delta(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = \frac{K e_0 \omega_0}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[ \exp\left(-\omega_0 t \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\right) - \exp\left(-\omega_0 t \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\right) \right] u(t)$$

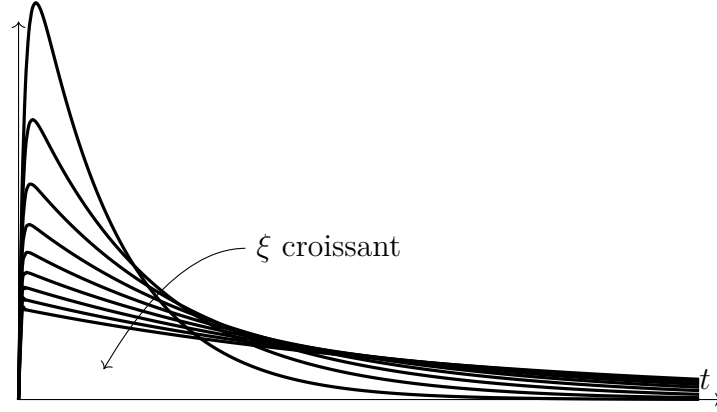


FIGURE 6 – Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre sur-amorti.

*Démonstration.* En repartant simplement de l'expression des constantes de temps

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0 (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_0 (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

il vient immédiatement :

$$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} = \omega_0 \frac{\xi^2 - (\xi^2 - 1)}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} = \frac{-\omega_0}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

□

Un exemple de réponse temporelle d'un système du second ordre sur-amorti à une impulsion est représenté sur la figure 6. Cette réponse est caractérisée par :

- une valeur initiale nulle  $s(0) = 0$ ;

En calculant la limite de l'expression temporelle, il vient :

$$s(0) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{K e_0}{\tau_1 - \tau_2} \left[ \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right)}_{=1} - \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right)}_{=1} \right] = 0$$

ce que l'on retrouve évidemment en exploitant le théorème de la valeur initiale :

$$s(0) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{K e_0}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = 0$$

- une tangente à l'origine de pente  $\dot{s}(0) = \frac{K e_0}{\tau_1 \tau_2} > 0$ ;

L'expression de la pente à l'origine peut être déterminée en calculant  $\dot{s}(0)$ . À partir de l'expression de la dérivée de réponse temporelle

$$\dot{s}(t) = \frac{K e_0}{\tau_1 - \tau_2} \left[ \frac{1}{\tau_2} \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) - \frac{1}{\tau_1} \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) \right] u(t)$$

il vient la tangente à l'origine :

$$\dot{s}(0) = \frac{K e_0}{\tau_1 \tau_2} > 0$$

- une réponse croissante puis décroissante si  $K e_0 > 0$  ;  
En dérivant l'expression de la réponse temporelle, il vient :

$$\dot{s}(t) = \frac{K e_0}{\tau_1 - \tau_2} \left[ \frac{1}{\tau_2} \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) - \frac{1}{\tau_1} \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) \right] u(t)$$

qui admet un *extremum* en :

$$t = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)$$

- une limite finie  $s(\infty) = 0$  vers laquelle converge asymptotiquement la réponse.  
En calculant la limite de l'expression temporelle, il vient :

$$s(\infty) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K e_0}{\tau_1 - \tau_2} \left[ \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right)}_{\rightarrow 0} \right] = 0$$

ce que l'on retrouve évidemment en exploitant le théorème de la valeur finale :

$$s(\infty) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{K e_0}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = 0$$

De plus, en regardant la pente de la tangente à la réponse au temps grand, correspondant à la limite de la dérivée de l'expression de la réponse temporelle, il vient :

$$\dot{s}(\infty) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K e_0}{\tau_1 - \tau_2} \left[ \frac{1}{\tau_2} \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right)}_{\rightarrow 0} - \frac{1}{\tau_1} \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right)}_{\rightarrow 0} \right] u(t) = 0$$

signifiant que la tangente finale est de pente nulle et donc que la réponse possède une asymptote finale horizontale.

### 2.3.2 Réponse indicielle

**Proposition 2.9 (Réponse indicielle d'un système du second ordre sur-amorti)**  
Si un système du second ordre sur-amorti, de gain  $K$  et de constantes de temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , est soumis à une entrée indicielle de la forme  $e(t) = e_0 u(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K e_0 \left[ 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) \right] u(t)$$

*Démonstration.* Si on impose une entrée de la forme  $e(t) = e_0 u(t)$  à un système du second ordre sur-amorti, alors l'expression de sa réponse sera dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K e_0}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

Pour déterminer la transformée de Laplace inverse de cette fraction rationnelle, il est nécessaire de la décomposer en éléments simples sous la forme :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{1}{\tau_1}} + \frac{C}{p + \frac{1}{\tau_2}}$$

telle que la réponse temporelle soit donnée par :

$$s(t) = \left[ A + B \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) + C \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) \right] u(t)$$

avec les coefficients obtenus à partir des relations :

$$\begin{aligned} A &= \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = K e_0 \\ B &= \lim_{p \rightarrow -1/\tau_1} \left(p + \frac{1}{\tau_1}\right) S(p) = \frac{K e_0 \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \\ C &= \lim_{p \rightarrow -1/\tau_2} \left(p + \frac{1}{\tau_2}\right) S(p) = \frac{K e_0 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.10 (Réponse indicielle d'un système du second ordre sur-amorti)**

*Si un système du second ordre sur-amorti, de gain  $K$ , de pulsation propre  $\omega_0$  et de facteur d'amortissement  $\xi > 1$ , est soumis à une entrée indicielle de la forme  $e(t) = e_0 u(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :*

$$\begin{aligned} s(t) = K e_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) \exp\left(-\omega_0 t \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)\right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) \exp\left(-\omega_0 t \left( \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)\right) \right] u(t) \end{aligned}$$

*Démonstration.* En repartant simplement de l'expression des constantes de temps

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0 (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_0 (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

et en notant que

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{2\sqrt{\xi^2 - 1}}{\omega_0}$$

il vient immédiatement :

$$\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right)$$

□

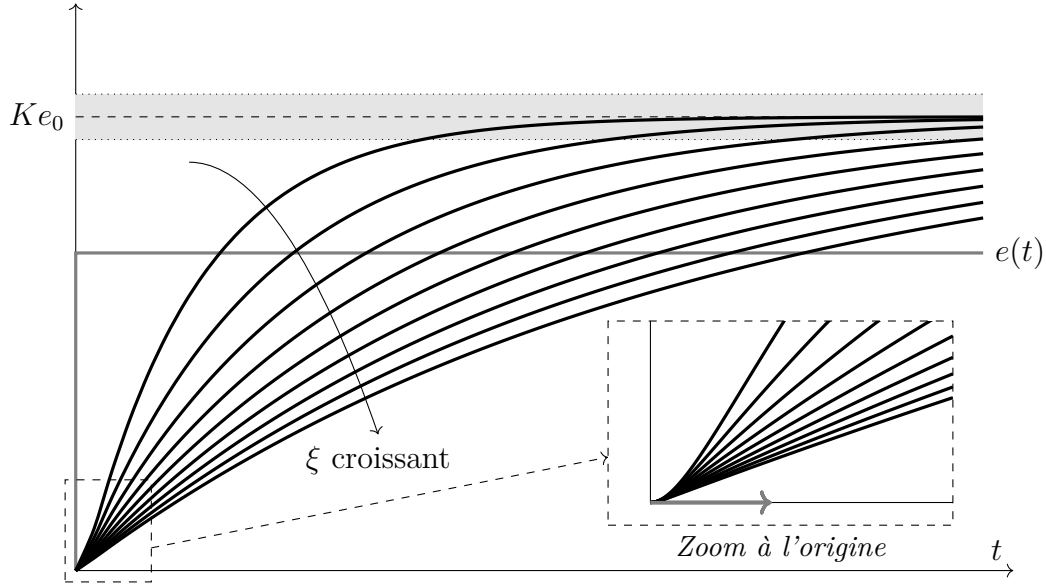


FIGURE 7 – Réponse indicielle d'un système du second ordre sur-amorti.

Un exemple de réponse temporelle d'un système du second ordre sur-amorti à un échelon est représenté sur la figure 7. Cette réponse est caractérisée par :

- une valeur initiale nulle  $s(0) = 0$  ;

En calculant la limite de l'expression temporelle, il vient :

$$s(0) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{t \rightarrow 0} K e_0 \left[ 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right)}_{=1} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right)}_{=1} \right] = 0$$

ce que l'on retrouve évidemment en exploitant le théorème de la valeur initiale :

$$s(0) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \frac{e_0}{p} = 0$$

- une tangente à l'origine de pente nulle  $\dot{s}(0) = 0$  ;

L'expression de la pente à l'origine peut être déterminée en calculant  $\dot{s}(0)$ . À partir de l'expression de la dérivée de réponse temporelle

$$\dot{s}(t) = \frac{K e_0}{\tau_1 - \tau_2} \left[ \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) - \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) \right] u(t)$$

il vient la tangente à l'origine :

$$\dot{s}(0) = 0$$

- une réponse sans dépassement, croissante si  $K e_0 > 0$  ;

En dérivant l'expression de la réponse temporelle, il vient :

$$\dot{s}(t) = \frac{K e_0}{\tau_1 - \tau_2} \left[ \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) - \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) \right] u(t) > 0$$

- une limite finie  $s(\infty) = K e_0$  vers laquelle converge asymptotiquement la réponse.  
En calculant la limite de l'expression temporelle, il vient :

$$s(\infty) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} K e_0 \left[ 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right)}_{\rightarrow 0} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right)}_{\rightarrow 0} \right] = K e_0$$

ce que l'on retrouve évidemment en exploitant le théorème de la valeur finale :

$$s(\infty) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \frac{e_0}{p} = K e_0$$

De plus, en regardant la pente de la tangente à la réponse au temps grand, correspondant à la limite de la dérivée de l'expression de la réponse temporelle, il vient :

$$\dot{s}(\infty) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K e_0}{\tau_1 - \tau_2} \left[ \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right)}_{\rightarrow 0} \right] u(t) = 0$$

signifiant que la tangente finale est de pente nulle et donc que la réponse possède une asymptote finale horizontale.

En plus des deux asymptotes initiales et finales, le tracé de la réponse temporelle possède un point d'inflexion au temps.

En dérivant une seconde fois l'expression de la réponse temporelle, il vient :

$$\ddot{s}(t) = \frac{K e_0}{\tau_1 - \tau_2} \left[ \frac{-1}{\tau_1} \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) + \frac{1}{\tau_2} \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) \right] u(t)$$

nulle si

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \exp\left(\frac{t_i}{\tau_2} - \frac{t_i}{\tau_1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad t_i = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)$$

### 2.3.3 Réponse à une rampe

**Proposition 2.11 (Réponse à une rampe d'un système du second ordre sur-amorti)**

*Si un système du second ordre sur-amorti, de gain  $K$  et de constantes de temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , est soumis à une entrée en rampe de la forme  $e(t) = e_0 t u(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :*

$$s(t) = K e_0 \left[ t - \tau_1 - \tau_2 + \frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) + \frac{\tau_2^2}{\tau_2 - \tau_1} \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) \right] u(t)$$

*Démonstration.* Si on impose une entrée de la forme  $e(t) = e_0 t u(t)$  à un système du second ordre sur-amorti, alors l'expression de sa réponse sera dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K e_0}{p^2 (1 + \tau_1 p) (1 + \tau_2 p)}$$

Pour déterminer la transformée de Laplace inverse de cette fraction rationnelle, il est nécessaire de la décomposer en éléments simples sous la forme :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p + \frac{1}{\tau_1}} + \frac{D}{p + \frac{1}{\tau_2}}$$

telle que la réponse temporelle soit donnée par :

$$s(t) = \left[ A + B t + C \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) + D \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) \right] u(t)$$

avec les coefficients obtenus à partir des relations :

$$\begin{aligned} B &= \lim_{p \rightarrow 0} p^2 S(p) = K e_0 \\ C &= \lim_{p \rightarrow -1/\tau_1} \left(p + \frac{1}{\tau_1}\right) S(p) = \frac{K e_0 \tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} \\ D &= \lim_{p \rightarrow -1/\tau_2} \left(p + \frac{1}{\tau_2}\right) S(p) = \frac{-K e_0 \tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2} \end{aligned}$$

et la valeur particulière  $p = 1$  pour le coefficient

$$A = -(\tau_1 + \tau_2)$$

□

**Proposition 2.12 (Réponse à une rampe d'un système du second ordre sur-amorti)**

Si un système du second ordre sur-amorti, de gain  $K$ , de pulsation propre  $\omega_0$  et de facteur d'amortissement  $\xi > 1$ , est soumis à une entrée en rampe de la forme  $e(t) = e_0 t u(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} s(t) = K e_0 \left[ t - \frac{2\xi}{\omega_0} + \frac{1}{2\omega_0 (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} \left( 1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) \exp\left(-\omega_0 t (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2\omega_0 (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} \left( 1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) \exp\left(-\omega_0 t (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\right) \right] u(t) \end{aligned}$$



*Démonstration.* En repartant simplement de l'expression des constantes de temps

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0 (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_0 (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

et en notant que

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{2\xi}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \tau_1 - \tau_2 = \frac{-2\sqrt{\xi^2 - 1}}{\omega_0}$$

il vient immédiatement :

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} &= \frac{1}{2\omega_0 (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} \left( 1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) \\ \frac{\tau_2^2}{\tau_2 - \tau_1} &= \frac{1}{2\omega_0 (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} \left( 1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) \end{aligned}$$

□

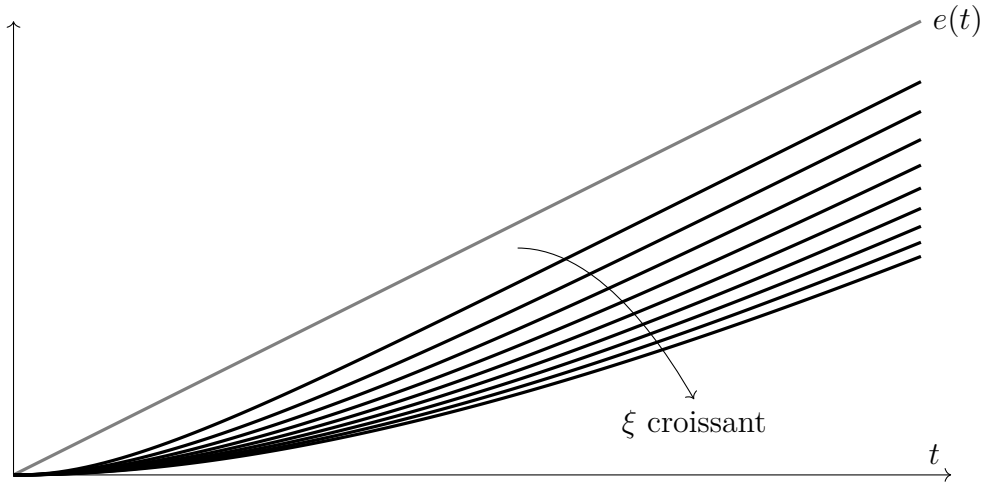


FIGURE 8 – Réponse à une rampe d'un système du second ordre sur-amorti.

Un exemple de réponse temporelle d'un système du second ordre sur-amorti à une rampe est représenté sur la figure 8. Cette réponse est caractérisée par :

- une valeur initiale nulle  $s(0) = 0$ ;

En calculant la limite de l'expression temporelle, il vient :

$$s(0) = \lim_{t \rightarrow 0} K e_0 \left[ t - \tau_1 - \tau_2 + \frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right)}_{=1} + \frac{\tau_2^2}{\tau_2 - \tau_1} \underbrace{\exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right)}_{=1} \right] u(t) = 0$$

ce que l'on retrouve évidemment en exploitant le théorème de la valeur initiale :

$$s(0) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{K e_0}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = 0$$

- une tangente à l'origine de pente nulle  $\dot{s}(0) = 0$  ;  
L'expression de la pente à l'origine peut être déterminée en calculant  $\dot{s}(0)$ . À partir de l'expression de la dérivée de réponse temporelle

$$\dot{s}(t) = K e_0 \left[ 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) \right] u(t)$$

il vient la tangente à l'origine :

$$\dot{s}(0) = 0$$

- une réponse croissante si  $K e_0 > 0$  ;  
Ayant déjà étudié la réponse à un échelon, correspondant à la dérivée de l'expression de la réponse temporelle, nous savons que la dérivée reste positive si  $K e_0 > 0$  et se stabilise à une valeur finale de  $K e_0$ .
- pas de limite finie mais une asymptote d'équation  $K e_0 (t - \tau_1 - \tau_2) u(t - \tau_1 - \tau_2)$   
On cherche une asymptote finale de la forme  $at + b$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( a t + b - K e_0 \left[ t - \tau_1 - \tau_2 + \underbrace{\frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{\tau_2^2}{\tau_2 - \tau_1} \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right)}_{\rightarrow 0} \right] \right) = 0$$

Par identification, il vient immédiatement  $a = K e_0$  et  $b = -K e_0 (\tau_1 + \tau_2)$ . On notera que  $a$  correspond bien à la pente de la tangente finale de la réponse, c'est-à-dire la limite de la dérivée de réponse temporelle

$$a = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}(t) = K e_0$$

## 2.4 Systèmes du second ordre en régime critique ( $\xi = 1$ )

### 2.4.1 Réponse impulsionnelle

**Proposition 2.13 (Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre en régime critique)**

*Si un système du second ordre en régime critique, de gain  $K$  et de constante de temps  $\tau$ , est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme  $e(t) = e_0 \delta(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :*

$$s(t) = \frac{K e_0}{\tau^2} t \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) u(t)$$

*Démonstration.* Si on impose une entrée de la forme  $e(t) = e_0 \delta(t)$  à un système du second ordre en régime critique, alors l'expression de sa réponse sera dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K e_0}{(1 + \tau p)^2} = \frac{K e_0}{\tau^2} \frac{1}{\left(p + \frac{1}{\tau}\right)^2}$$

qui est déjà sous forme simple et qui admet comme transformée de Laplace inverse :

$$s(t) = \frac{K e_0}{\tau^2} t \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) u(t) \quad \square$$

**Proposition 2.14 (Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre en régime critique)**

*Si un système du second ordre en régime critique, de gain  $K$  et de pulsation propre  $\omega_0$ , est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme  $e(t) = e_0 \delta(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :*

$$s(t) = K e_0 \omega_0^2 t \exp(-\omega_0 t) u(t)$$

*Démonstration.* La preuve est triviale sachant que  $\tau = 1/\omega_0$ .  $\square$

La réponse impulsionnelle d'un système du second ordre en régime critique est celle de plus grande amplitude sur la figure 6 et correspond à la courbe qui « monte le plus haut ».

### 2.4.2 Réponse indicielle

**Proposition 2.15 (Réponse indicielle d'un système du second ordre en régime critique)**

*Si un système du second ordre en régime critique, de gain  $K$  et de constante de temps  $\tau$ , est soumis à une entrée indicielle de la forme  $e(t) = e_0 u(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :*

$$s(t) = K e_0 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] u(t)$$

*Démonstration.* Si on impose une entrée de la forme  $e(t) = e_0 u(t)$  à un système du second ordre en régime critique, alors l'expression de sa réponse sera dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K e_0}{p(1 + \tau p)^2}$$

Pour déterminer la transformée de Laplace inverse de cette fraction rationnelle, il est nécessaire de la décomposer en éléments simples sous la forme :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{1}{\tau}} + \frac{C}{\left(p + \frac{1}{\tau}\right)^2}$$

telle que la réponse temporelle soit donnée par :

$$s(t) = \left[ A + B \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + C t \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] u(t)$$

avec les coefficients obtenus à partir des relations :

$$A = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = K e_0$$

$$C = \lim_{p \rightarrow -1/\tau} \left(p + \frac{1}{\tau}\right)^2 S(p) = \frac{-K e_0}{\tau}$$

et la valeur particulière  $p = 1$  pour le coefficient

$$B = -1$$

□

**Proposition 2.16 (Réponse indicielle d'un système du second ordre en régime critique)**

*Si un système du second ordre en régime critique, de gain  $K$  et de pulsation propre  $\omega_0$ , est soumis à une entrée indicielle de la forme  $e(t) = e_0 u(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :*

$$s(t) = K e_0 [1 - (1 + \omega_0 t) \exp(-\omega_0 t)] u(t)$$

*Démonstration.* La preuve est triviale sachant que  $\tau = 1/\omega_0$ .

□

La réponse indicielle d'un système du second ordre en régime critique est la plus rapide sur la figure 7 et correspond à la courbe « la plus à gauche ».

### 2.4.3 Réponse à une rampe

**Proposition 2.17 (Réponse à une rampe d'un système du second ordre en régime critique)**

*Si un système du second ordre en régime critique, de gain  $K$  et de constante de temps  $\tau$ , est soumis à une entrée en rampe de la forme  $e(t) = e_0 t u(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :*

$$s(t) = K e_0 \left[ t - 2\tau + (2\tau + t) \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] u(t)$$

*Démonstration.* Si on impose une entrée de la forme  $e(t) = e_0 t u(t)$  à un système du second ordre en régime critique, alors l'expression de sa réponse sera dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K e_0}{p^2 (1 + \tau p)^2}$$

Pour déterminer la transformée de Laplace inverse de cette fraction rationnelle, il est nécessaire de la décomposer en éléments simples sous la forme :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p + \frac{1}{\tau}} + \frac{D}{\left(p + \frac{1}{\tau}\right)^2}$$

telle que la réponse temporelle soit donnée par :

$$s(t) = \left[ A + B t + C \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + D t \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] u(t)$$

avec les coefficients obtenus à partir des relations :

$$\begin{aligned} B &= \lim_{p \rightarrow 0} p^2 S(p) = K e_0 \\ D &= \lim_{p \rightarrow -1/\tau} \left(p + \frac{1}{\tau}\right)^2 S(p) = K e_0 \end{aligned}$$

et les valeurs particulières  $p = 1$  et  $p = 2$  pour déterminer les coefficients

$$\begin{cases} \frac{K e_0}{1 + \tau} = A + K e_0 + \frac{B \tau}{1 + \tau} + \frac{K e_0 \tau^2}{(1 + \tau)^2} \\ \frac{K e_0}{1 + 2\tau} = \frac{A}{2} + \frac{K e_0}{4} + \frac{B \tau}{1 + 2\tau} + \frac{K e_0 \tau^2}{(1 + 2\tau)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2\tau \\ C = 2\tau \end{cases}$$

□

**Proposition 2.18 (Réponse à une rampe d'un système du second ordre en régime critique)**

*Si un système du second ordre en régime critique, de gain  $K$  et de pulsation propre  $\omega_0$ , est soumis à une entrée en rampe de la forme  $e(t) = e_0 t u(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :*

$$s(t) = K e_0 \left[ t - \frac{2}{\omega_0} + \left( \frac{2}{\omega_0} + t \right) \exp(-\omega_0 t) \right] u(t)$$

*Démonstration.* La preuve est triviale sachant que  $\tau = 1/\omega_0$ .

□

La réponse à une rampe d'un système du second ordre en régime critique est la plus rapide sur la figure 8 et correspond à la courbe « la plus au-dessus ».

## 2.5 Systèmes du second ordre sous-amortis ( $0 < \xi < 1$ )

### 2.5.1 Réponse impulsionnelle

**Proposition 2.19 (Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre sous-amorti)**

*Si un système du second ordre sous-amorti, de gain  $K$ , de pulsation propre  $\omega_0$  et de facteur d'amortissement  $0 < \xi < 1$ , est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme  $e(t) = e_0 \delta(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :*

$$s(t) = \frac{K e_0 \omega_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}\right) \exp(-\xi \omega_0 t) u(t)$$

*Démonstration.* Si on impose une entrée de la forme  $e(t) = e_0 \delta(t)$  à un système du second ordre sous-amorti, alors l'expression de sa réponse sera dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K e_0}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Pour déterminer la transformée de Laplace inverse de cette fraction rationnelle, il est nécessaire de la mettre sous la forme :

$$S(p) = \frac{A\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

telle que la réponse temporelle soit donnée par :

$$s(t) = A \sin(\omega t) \exp(-at) u(t)$$

Par identification, il vient :

$$\begin{cases} 2a = 2\xi\omega_0 \\ a^2 + \omega^2 = \omega_0^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \xi\omega_0 \\ \omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$$

et

$$K e_0 \omega_0^2 = A\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \iff A = \frac{K e_0 \omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad \square$$

La réponse temporelle d'un système du second ordre sous-amorti à une impulsion est une sinusoïde amortie. Un exemple de réponse est représenté sur la figure 9. Cette réponse est caractérisée par :

- une valeur initiale nulle  $s(0) = 0$ ;

En calculant la limite de l'expression temporelle, il vient :

$$s(0) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{K e_0 \omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_0 t \sqrt{1-\xi^2}\right)}_{=0} \exp(-\xi\omega_0 t) u(t) = 0$$

ce que l'on retrouve évidemment en exploitant le théorème de la valeur initiale :

$$s(0) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{K e_0}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = 0$$

- une tangente à l'origine de pente  $\dot{s}(0) = K e_0 \omega_0^2 > 0$ ;

L'expression de la pente à l'origine peut être déterminée en calculant  $\dot{s}(0)$ . À partir de l'expression de la dérivée de réponse temporelle

$$\dot{s}(t) = \frac{K e_0 \omega_0^2}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[ \sqrt{1-\xi^2} \cos\left(\omega_0 t \sqrt{1-\xi^2}\right) - \xi \sin\left(\omega_0 t \sqrt{1-\xi^2}\right) \right] \exp(-\xi\omega_0 t) u(t)$$

il vient la tangente à l'origine :

$$\dot{s}(0) = K e_0 \omega_0^2 > 0$$

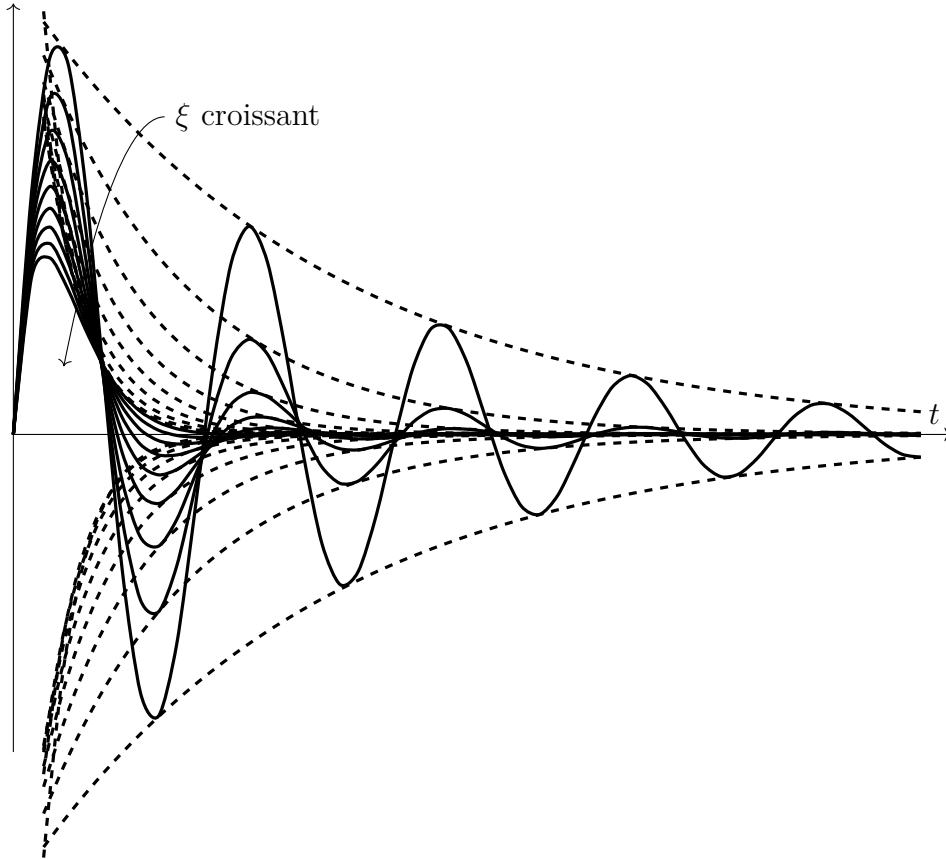


FIGURE 9 – Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre sous-amorti.

- une réponse oscillante amortie de pseudo-pulsation  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$  ;  
On identifie la pseudo-pulsation par lecture directe de l'expression de la réponse temporelle :

$$\sin(\omega t) = \sin\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

Cette pseudo-pulsation signifie que la réponse temporelle n'est pas exactement périodique mais admet des *extremums* successifs d'amplitude décroissante aux instants :

$$t_e = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \left( \frac{\pi}{2} [\pi] - \varphi \right) \geq 0 \quad \text{avec} \quad \cos(\varphi) = \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = \xi$$

tels que  $\dot{s}(t_e) = 0$ .

- une limite finie  $s(\infty) = 0$  vers laquelle converge asymptotiquement la réponse.  
En calculant la limite de l'expression temporelle, il vient :

$$s(\infty) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K e_0 \omega_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}\right) \underbrace{\exp(-\xi \omega_0 t)}_{\rightarrow 0} u(t) = 0$$

ce que l'on retrouve évidemment en exploitant le théorème de la valeur finale :

$$s(\infty) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{K e_0}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = 0$$

De plus, en regardant la pente de la tangente à la réponse au temps grand, correspondant à la limite de la dérivée de l'expression de la réponse temporelle, il vient :

$$\dot{s}(\infty) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K e_0 \omega_0^2}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left[ \sqrt{1 - \xi^2} \cos \left( \omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2} \right) - \xi \sin \left( \omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2} \right) \right] \underbrace{\exp(-\xi \omega_0 t)}_{\rightarrow 0} u(t) = 0$$

signifiant que la tangente finale est de pente nulle et donc que la réponse possède une asymptote finale horizontale.

### 2.5.2 Réponse indicielle

#### Proposition 2.20 (Réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti)

Si un système du second ordre sous-amorti, de gain  $K$ , de pulsation propre  $\omega_0$  et de facteur d'amortissement  $0 < \xi < 1$ , est soumis à une entrée indicielle de la forme  $e(t) = e_0 u(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K e_0 \left[ 1 - \exp(-\xi \omega_0 t) \left( \cos \left( \omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2} \right) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left( \omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2} \right) \right) \right] u(t)$$

*Démonstration.* Si on impose une entrée de la forme  $e(t) = e_0 u(t)$  à un système du second ordre sous-amorti, alors l'expression de sa réponse sera dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K e_0}{p \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$$

Pour déterminer la transformée de Laplace inverse de cette fraction rationnelle, il est nécessaire de la décomposer en éléments simples sous la forme :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B(p + a) + C\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$$

telle que la réponse temporelle soit donnée par :

$$s(t) = [A + (B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)) \exp(-at)] u(t)$$

avec

$$\begin{cases} 2a = 2\xi\omega_0 \\ a^2 + \omega^2 = \omega_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \xi\omega_0 \\ \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \end{cases}$$



Par identification, il vient directement :

$$K e_0 \omega_0^2 = A (\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + p^2) + B p (p + \xi\omega_0) + C \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} p$$

tel que :

$$\begin{cases} K e_0 = A \\ 0 = 2A\xi\omega_0 + B\xi\omega_0 + C\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \\ 0 = A + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = K e_0 \\ B = -K e_0 \\ C = -K e_0 \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \end{cases}$$

□

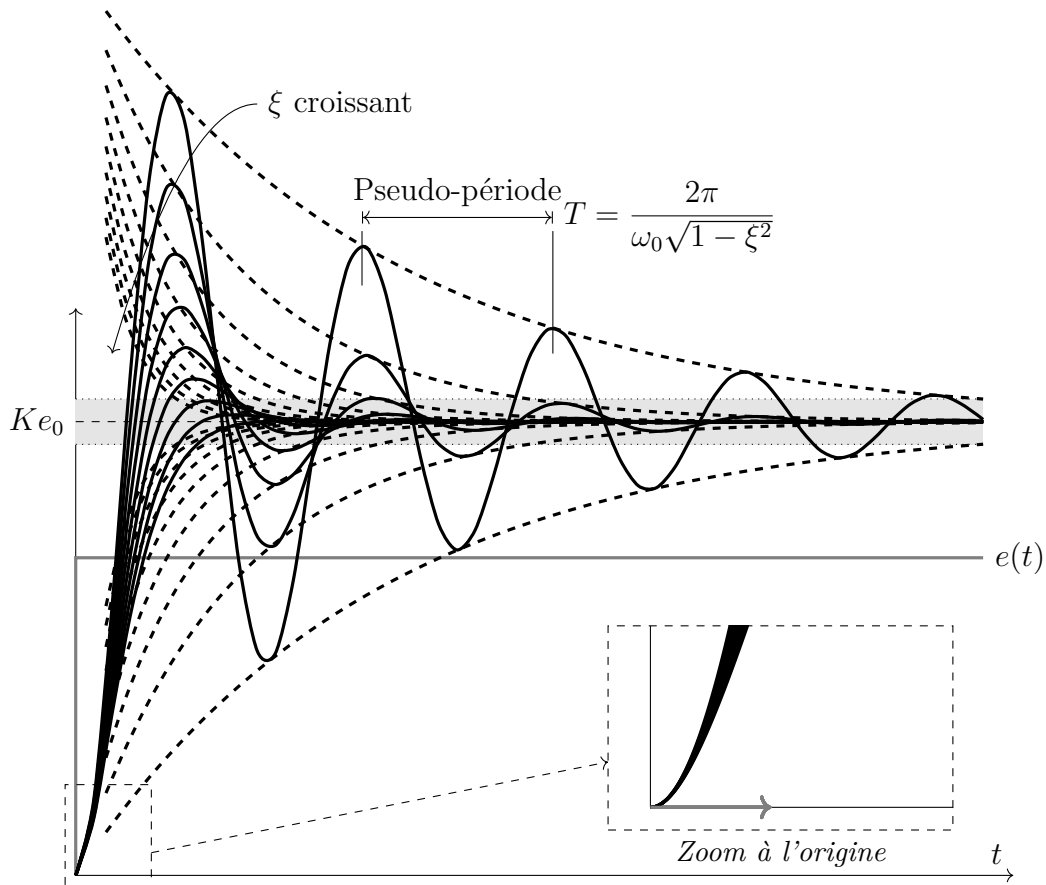


FIGURE 10 – Réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti.

La réponse temporelle d'un second ordre sous-amorti à un échelon est la superposition d'un échelon et d'une sinusoïde amortie par une exponentielle. Un exemple de réponse temporelle d'un système du second ordre sur-amorti à un échelon est représenté sur la figure 10. Cette réponse est caractérisée par :

- une valeur initiale nulle  $s(0) = 0$  ;  
En calculant la limite de l'expression temporelle, il vient :

$$s(0) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{t \rightarrow 0} K e_0 \left[ 1 - \underbrace{\exp(-\xi \omega_0 t)}_{=1} \left( \underbrace{\cos(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2})}_{=1} + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \underbrace{\sin(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2})}_{=0} \right) \right] u(t) = 0$$

ce que l'on retrouve évidemment en exploitant le théorème de la valeur initiale :

$$s(0) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{K e_0}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = 0$$

- une tangente à l'origine de pente nulle  $\dot{s}(0) = 0$  ;  
L'expression de la pente à l'origine peut être déterminée en calculant  $\dot{s}(0)$ . À partir de l'expression de la dérivée de réponse temporelle

$$\dot{s}(t) = \frac{K e_0 \omega_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} \exp(-\xi \omega_0 t) \sin(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}) u(t)$$

il vient la tangente à l'origine :

$$\dot{s}(0) = 0$$

- une réponse avec des dépassements (oscillations autour de la valeur finale) ;  
En dérivant l'expression de la réponse temporelle, il vient :

$$\dot{s}(t) = \frac{K e_0 \omega_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} \exp(-\xi \omega_0 t) \sin(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}) u(t)$$

Cette expression s'annule aux instants :

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}, \quad k \in \mathbb{N}^+$$

tels que la réponse temporelle admette en chacun de ces instants  $t_k$  un *extremum* :

$$\begin{aligned} s(t_k) &= K e_0 \left[ 1 - \exp\left(\frac{-k\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right) \left( \underbrace{\cos(k\pi)}_{=1} + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} \right) \right] u(t) \\ &= K e_0 \left[ 1 - (-1)^k \exp\left(\frac{-k\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right) \right] u(t) \end{aligned}$$

- une limite finie  $s(\infty) = K e_0$  vers laquelle converge asymptotiquement la réponse.  
En calculant la limite de l'expression temporelle, il vient :

$$s(\infty) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} K e_0 \left[ 1 - \underbrace{\exp(-\xi \omega_0 t)}_{\rightarrow 0} \left( \cos(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}) \right) \right] u(t) = K e_0$$

ce que l'on retrouve évidemment en exploitant le théorème de la valeur finale :

$$s(\infty) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K e_0}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = K e_0$$

De plus, en regardant la pente de la tangente à la réponse au temps grand, correspondant à la limite de la dérivée de l'expression de la réponse temporelle, il vient :

$$\dot{s}(\infty) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K e_0 \omega_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} \underbrace{\exp(-\xi \omega_0 t)}_{\rightarrow 0} \sin(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}) u(t) = 0$$

signifiant que la tangente finale est de pente nulle et donc que la réponse possède une asymptote finale horizontale.

Contrairement aux réponses indicielles dans les autres régimes, la réponse d'un second ordre sous-amorti présente des dépassements. Même si le signal de sortie n'est pas périodique, il est courant de parler de pseudo-pulsation ou de pseudo-période de ces oscillations. La pseudo-période se mesure facilement entre deux dépassements de même signe et la pseudo-pulsation se lie facilement dans l'expression analytique de  $s(t)$  en facteur du temps dans les fonctions sinus et cosinus :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

Une recherche des extrema de  $s(t)$  permet de déterminer l'amplitude du  $k^{\text{e}}$  dépassement  $D_k$  à l'instant  $t_k$  :

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \quad \text{et} \quad D_k = (-1)^{k+1} K e_0 \exp\left(\frac{-k\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)$$

L'amplitude des dépassements dépendant de l'entrée, ils sont plus communément exprimés en pourcentage de la valeur finale :

$$D_{k\%} = \left| \frac{s(t_k) - s(\infty)}{s(\infty)} \right| = \exp\left(\frac{-k\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)$$

Il est aussi possible de déterminer la valeur du  $k^{\text{e}}$  dépassement relatif  $D_{k\%}$  en fonction du facteur d'amortissement en utilisant un abaque reliant les dépassements relatifs au facteur d'amortissement (figure 12) permettant de déterminer la valeur sans outil numérique.

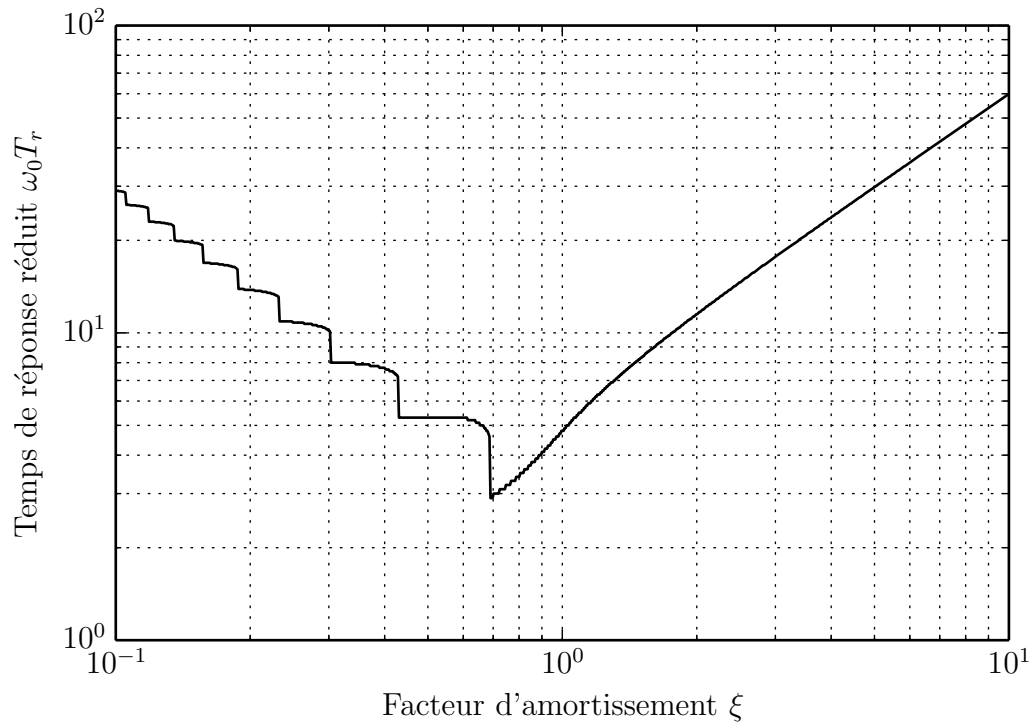


FIGURE 11 – Abaque de temps de réponse réduit d'un système du second ordre.

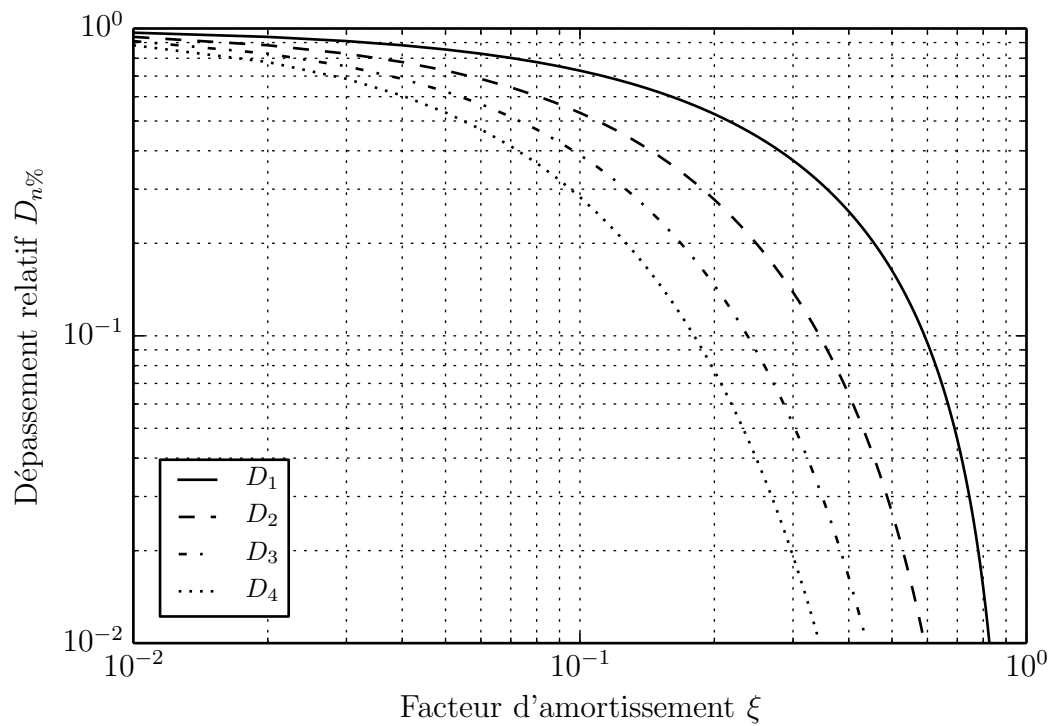


FIGURE 12 – Abaque des dépassements relatifs d'un système du second ordre.

Le temps de réponse à 5 % ne peut pas être déterminé analytiquement mais seulement numériquement. Un abaque des temps de réponse réduit (figure 11) permet de l'obtenir sans outil numérique. D'après les courbes présentées sur la figure 10 et l'abaque de temps de réponse réduit, on retiendra que le temps de réponse à 5 % le plus faible (associé à la réponse la plus rapide) est obtenu pour une valeur de  $\xi = 0,69$ . Pour cette valeur d'amortissement optimal, la réponse entre définitivement dans la bande des  $\pm 5$  % dès le premier dépassement et le temps de réponse réduit est  $\omega_0 T_r \approx 3$ .

### 2.5.3 Réponse à une rampe

#### Proposition 2.21 (Réponse à une rampe d'un système du second ordre sous-amorti)

Si un système du second ordre sous-amorti, de gain  $K$ , de pulsation propre  $\omega_0$  et de facteur d'amortissement  $0 < \xi < 1$ , est soumis à une entrée en rampe de la forme  $e(t) = e_0 t u(t)$  alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K e_0 \left[ t - \frac{2\xi}{\omega_0} + \exp(-\xi\omega_0 t) \left( \frac{2\xi}{\omega_0} \cos(\omega_0 t \sqrt{1-\xi^2}) + \frac{2\xi^2 - 1}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_0 t \sqrt{1-\xi^2}) \right) \right] u(t)$$

*Démonstration.* Si on impose une entrée de la forme  $e(t) = e_0 t u(t)$  à un système du second ordre sous-amorti, alors l'expression de sa réponse sera dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K e_0}{p^2 \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$$

Pour déterminer la transformée de Laplace inverse de cette fraction rationnelle, il est nécessaire de la décomposer en éléments simples sous la forme :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C(p+a) + D\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

telle que la réponse temporelle soit donnée par :

$$s(t) = [A + B t + (C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)) \exp(-at)] u(t)$$

avec

$$\begin{cases} 2a = 2\xi\omega_0 \\ a^2 + \omega^2 = \omega_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \xi\omega_0 \\ \omega = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$$

Par identification, il vient directement :

$$K e_0 \omega_0^2 = A p (\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + p^2) + B (\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + p^2) + C p^2 (p + \xi\omega_0) + D p^2 \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$$

tel que :

$$\begin{cases} K e_0 = B \\ 0 = A \omega_0^2 + 2B \xi \omega_0 \\ 0 = 2A \xi \omega_0 + B + C \xi \omega_0 + D \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \\ 0 = A + C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{-2K e_0 \xi}{\omega_0} \\ B = K e_0 \\ C = \frac{2K e_0 \xi}{\omega_0} \\ D = \frac{K e_0 (2\xi^2 - 1)}{\omega_0} \end{cases}$$

□

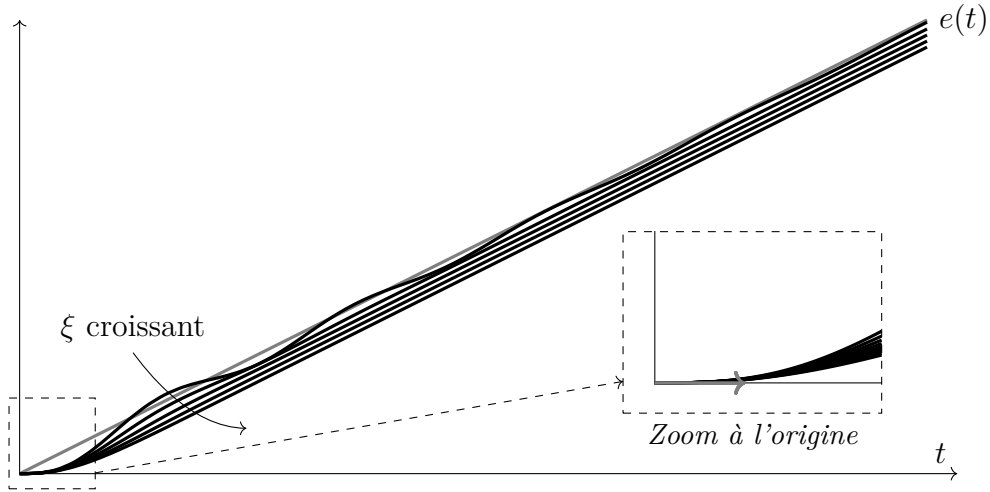


FIGURE 13 – Réponse à une rampe d'un système du second ordre sous-amorti.

La réponse temporelle d'un second ordre sous-amorti à une rampe est la superposition d'une rampe et d'une sinusoïde amortie par une exponentielle. Un exemple de réponse temporelle est représenté sur la figure 13. Cette réponse est caractérisée par :

- une valeur initiale nulle  $s(0) = 0$  ;

En calculant la limite de l'expression temporelle, il vient :

$$s(0) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{t \rightarrow 0} K e_0 \left[ t - \frac{2\xi}{\omega_0} + \underbrace{\exp(-\xi \omega_0 t)}_{=1} \left( \frac{2\xi}{\omega_0} \underbrace{\cos(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2})}_{=1} + \frac{2\xi^2 - 1}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \underbrace{\sin(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2})}_{=0} \right) \right] u(t) = 0$$

ce que l'on retrouve évidemment en exploitant le théorème de la valeur initiale :

$$s(0) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{K e_0}{p \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)} = 0$$

- une tangente à l'origine de pente nulle  $\dot{s}(0) = 0$  ;  
L'expression de la pente à l'origine peut être déterminée en calculant  $\dot{s}(0)$ . À partir de l'expression de la dérivée de réponse temporelle

$$\dot{s}(t) = K e_0 \left[ 1 - \exp(-\xi \omega_0 t) \left( \cos(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}) \right) \right] u(t)$$

il vient la tangente à l'origine :

$$\dot{s}(0) = 0$$

- une réponse croissante si  $K e_0 > 0$  ;  
Ayant déjà étudié la réponse à un échelon, correspondant à la dérivée de l'expression de la réponse temporelle, nous savons que la dérivée reste positive si  $K e_0 > 0$  et se stabilise à une valeur finale de  $K e_0$ .
- pas de limite finie mais une asymptote d'équation  $K e_0 \left( t - \frac{2\xi}{\omega_0} \right) u \left( t - \frac{2\xi}{\omega_0} \right)$ .  
On cherche une asymptote finale de la forme  $at + b$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( a t + b - K e_0 \left[ t - \frac{2\xi}{\omega_0} + \underbrace{\exp(-\xi \omega_0 t)}_{\rightarrow 0} \left( \frac{2\xi}{\omega_0} \cos(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}) + \frac{2\xi^2 - 1}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}) \right) \right] \right) = 0$$

Par identification, il vient immédiatement  $a = K e_0$  et  $b = -K e_0 \frac{2\xi}{\omega_0}$ . On notera que  $a$  correspond bien à la pente de la tangente finale de la réponse, c'est-à-dire la limite de la dérivée de réponse temporelle

$$a = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}(t) = K e_0$$

### 3 Identification d'un modèle de comportement

Le problème d'identification consiste, comme son nom le suggère, à identifier un modèle de comportement à partir d'un relevé expérimental d'une réponse temporelle. En pratique, les essais sont le plus souvent réalisés avec une entrée indicielle  $e(t) = e_0 u(t)$  et nous nous restreindrons à identifier un modèle du premier ordre ou du second ordre.

#### 3.1 Modèle du premier ordre

La réponse d'un modèle du premier ordre est caractérisée par une pente non nulle à l'origine. Si c'est le cas sur le relevé expérimental (comme sur la figure 14), on cherchera à

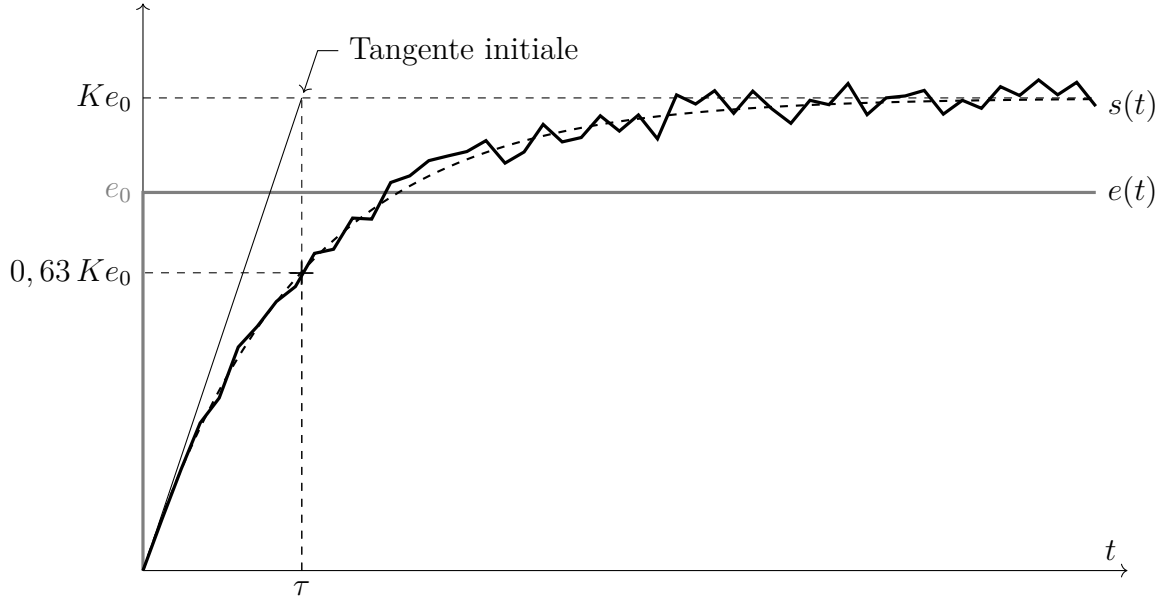


FIGURE 14 – Exemple de réponse indicielle réelle d'un système (du premier ordre).

identifier les deux constantes caractéristiques d'un modèle du premier ordre que sont le gain  $K$  et la constante de temps  $\tau$ .

Pour identifier le gain  $K$  il est nécessaire de tracer l'asymptote finale horizontale à la réponse  $s(t)$ . Cette asymptote d'équation  $s(\infty) = Ke_0$  permet de déterminer immédiatement le gain  $K$  connaissant l'amplitude de l'entrée  $e_0$  en faisant le ratio :

$$K = \frac{s(\infty)}{e_0}$$

Pour identifier la constante de temps  $\tau$ , il est nécessaire de tracer la tangente à l'origine de la réponse expérimentale telle que  $\tau$  soit l'abscisse de son intersection avec l'asymptote finale (figure 14). Comme il n'est pas toujours facile de déterminer la « bonne » tangente à l'origine, d'autant plus avec un signal bruité, il est nécessaire de vérifier que la valeur de  $\tau$  trouvée est raisonnable en estimant  $s(\tau)$  qui doit être voisin de  $0,63s(\infty)$ .

### 3.2 Modèle du second ordre

Si la réponse d'un système réel à un échelon est caractérisée par une tangente nulle à l'origine, on cherchera à identifier un modèle du second ordre. Nous avons vu que la réponse indicielle d'un système du second ordre est caractérisée par trois régimes en fonction de la valeur de  $\xi$ . Cette réponse ne présente pas de dépassement si  $\xi \geq 1$ . Dans le cas où la réponse présente des dépassements, on peut remarquer que pour des valeurs de  $\xi$  comprises entre 0,69 et 1, le premier dépassement n'excédera pas 5 % et la réponse entrera immédiatement dans la bande des  $\pm 5\%$  autour de la valeur finale. Le premier dépassement ne deviendra « visible » que pour des valeurs de  $\xi$  inférieures à 0,69 (figure 15).

De cette observation, on en déduit deux cas pratiques :



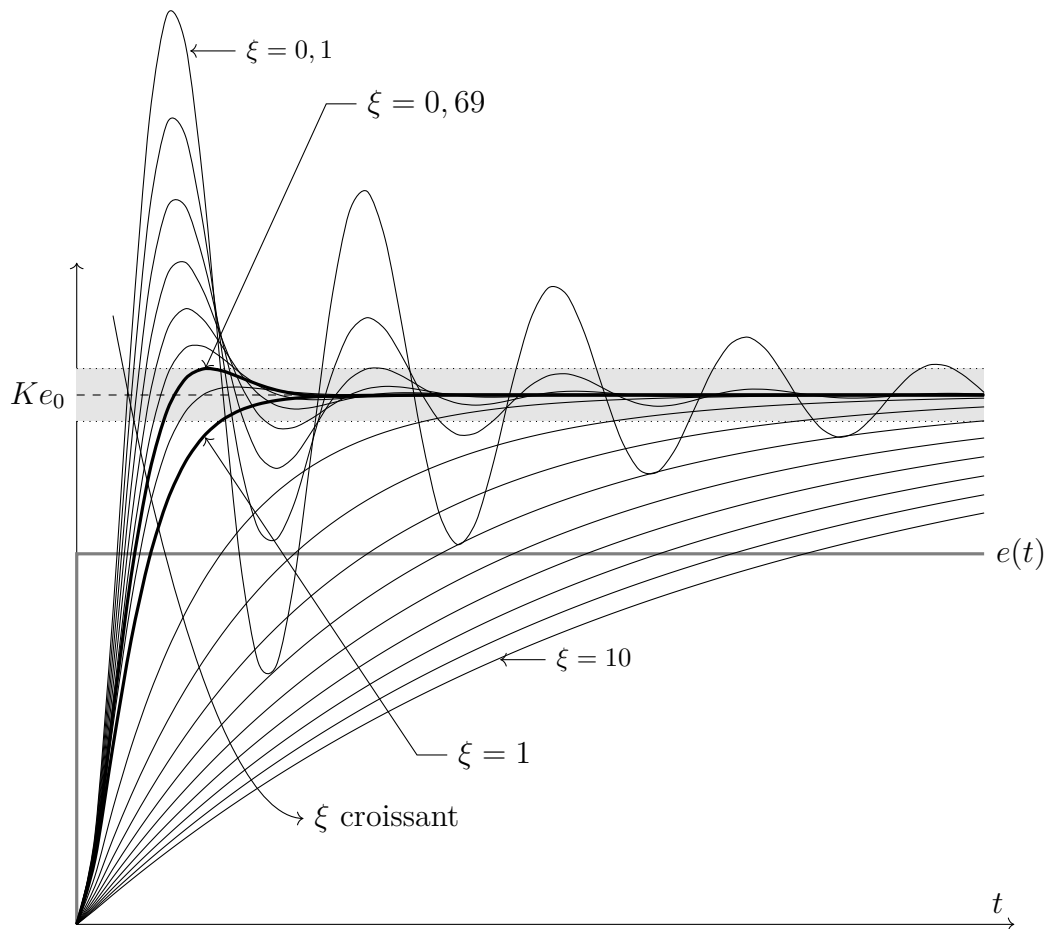
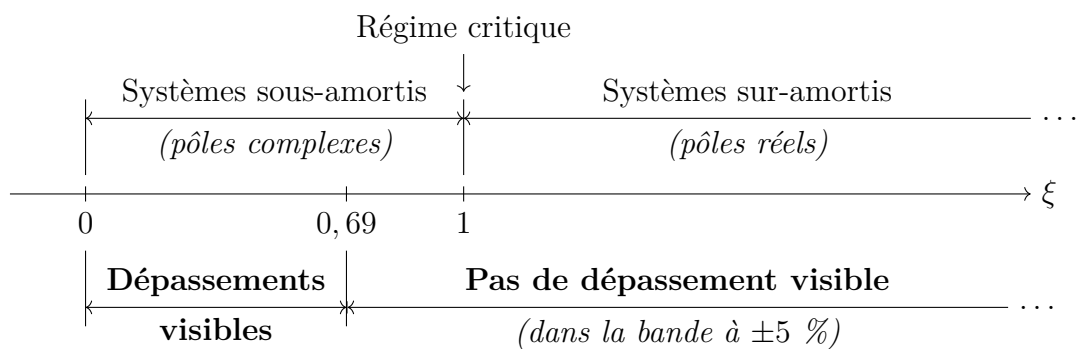


FIGURE 15 – Réponse indicielle d'un système du second ordre en fonction du facteur d'amortissement. Les courbes en gras représentent les réponses les plus rapides sans ( $\xi = 1$ ) et avec dépassement ( $\xi = 0,69$ ).

- réponse sans dépassement si  $\xi \geq 0,69$ , telle que la réponse indicielle converge vers la valeur finale sans dépassement visible ;
- réponse avec dépassements si  $0 < \xi < 0,69$ , telle que la réponse indicielle présente des dépassements visibles tout en convergeant vers la valeur finale.



### 3.2.1 Cas d'une réponse sans dépassement

Il est difficile d'identifier  $\xi$  et  $\omega_0$  dans le cas où la réponse temporelle ne présente pas de dépassement. L'approximation la plus raisonnable que l'on pourra faire sera d'identifier un modèle de comportement du type :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \exp(-Rp)$$

qui correspond à un modèle du premier ordre avec un retard pur  $R$  (en s).

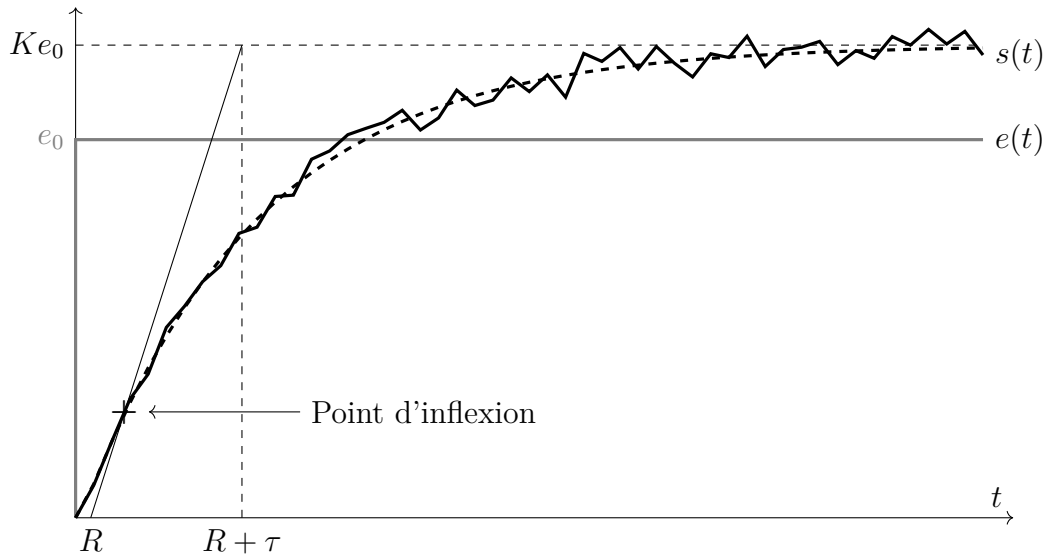


FIGURE 16 – Exemple de réponse indicielle réelle d'un système (du second ordre sans dépassement).

Pour identifier le gain  $K$ , là encore il est nécessaire de tracer l'asymptote finale horizontale à la réponse telle que  $K = s(\infty)/e_0$ . Pour identifier la constante de temps  $\tau$  et le retard  $R$ , il est nécessaire de tracer la tangente à la courbe en son point d'inflexion (approximativement au tiers de la montée). Le retard correspond à l'intersection entre cette droite et l'axe des abscisses et la constante de temps peut être déduite du temps de montée à partir du retard en suivant cette droite.

#### Remarque 3.1 (Identification d'un second ordre sur-amorti)

Il existe différentes méthodes d'identification d'un second ordre sur-amorti mais aucune n'est au programme. La présentation de cette méthode n'est donc *a priori* non exigible bien qu'elle puisse s'avérer utile en travaux pratiques.

### 3.2.2 Cas d'une réponse avec dépassements

Dans le cas où la réponse présente des dépassements (comme sur la figure 17), il est beaucoup plus facile d'identifier les trois constantes caractéristiques d'un second ordre sous-amorti que sont son gain  $K$ , sa pseudo-pulsation  $\omega_0$  et son facteur d'amortissement  $\xi$ .

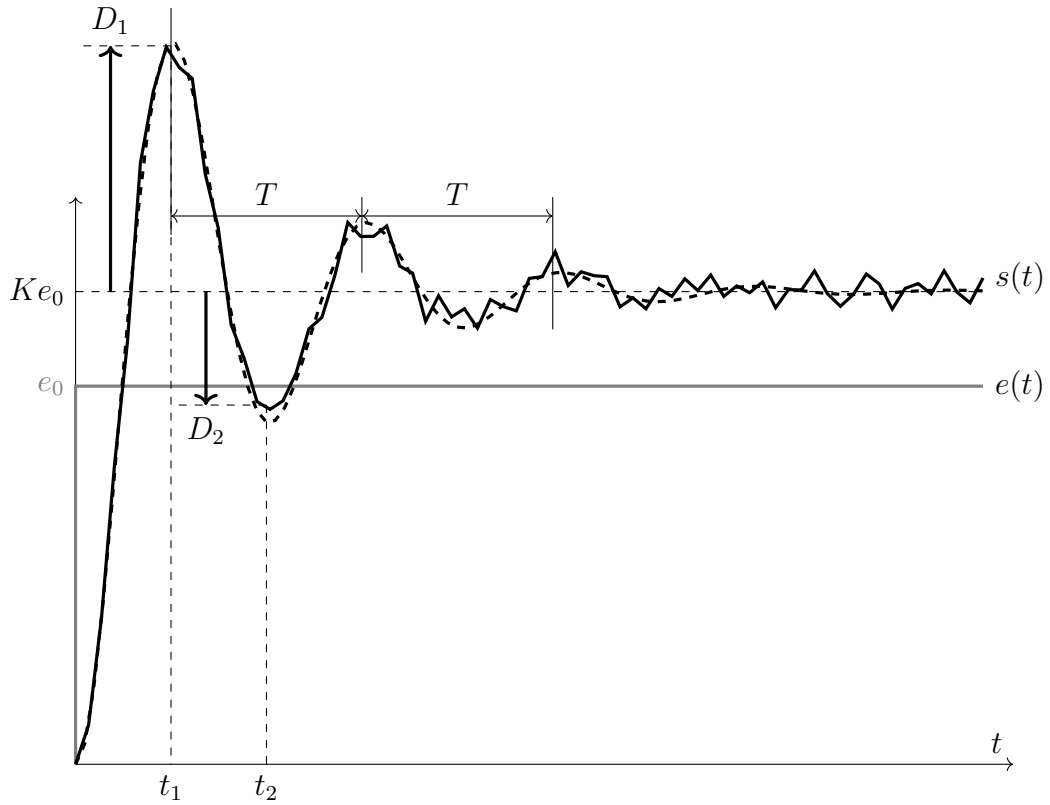


FIGURE 17 – Exemple de réponse indicielle réelle d'un système (du second ordre avec dépassements).

Pour identifier le gain  $K$  il est nécessaire de tracer l'asymptote finale horizontale à la réponse  $s(t)$ . Cette asymptote d'équation  $s(\infty) = Ke_0$  permet de déterminer immédiatement le gain  $K$  connaissant l'amplitude de l'entrée  $e_0$  en faisant le ratio :

$$K = \frac{s(\infty)}{e_0}$$

Pour identifier la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$ , il est nécessaire de mesurer des valeurs de dépassement. En pratique deux suffisent. À partir de la valeur du  $k$ -ième dépassement relatif

$$D_{k\%} = \left| \frac{s(t_k) - s(\infty)}{s(\infty)} \right|$$

il est possible de déterminer la valeur du facteur d'amortissement en utilisant la relation :

$$\xi = \sqrt{\frac{\ln^2(D_{k\%})}{k^2\pi^2 + \ln^2(D_{k\%})}}$$

ou d'utiliser un abaque reliant les dépassements relatifs au facteur d'amortissement (figure 12) permettant de déterminer la valeur sans outil numérique. Une fois la valeur de  $\xi$

connue, l'instant  $t_k$  auquel le  $k$ -ième dépassement a lieu permet de déterminer la valeur de la pseudo-pulsation du système non-amorti selon :

$$\omega_0 = \frac{k \pi}{t_k \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{2\pi}{T \sqrt{1 - \xi^2}} \gg \frac{2\pi}{T}$$

ou, de façon alternative, à partir de la pseudo-période apparente  $T = t_{k+2} - t_k$ . Dans tous les cas la pseudo-période du système non-amorti est plus élevée que la pulsation apparente.

## 4 Performances des systèmes asservis

Par définition, un système asservi est toujours conçu pour que sa sortie suive le plus fidèlement possible la consigne d'entrée. Les performances définies dans le cahier des charges fonctionnelles d'un système asservi sont sa rapidité, sa précision, son dépassement et sa sensibilité aux perturbations. Pour introduire l'étude de ces performances, on considérera un système asservi générique dont le schéma-blocs est donné sur la figure 18.

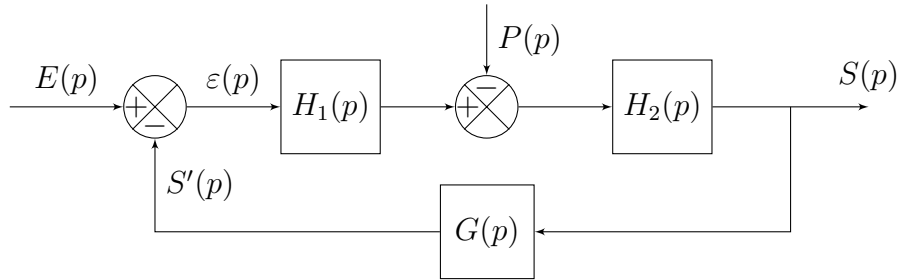


FIGURE 18 – Schéma-blocs générique d'un système asservi.

Par lecture directe ou en appliquant le théorème de superposition, on obtient l'expression de la sortie sous la forme :

$$\begin{aligned} S(p) &= \left( \frac{H_1(p) H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} \right) E(p) - \left( \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} \right) P(p) \\ &= \left( \frac{H_1(p) H_2(p)}{1 + \text{FTBO}(p)} \right) E(p) - \left( \frac{H_2(p)}{1 + \text{FTBO}(p)} \right) P(p) \end{aligned}$$

C'est une fonction linéaire de l'entrée  $E$  et de la perturbation  $P$  qui dépend de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée FTBO et définie comme :

$$\text{FTBO}(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p) H_2(p) G(p)$$

L'étude des performances des systèmes asservis peut être aussi bien basée sur l'étude de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) ou en boucle ouverte (FTBO) d'un système. Dans tous les cas, elle est réalisée autour d'un point de fonctionnement du système et elle n'est possible que si le système est stable.

## 4.1 Stabilité

Une manière intuitive de préciser la notion de stabilité est d'imaginer un système que l'on écarte d'une position d'équilibre avec une impulsion et de regarder son évolution : s'il retrouve sa position initiale, il est stable, s'il s'en écarte, il est instable. Dans le cas où il s'écarte de sa position initiale pour rejoindre une autre position stable, différente de la première, il est dit à stabilité indifférente. Ces différents comportements sont illustrés sur la figure 19.

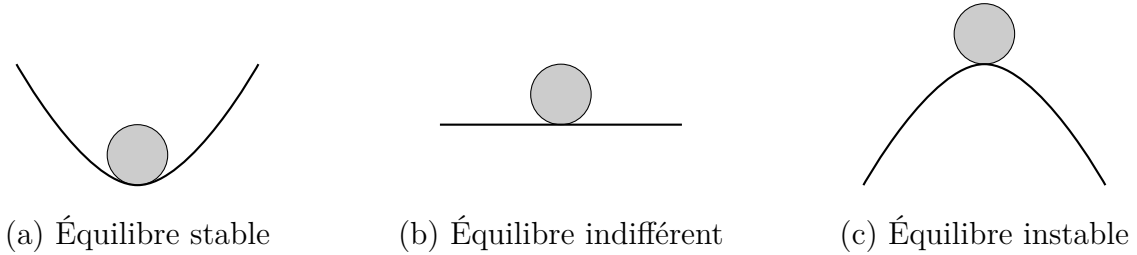


FIGURE 19 – Illustration des différents types d'équilibre.

Dans l'étude des systèmes asservis, c'est la notion d'équilibre stable qui nous intéresse.

### 4.1.1 Stabilité d'un système (étude de la FTBF)

De façon pratique, pour évaluer la stabilité d'un système, il suffit de le solliciter avec une entrée bornée (une impulsion ou un échelon) et de vérifier que sa sortie ne diverge pas mais tende vers une valeur finale constante. Ce que l'on peut traduire par :

#### Définition 4.1 (Stabilité)

Un système linéaire continu et invariant est stable si sa réponse impulsionnelle  $h(t)$  tend vers une valeur finie et asymptotiquement stable si cette valeur est nulle ; c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) &= \text{cste} && \text{(stable)} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) &= 0 && \text{(asymptotiquement stable)} \end{aligned}$$

Comme la réponse impulsionnelle d'un système correspond à la transformée de Laplace inverse de sa fonction transfert, la stabilité est une caractéristique intrinsèque de tout système. Pour le montrer, nous allons déterminer l'expression générale de la réponse impulsionnelle des systèmes linéaires continus et invariants régis par des équations différentielles à coefficients constants du type :

$$a_0 e(t) + a_1 \frac{de}{dt}(t) + \cdots + a_n \frac{d^m e}{dt^m}(t) = b_0 s(t) + b_1 \frac{ds}{dt}(t) + \cdots + b_m \frac{d^n s}{dt^n}(t)$$

et vérifiant le principe de causalité des systèmes ( $m \leq n$ ). En supposant, sans pertes de généralités, des conditions initiales nulles, la fonction de transfert des systèmes étudiés s'écrira alors :

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p + \cdots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + \cdots + b_n p^n}$$

En notant  $z_i$  chacun des  $m$  zéros du numérateur et  $p_j$  chacun des  $n$  pôles du dénominateur, il est possible de récrire cette fonction de transfert sous la forme factorisée :

$$H(p) = \frac{a_m \prod_{i=1}^m (p - z_i)}{b_n \prod_{j=1}^n (p - p_j)}$$

Lorsqu'un système est soumis à une entrée de type impulsion :

$$e(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = 1$$

sa réponse dans le domaine de Laplace correspond à sa fonction de transfert, admettant une décomposition en éléments simples de la forme :

$$H(p) = \sum_{\text{pôles réels}} \left[ \sum_{i=1}^{\text{multiplicité}} \frac{A_i}{(p - p_j)^i} \right] + \sum_{\text{paires de pôles complexes}} \left[ \sum_{i=1}^{\text{multiplicité}} \frac{B_i p + C_i}{((p - \Re[p_j])^2 + (\Im[p_j])^2)^i} \right]$$

où  $\Re[p_j]$  et  $\Im[p_j]$  sont respectivement les parties réelles et imaginaires du pôle complexe  $p_j$ . On peut remarquer que dans chaque terme associé à un pôle de la fonction de transfert se trouve une expression du type  $(p - \Re[p_j])$ , avec  $\Re[p_j] = p_j$  dans le cas des pôles réels. Or, le théorème d'amortissement, qui s'écrit pour une fonction  $f(t)$

$$\mathcal{L}[f(t) \exp(-at)](p) = \int_0^\infty f(t) \exp(-(p+a)t) dt = F(p+a)$$

peut être utilisé ici pour récrire la fonction de transfert sous la forme générique

$$H(p) = \sum_{i \geq 1} F_i(p - \Re[p_i])$$

où chaque  $F_i$  est une fonction admettant  $f_i$  comme transformée de Laplace inverse. Avec cette écriture, la réponse impulsionnelle s'écrit alors :

$$h(t) = \sum_{i \geq 1} f_i(t) \exp(\Re[p_i]t)$$

On peut dès lors remarquer qu'à la partie réelle de chaque pôle de la fonction de transfert  $H$  on a associé une fonction  $f_i$  multipliée par une exponentielle tel que le comportement asymptotique quand  $t \rightarrow \infty$  puisse être schématisé par :

$$F(p - \Re[p_i]) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) \exp(\Re[p_i]t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{si } \Re[p_i] < 0 \\ f(\infty) & \text{si } \Re[p_i] = 0 \\ \infty & \text{si } \Re[p_i] > 0 \end{cases}$$

À partir de cette analyse, on peut en déduire que chaque contribution de la réponse impulsionnelle associée à un pôle de partie réelle strictement négative ( $\Re[p_i] < 0$ ) tendra, du fait de l'exponentielle décroissante, asymptotiquement vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ . Ainsi, si tous les pôles d'une fonction transfert (en boucle fermée) d'un système sont à partie réelle strictement négative alors la réponse impulsionnelle du système sera composée d'exponentielles amorties, tendant asymptotiquement vers 0. Dans ce cas le système sera dit asymptotiquement stable. Ce qui se traduit par le théorème :

### Théorème 4.1 (Système asymptotiquement stable)

Un système linéaire continu et invariant est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative.

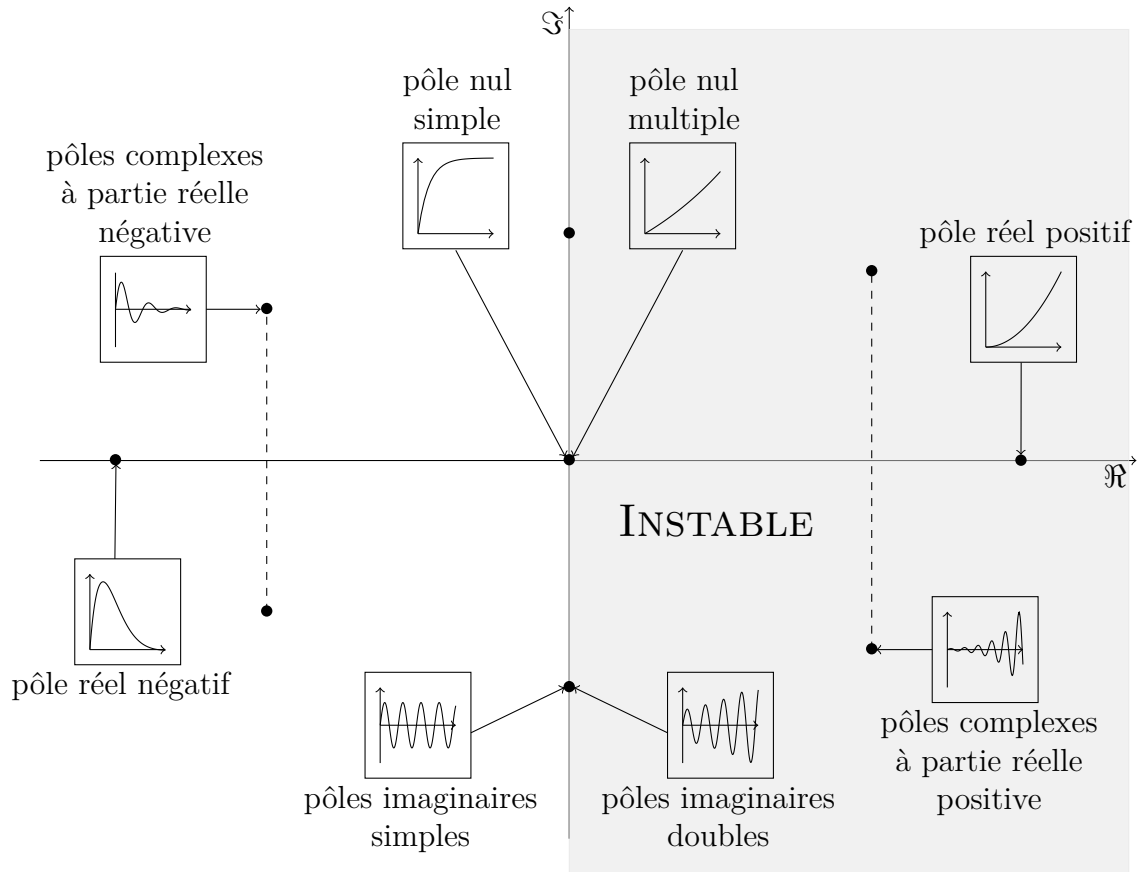


FIGURE 20 – Allures des réponses impulsionnelles en fonction de la position des pôles de la FTBF dans le plan complexe et stabilité des systèmes.

Pour discuter de la stabilité d'un système, il suffit donc de déterminer les pôles (les racines du dénominateur) de sa fonction de transfert en boucle fermée (FTBF). Il est habituel de les représenter dans le plan complexe (figure 20). Un système est stable si tous les pôles de sa FTBF se situent dans le demi-plan complexe ouvert gauche. Ce ne sera pas le cas :

- si au moins un des pôles est à partie réelle positive, alors le système est de type divergent exponentiel ;
- si une paire de pôles complexes conjugués est à partie réelle positive, la réponse du système sera oscillatoire divergente et le système instable ;
- si un pôle réel est nul et que tous les autres sont à partie réelle strictement négative, la réponse impulsionnelle du système atteindra une valeur finale non nulle et le système sera qualifié de stable mais pas d'asymptotiquement stable ;
- si une paire de pôles est à partie réelle nulle (pôles imaginaires purs) et que tous les

autres sont à partie réelle strictement négative, la réponse impulsionnelle du système sera oscillante et le système sera qualifié d'oscillateur.

#### 4.1.2 Stabilité d'un système asservi (étude de la FTBO)

À ce stade, il est nécessaire de remarquer que la présence d'une boucle de retour – intrinsèque à tout système asservi – peut être une cause d'instabilité. En effet, d'après l'expression de la sortie  $S(p)$  correspondant au schéma-blocs de la figure 18, on comprend aisément que si  $\text{FTBO}(p) \rightarrow -1$  alors le dénominateur commun des deux facteurs tend vers 0 et la réponse du système devient instable. L'étude de la stabilité de ce système asservi revient alors à rechercher les solutions de l'équation caractéristique

$$1 + \text{FTBO}(p) = 0$$

La fonction FTBO étant une fonction de la variable complexe  $p$ , étudier  $\text{FTBO}(p) = -1$  revient à étudier le tracé de cette fonction dans le plan complexe par rapport au point  $(-1, 0)$  appelé point critique. Il existe différents critères permettant d'étudier la stabilité d'un système à partir de sa FTBO qui seront vus lors du cours d'analyse harmonique.

## 4.2 Précision

La précision d'un système est caractérisée par la différence entre la consigne et la sortie du système appelée l'**erreur**. Cependant, l'évolution de cette différence n'est définie que si les signaux d'entrée et de sortie sont de même nature. Lorsque ce n'est pas le cas, la précision peut être évaluée à partir de la sortie du comparateur appelée **écart** et noté  $\varepsilon(t)$ . À partir d'un schéma-blocs caractéristique d'un système asservi comme celui de la figure 18, son expression est donnée par :

$$\varepsilon(p) = E(p) - S'(p) = \left( \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} \right) E(p) + \left( \frac{H_2(p)G(p)}{1 + \text{FTBO}(p)} \right) P(p)$$

avec  $\text{FTBO}(p) = H_1(p) H_2(p) G(p)$ .

L'expression de l'écart fait apparaître deux contributions :

- un écart de poursuite dû à la consigne  $E$  seule ;
- un écart de régulation dû à la perturbation  $P$  seule ;

simplement assemblées en appliquant le théorème de superposition. L'étude de la précision donne lieu à deux types de discussion : la précision dynamique qui s'intéresse à des valeurs instantanées de l'évolution du système (et a plutôt affaire aux dépassements) et la précision statique qui interroge le régime permanent pour évaluer la capacité du système à atteindre sa consigne.

#### Définition 4.2 (Écart statique)

L'écart statique correspond à la valeur finale de l'écart :

$$\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p)$$



### 4.2.1 Influence de la consigne : écart de poursuite

Dans cette partie, on considère un système asservi tel que décrit sur la figure 18 mais en négligeant l'effet de la perturbation (on considère que  $P(p) = 0$ ). Dans ce cas, l'écart s'exprime comme :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} E(p)$$

C'est une fonction linéaire de l'entrée qui ne dépend que de la fonction de transfert en boucle ouverte du système. Comme toute fonction de transfert, la FTBO peut se mettre sous la forme :

$$\text{FTBO}(p) = \frac{K_{\text{BO}}}{p^\alpha} \times \frac{1 + a_1 p + \dots + a_m p^m}{1 + b_1 p + \dots + b_n p^n}$$

faisant apparaître le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte  $K_{\text{BO}}$  et sa classe  $\alpha$ . Avec cette écriture, l'écart statique s'exprime comme :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{1 + \frac{K_{\text{BO}}}{p^\alpha}} E(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha+1}}{K_{\text{BO}} + p^\alpha} E(p)$$

En fonction de l'entrée, on parlera :

- d'écart (statique) de position  $\varepsilon_P$  (aussi appelé écart indiciel) lorsque l'entrée est un échelon  $e(t) = e_0 u(t)$  :

$$\varepsilon_P = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e_0 p^\alpha}{K_{\text{BO}} + p^\alpha}$$

- d'écart (statique) de traînage  $\varepsilon_T$  (aussi appelé écart en vitesse) lorsque l'entrée est une rampe  $e(t) = e_0 t u(t)$  :

$$\varepsilon_T = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e_0 p^{\alpha-1}}{K_{\text{BO}} + p^\alpha}$$

- d'écart (statique) d'accélération  $\varepsilon_A$  lorsque l'entrée est une parabole  $e(t) = e_0 \frac{t^2}{2} u(t)$  :

$$\varepsilon_A = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e_0 p^{\alpha-2}}{K_{\text{BO}} + p^\alpha}$$

Les expressions des différents écarts statiques en fonction de la classe des systèmes sont résumées dans la table 2. On peut remarquer que :

- plus l'entrée croît rapidement (du type  $t^n$ ,  $n$  grand), moins le système est précis ;
- plus la classe  $\alpha$  de la FTBO est grande (plus la BO possède d'intégrateurs), plus le système en boucle fermée est précis mais plus il présente de risques d'instabilités (cf. figure 20) ;
- plus le gain de la FTBO est grand, plus l'écart en boucle fermée diminue.

| Entrée                          |                 | $\alpha = 0$             | $\alpha = 1$         | $\alpha = 2$         | $\alpha = 3$ |
|---------------------------------|-----------------|--------------------------|----------------------|----------------------|--------------|
| $e(t) = e_0 u(t)$               | $\varepsilon_P$ | $\frac{e_0}{1 + K_{BO}}$ | 0                    | 0 (stable ?)         | 0 (stable ?) |
| $e(t) = e_0 t u(t)$             | $\varepsilon_T$ | $\infty$                 | $\frac{e_0}{K_{BO}}$ | 0                    | 0 (stable ?) |
| $e(t) = e_0 \frac{t^2}{2} u(t)$ | $\varepsilon_A$ | $\infty$                 | $\infty$             | $\frac{e_0}{K_{BO}}$ | 0            |

TABLE 2 – Écarts statiques de position  $\varepsilon_P$ , de traînage  $\varepsilon_T$  et d'accélération  $\varepsilon_A$  en fonction de la classe  $\alpha$  et du gain  $K_{BO}$  de la FTBO.

#### 4.2.2 Influence d'une perturbation : écart de régulation

Pour étudier l'influence d'une perturbation, la méthode est identique à celle proposée pour l'influence de la consigne. On considère toujours un système asservi tel que décrit sur la figure 18 mais en négligeant cette fois l'effet de la consigne (on considère que  $E(p) = 0$ ). Dans ce cas, l'écart s'exprime comme :

$$\varepsilon(p) = \frac{H_2(p) G(p)}{1 + \text{FTBO}(p)} P(p)$$

Comme nous ne souhaitons illustrer qu'une spécificité par rapport à la classe d'un système et la position des intégrateurs, on ne considérera qu'une perturbation du type échelon :

$$P(p) = p_0 u(p)$$

et un retour unitaire, c'est-à-dire avec  $G(p) = 1$  tel que l'écart statique soit défini par :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{H_2(p)}{1 + \text{FTBO}(p)} p_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p_0 p^\alpha H_2(p)}{K_{BO} + p^\alpha}$$

#### Proposition 4.1 (Action intégrale en amont de la perturbation)

*L'écart statique induit par une perturbation de type échelon appliquée à un système de classe 1 dont l'action intégrale est située en amont de la perturbation est nul.*

*Démonstration.* Sans perte de généralité, on fixe la classe du système à  $\alpha = 1$  et on considère alors deux cas :

1. l'intégrateur se situe en amont de la perturbation

$$H_1(p) = \frac{1}{p} \times \frac{K_1}{1 + \dots} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{K_2}{1 + \dots} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p_0 p \frac{K_2}{1 + \dots}}{K_{BO} + p} = 0$$

## 2. l'intégrateur se situe en aval de la perturbation

$$H_1(p) = \frac{K_1}{1 + \dots} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{1}{p} \times \frac{K_2}{1 + \dots} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p_0 p^{-1} \times \frac{K_2}{1 + \dots}}{\frac{K_{BO}}{K_{BO} + p}} = \frac{p_0 K_2}{K_{BO}}$$

□

### Définition 4.3 (Système robuste)

Un système asservi est dit robuste s'il est insensible à l'effet d'une perturbation.

### Propriété 4.1 (Action intégrale et robustesse)

Un système asservi est insensible à l'effet d'une perturbation de type échelon seulement s'il contient une action intégrale en amont de la perturbation.

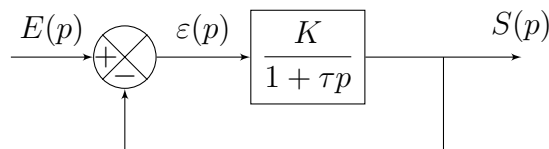
Pour rendre un système robuste et ainsi annuler l'effet d'une perturbation, il est nécessaire de placer une action intégrale en amont de la perturbation. Or ce faisant, on augmente la classe du système qui peut alors devenir instable.

## 4.3 Rapidité

Pour étudier la rapidité d'un système asservi, on étudiera deux cas : (i) le cas où la fonction de transfert en boucle ouverte est un système du premier ordre et (ii) le cas où la fonction de transfert en boucle ouverte est un système du second ordre.

### 4.3.1 Rapidité d'un système du premier ordre asservi

On considère le système du premier ordre asservi suivant :



La fonction de transfert en boucle fermée de ce système à retour unitaire s'écrit :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{\frac{K}{1 + \tau p}}{1 + \frac{K}{1 + \tau p}} = \frac{K}{1 + K + \tau p} = \frac{\frac{K}{1 + K}}{1 + \frac{\tau}{1 + K} p}$$

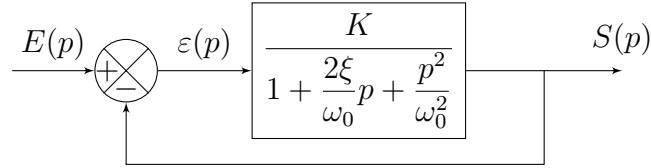
que l'on peut identifier avec une fonction de transfert du premier ordre :

$$H(p) = \frac{K'}{1 + \tau' p} \quad \text{avec} \quad K' = \frac{K}{1 + K} < K \quad \text{et} \quad \tau' = \frac{\tau}{1 + K} < \tau$$

Cette identification montre qu'un système du premier ordre bouclé est plus rapide qu'un système non bouclé car la constante de temps diminue ( $\tau' < \tau$ ). On notera aussi que le gain diminue ( $K' < K$ ).

### 4.3.2 Rapidité d'un système du second ordre asservi

On considère le système du second ordre asservi suivant :



La fonction de transfert en boucle fermée de ce système à retour unitaire s'écrit :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}{1 + \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K}{1 + K + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0(1+K)}p + \frac{p^2}{\omega_0^2(1+K)}}$$

que l'on peut identifier avec une fonction de transfert du second ordre :

$$H(p) = \frac{K'}{1 + \frac{2\xi'}{\omega'_0}p + \frac{p^2}{(\omega'_0)^2}}$$

avec, si  $K > 0$  :

$$K' = \frac{K}{1+K} < K, \quad \omega'_0 = \omega_0\sqrt{1+K} > \omega_0 \quad \text{et} \quad \xi' = \frac{\xi}{\sqrt{1+K}} < \xi$$

Cette identification montre qu'un système du second ordre bouclé est moins amorti car le coefficient d'amortissement diminue ( $\xi' < \xi$ ). Si le facteur d'amortissement de la FTBO était supérieur à 0,69, alors le système devient aussi plus rapide (tant que  $\xi' \geq 0,69$ ). Par contre, si le coefficient d'amortissement de la FTBO était déjà inférieur à 0,69 alors le système bouclé sera moins rapide que le système non bouclé du fait des nombreux dépassements. Enfin, on notera là encore que le gain diminue ( $K' < K$ ).

\*      \*

\*