DS 2, Correction rapide.

Exercice 1

$\theta_0 = \arccos\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$.

1. $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{3}[$ car $\frac{1+\sqrt{5}}{4} > \frac{1}{2}$.
2. $\cos(2\theta_0) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$
   $\cos(4\theta_0) = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} = -\cos(\theta_0)$.
3. On déduit du point suivant :

   $$\theta_0 \equiv \frac{\pi}{5} \quad [2\pi/5] \text{ ou } \theta_0 \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi/3].$$

   Sachant $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{3}[$, on en déduit :

$$\theta_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Exercice 2

On souhaite étudier la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

1. f est bien définie sur $\mathbb{R}$, car si x est réel : $-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$
   f est une fonction paire.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ car si $x \in \mathbb{R}^*$: $-1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < 1$.
3. $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$ pour $x > 0$.
4. Sachant $f(1) = \pi/2 = 2\arctan(1)$, on obtient : si $x > 0$ alors $f(x) = 2\arctan(x)$.
   On vérifie la formule en 0 $f(0) = 0$.
   si $x \leq 0$ alors $f(x) = 2\arctan(x)$.
5. Pour $x < 0$: $f(x) = -2\arctan(x)$.

Exercice 3

On rappelle que, pour x réel, $\tanh(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

1. Cf cours.

2. Si $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{2(e^{4x}+1)}{e^{4x}-1} - \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \frac{2(e^{4x}+1)}{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)} - \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

$$= \frac{2(e^{4x}+1)-(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)} = \frac{2(e^{4x}+1)-(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)} = \frac{e^{4x}-2e^{2x}+1}{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)} = \frac{(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)}$$

$$\frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh(x)} = \tanh(x)$$

3. Par simplification télescopique :

$$u_n(x) = 2^0\tanh(2^0x) + 2^1\tanh(2^1x) + \cdots + 2^n\tanh(2^nx) = \frac{2^{n+1}}{\tanh(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\tanh(x)}$$

4. $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, pour $x \to +\infty$: $\frac{u_n(x)}{2^n} \to 2^{n+1} - 1$.
5. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, pour $n \to \infty$: $\frac{u_n(x)}{2^n} \to 2$.
   Pour $x \in \mathbb{R}_-^*$ fixé, pour $n \to \infty$: $\frac{u_n(x)}{2^n} \to -2$.

Exercice 4

On fixe $a > 0$ et on considère la fonction définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$$

1. Sur les intervalles $]-\infty, 1/a[$ et $]1/a, +\infty[$: $f'(x) = \arctan'(x)$.
2. Si $x < 1/a$ les fonctions à droite et à gauche étant égales en 0 :

$$f(x) = \arctan(a) + \arctan(x).$$

   Pour la seconde formule, on peut par exemple étudier la limite de f en $1/a^+$, en l'occurrence $-\frac{\pi}{2}$ et le fait que $\arctan(a) + \arctan(1/a) = \pi/2$. Si $x > 1/a$ alors

$$f(x) = \arctan(a) + \arctan(x) - \pi.$$