

Calcul vectoriel

N. Mesnier

Lycée Jean Perrin, Lyon

2023–2024

Plan du cours

- 1 Introduction
- 2 Opérations vectorielles
- 3 Applications

1

2

3

Introduction

Les vecteurs

sont des outils privilégiés

pour préciser :

- la situation d'un élément matériel dans un référentiel ;
- la vitesse ou l'accélération d'un de ses points par rapport à un référentiel donné ;
- les actions mécaniques agissant sur lui.



modèles et calculs
en mécanique

Les vecteurs

sont des outils privilégiés

pour préciser :

- la situation d'un élément matériel dans un référentiel ;
- la vitesse ou l'accélération d'un de ses points par rapport à un référentiel donné ;
- les actions mécaniques agissant sur lui.



modèles et calculs
en mécanique

Définition (Vecteur)

Un vecteur est un objet mathématique, noté \vec{u} par exemple pour le « vecteur u », qui appartient un espace vectoriel et qui possède trois caractéristiques :

- une direction ;
- un sens ;
- une norme.

• Notations

- \mathcal{E} : ensemble des points de l'espace géométrique 3D ;
- \mathcal{V} : ensemble des vecteurs de l'espace ;
- (\vec{u}, \vec{v}) une mesure de l'angle orienté de \vec{u} vers \vec{v} ;
- $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -(\vec{u}, \vec{v}) [2\pi]$ une mesure de l'angle opposé.

● Addition vectorielle

Pour former la somme de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , il suffit de considérer trois points A, B, C de \mathcal{E} tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Le vecteur somme est alors donné par la relation de Chasles :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

L'addition vectorielle vérifie les propriétés suivantes :

- elle est associative : $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- elle est commutative : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- elle possède un élément neutre, noté $\vec{0}$, tel que :
 $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- chaque vecteur \vec{u} de \mathcal{V} possède un vecteur symétrique \vec{v} vérifiant
 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$ et noté $-\vec{u}$.

Propriétés élémentaires

● Produit d'un vecteur et d'un réel

À tout nombre réel λ et à tout vecteur \vec{u} de \mathcal{V} , on peut associer le vecteur $\lambda \vec{u}$.
Ce produit externe vérifie les propriétés suivantes :

- il possède un élément neutre : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
- il est distributif par rapport à l'addition des réels :
 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ et } \forall \vec{u} \in \mathcal{V}, (\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
- il est distributif par rapport à l'addition vectorielle :
 $\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}, \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$

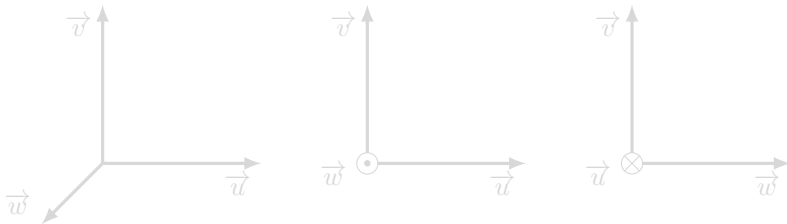
● Espace vectoriel

On dira, pour résumer les propriétés de l'addition vectorielle et du produit externe, que le triplet $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Base d'un espace vectoriel

Définition (Base)

Une base d'un espace vectoriel de dimension trois est un triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de vecteurs non coplanaires.



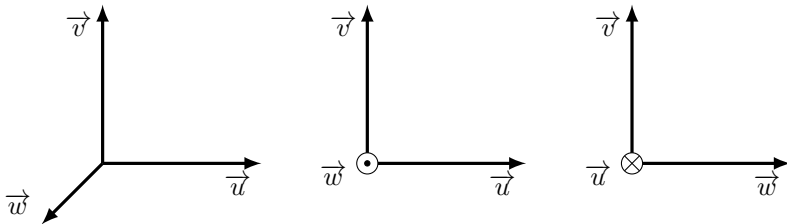
Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une **base directe**, alors les triplets $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ et $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$, obtenus par permutations circulaires, sont aussi des bases directes.

Les triplets $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$, $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$ et $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$, où on a à chaque fois échangé deux vecteurs, sont des **bases indirectes**.

Base d'un espace vectoriel

Définition (Base)

Une base d'un espace vectoriel de dimension trois est un triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de vecteurs non coplanaires.



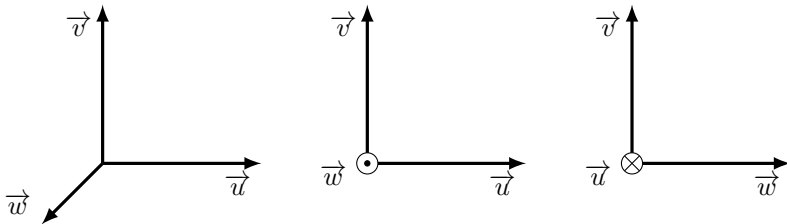
Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une **base directe**, alors les triplets $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ et $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$, obtenus par permutations circulaires, sont aussi des bases directes.

Les triplets $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$, $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$ et $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$, où on a à chaque fois échangé deux vecteurs, sont des **bases indirectes**.

Base d'un espace vectoriel

Définition (Base)

Une base d'un espace vectoriel de dimension trois est un triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de vecteurs non coplanaires.



Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une **base directe**, alors les triplets $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ et $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$, obtenus par permutations circulaires, sont aussi des bases directes.

Les triplets $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$, $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$ et $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$, où on a à chaque fois échangé deux vecteurs, sont des **bases indirectes**.



Opérations vectorielles

Produit scalaire

Définition (Produit scalaire)

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace. On appelle produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} le réel $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\begin{array}{ll} \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}, & \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 ; \\ \text{sinon,} & \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \end{array}$$

Produit scalaire

Propriété

Le produit scalaire est une application de $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$

- bilinéaire :

$$(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) + \mu (\vec{u}_2 \cdot \vec{v})$$

- symétrique :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

- définie positive :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$$

Définition (Norme)

On appelle norme d'un vecteur \vec{v} le réel

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \geq 0$$

Produit scalaire

Proposition (Perpendicularité)

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

Produit scalaire = détecteur d'orthogonalité !

Produit scalaire

Proposition (Perpendicularité)

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

Produit scalaire = détecteur d'orthogonalité !

Produit vectoriel

Définition (Produit vectoriel)

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace. On appelle produit vectoriel de \vec{u} et de \vec{v} le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ;
- sinon, l'unique vecteur \vec{w} orthogonal à \vec{u} et à \vec{v} , de norme :

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

et tel que le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit direct (une base directe de l'espace).

Produit vectoriel

Propriété

Le produit vectoriel est une application de $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$

- bilinéaire :

$$(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) \wedge \vec{v} = \lambda (\vec{u}_1 \wedge \vec{v}) + \mu (\vec{u}_2 \wedge \vec{v})$$

- antisymétrique :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

Proposition

Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe, alors

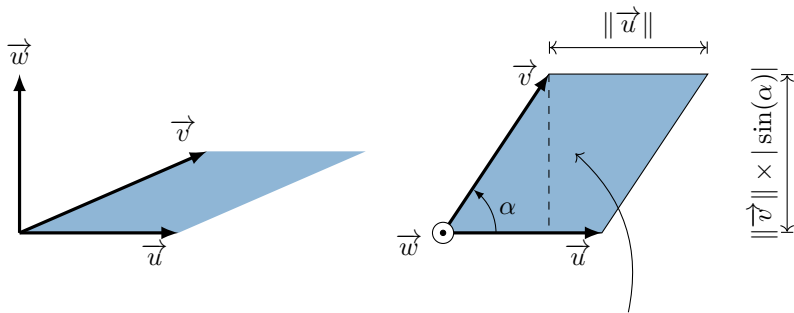
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}) = \vec{w}$$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = -(\vec{w} \wedge \vec{v}) = \vec{u}$$

$$\vec{w} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{w}) = \vec{v}$$

Produit vectoriel

Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non colinéaires d'un plan \mathcal{P} , alors le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal à \mathcal{P} et de norme la surface du parallélogramme défini par les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans le plan \mathcal{P} .



$$\text{Aire} = \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

Produit vectoriel

Proposition (Colinéarité)

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls, on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Produit vectoriel = détecteur de colinéarité !

Produit vectoriel

Proposition (Colinéarité)

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls, on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Produit vectoriel = détecteur de colinéarité !

Produit vectoriel

Proposition (Double produit vectoriel)

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , on a :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$$

Produit mixte

Définition (Produit mixte)

Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace. On appelle produit mixte (ou déterminant) du triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ le réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Propriété

Le produit mixte est une application de $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$

- trilinéaire :

$$\begin{aligned} [(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) \wedge (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2)] \cdot \vec{w} &= \lambda \alpha (\vec{u}_1 \wedge \vec{v}_1) \cdot \vec{w} + \lambda \beta (\vec{u}_1 \wedge \vec{v}_2) \cdot \vec{w} \\ &\quad + \mu \alpha (\vec{u}_2 \wedge \vec{v}_1) \cdot \vec{w} + \mu \beta (\vec{u}_2 \wedge \vec{v}_2) \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

- antisymétrique :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -\det(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$$

- alternée :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \det(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$$

Produit mixte

Proposition (Coplanéité)

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} non nuls, on a :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \iff \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires.}$$

Produit mixte = détecteur de coplanéité!

Proposition

Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe, alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 1$$

Produit mixte

Proposition (Coplanéité)

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} non nuls, on a :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \iff \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires.}$$

Produit mixte = détecteur de coplanéité!

Proposition

Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe, alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 1$$

Produit mixte

Proposition (Coplanéité)

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} non nuls, on a :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \iff \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires.}$$

Produit mixte = détecteur de coplanéité!

Proposition

Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe, alors

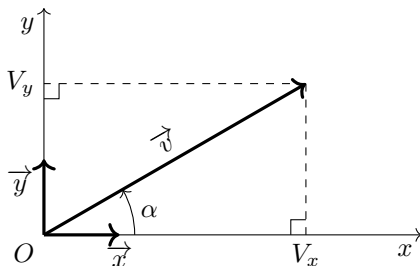
$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 1$$



Applications

Projection d'un vecteur

Soit une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ orthonormée et \vec{v} un vecteur orienté d'un angle $\alpha = (\vec{x}, \vec{v})$ par rapport à l'horizontale.



Coordonnées du vecteur \vec{v} :

$$v_x = \vec{v} \cdot \vec{x} = \|\vec{v}\| \times \underbrace{\|\vec{x}\|}_{=1} \times \underbrace{\cos(\vec{v}, \vec{x})}_{-\alpha} = \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$$

$$v_y = \vec{v} \cdot \vec{y} = \|\vec{v}\| \times \underbrace{\|\vec{y}\|}_{=1} \times \underbrace{\cos(\vec{v}, \vec{y})}_{\frac{\pi}{2} - \alpha} = \|\vec{v}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \|\vec{v}\| \times \sin(\alpha)$$

Projection d'un vecteur

Ainsi, tout vecteur \vec{v} peut se décomposer de façon unique dans une base orthonormée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tel que :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{x} + (\vec{v} \cdot \vec{y}) \vec{y} + (\vec{v} \cdot \vec{z}) \vec{z} \\ &= v_x \vec{x} + v_y \vec{y} + v_z \vec{z}\end{aligned}$$

Du théorème de Pythagore, on en déduit que la norme du vecteur \vec{v} , notée $\|\vec{v}\|$, est la grandeur toujours positive :

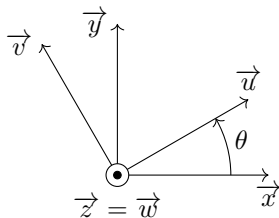
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Changement de base

Définition (Figure géométrale)

On appelle figure géométrale une figure plane permettant de relier deux bases orthonormées possédant une direction commune. L'orientation des vecteurs d'une base par rapport à l'autre est définie par un angle que l'on représentera toujours positif et inférieur à $\pi/4$.

Projections nécessaires au passage de $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ vers $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:



$$\vec{u} \cdot \vec{x} = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{y} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{x} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sin(\theta)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{y} = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

Changement de base

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = \cos(\theta) \quad \vec{u} \cdot \vec{y} = \sin(\theta) \quad \vec{v} \cdot \vec{x} = -\sin(\theta) \quad \vec{v} \cdot \vec{y} = \cos(\theta)$$

- Exemple

$$\vec{V} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ s'écrira

$$\begin{aligned}\vec{V} &= (\vec{V} \cdot \vec{x}) \vec{x} + (\vec{V} \cdot \vec{y}) \vec{y} + (\vec{V} \cdot \vec{z}) \vec{z} \\ &= (a \cos(\theta) - b \sin(\theta)) \vec{x} + (a \sin(\theta) + b \cos(\theta)) \vec{y} + c \vec{z}\end{aligned}$$

dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Par contre, quelle que soit la base choisie pour exprimer les coordonnées de \vec{V} , sa norme sera toujours identique :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Distance d'un point à une droite

Soit \mathcal{D} une droite passant par le point A et dirigée par le vecteur non nul \vec{u} .

Alors :

$$M \in \mathcal{D} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$$

Proposition (Distance point-droite)

Soit M un point quelconque de \mathcal{E} et \mathcal{D} une droite passant par le point A et dirigée par le vecteur \vec{u} . La distance du point M à la droite \mathcal{D} est définie par :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Distance d'un point à un plan

Soit \mathcal{P} un plan contenant le point A
et de normale définie par le vecteur non nul \vec{n} .

Alors :

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Proposition (Distance point-plan)

Soit M un point quelconque de \mathcal{E} et \mathcal{P} un plan contenant le point A et de normale \vec{n} . La distance du point M au plan \mathcal{P} est définie par :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|}$$

Décomposition orthogonale d'un vecteur

Soit \mathcal{P} un plan de normale $\vec{n} \neq \vec{0}$.

En exploitant la formule du double produit vectoriel selon

$$(\vec{u} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n} = (\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{n}) \vec{u}$$

il vient que l'on peut décomposer tout vecteur non nul \vec{u} selon :

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{n}\|^2} [(\vec{n} \cdot \vec{u}) \vec{n} + (\vec{n} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{n}]$$

en un vecteur colinéaire à la normale \vec{n} et en un vecteur parallèle au plan \mathcal{P} .

Une « nouvelle » version du théorème de Pythagore !

$$\left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \right)^2 + \left(\frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \right)^2 = 1$$



N. Mesnier, lycée Jean Perrin, Lyon