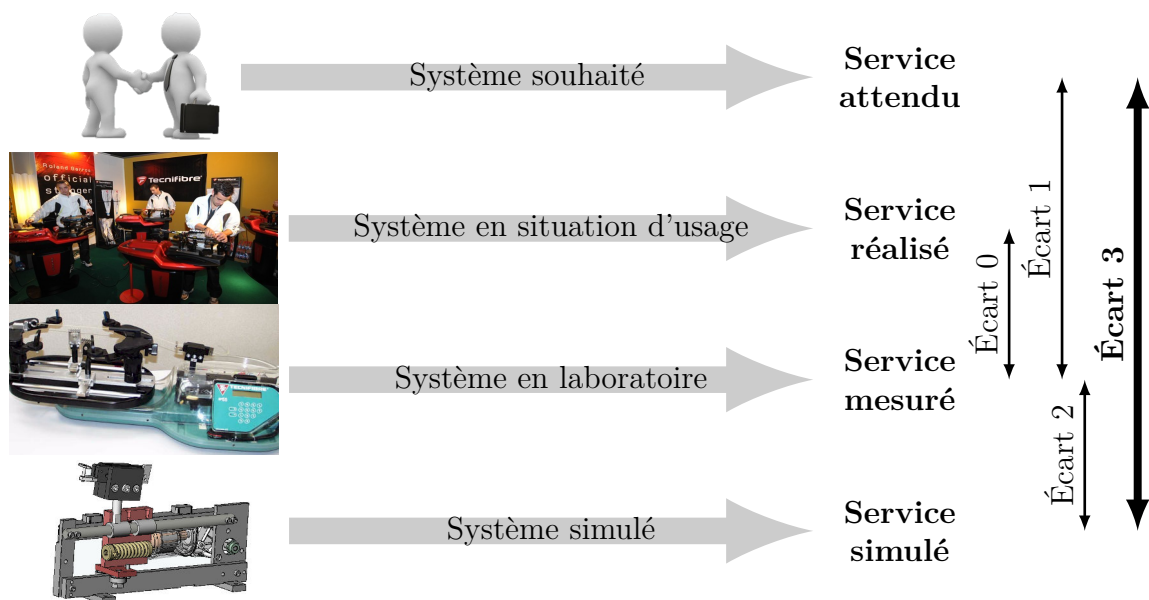


# Modélisation et comportement cinématique des systèmes

—  $TD_s$  —



**Écart 0** – évalue la fiabilité et la fidélité du système de laboratoire didactisé par rapport au système réel. Il répond aux questions « le système de laboratoire est-il représentatif du système réel ? Permet-il de l'étudier de manière fiable ? »

**Écart 1** – évalue le respect du CDCF par le système réel sur prototype instrumenté en laboratoire. Il répond à la question « le système réalisé, répond-il au CDCF ? ».

**Écart 2** – évalue la fiabilité du modèle et de ses hypothèses. Il répond à la question « le modèle est-il correct ? ».

**Écart 3** – évalue, en phase de conception, le respect du CDCF à partir d'un modèle simulé. Il répond à la question « le modèle du système satisfait-il les exigences du CDCF ? ».

*Activités de TD*

## Exercices

|                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------|----|
| Exercice 1 – Éolienne à pale endommagée.....                            | 3  |
| Exercice 2 – Régulateur de Watt.....                                    | 5  |
| Exercice 3 – Pompe hydraulique à pistons radiaux.....                   | 8  |
| Exercice 4 – Transmission homocinétique par joint de Oldham.....        | 10 |
| Exercice 5 – Attraction Magic Arms.....                                 | 12 |
| Exercice 6 – Modélisation d'une encapsuleuse.....                       | 16 |
| Exercice 7 – Planeuse sous traction pour bandes d'acier inoxydable..... | 19 |
| Exercice 8 – Robot Rovio.....                                           | 23 |
| Exercice 9 – Étude d'un différentiel automobile.....                    | 27 |
| Exercice 10 – Système d'aide à la navigation.....                       | 31 |
| Exercice 11 – Table élévatrice.....                                     | 34 |



Nicolas Mesnier, lycée Jean Perrin, Lyon  
 Compléments & mises à jour sur le site des MPSI  
<https://cahier-de-prepa.fr/mpsi-perrin>

— Version du 20 novembre 2023 —

## Éolienne à pôle endommagée

### Objectif

Vérifier l'exigence de vitesse maximale du centre d'inertie d'un ensemble de deux pâles d'une éolienne (dont l'une est brisée).

On s'intéresse à une éolienne de petite puissance (18 kW) qui peut être installée chez un particulier pour produire de l'électricité. Ce type d'éolienne ne possède que deux pâles de  $\ell = 4,5$  m de longueur et peut être modélisé par le schéma cinématique de la figure 1.1.

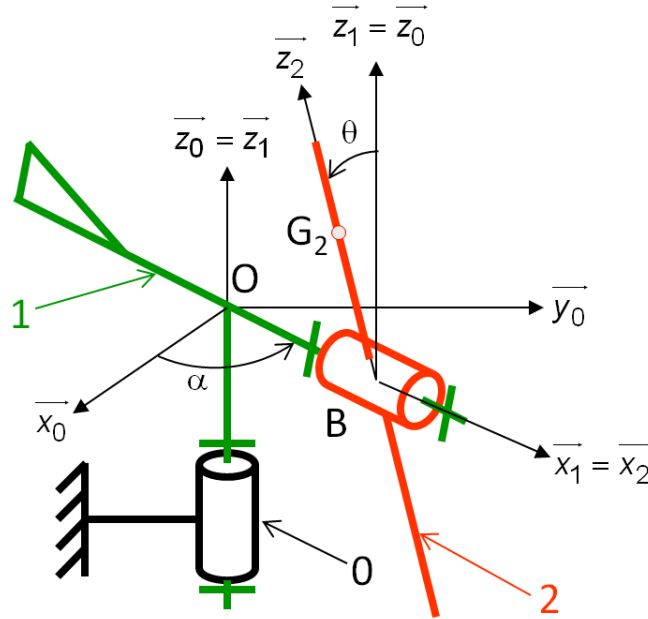


FIGURE 1.1 – Schéma cinématique de l'éolienne.

Ce système est constitué de trois solides :

- le mât **0** auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  fixe par rapport au sol et tel que l'axe  $\vec{z}_0$  soit dirigé suivant la verticale ascendante ;
- le corps **1** auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le mât **0** avec  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  ;
- les pâles **2** auxquelles on associe le repère  $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x}_1)$  avec le corps **1** avec  $\theta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$  et  $\overrightarrow{OB} = b\vec{x}_1$  avec  $b = 1$  m.

### Extrait du cahier des charges

Pour des raisons de stabilité, la vitesse maximale du centre d'inertie des pâles ne doit pas être supérieure à  $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  à la fréquence de rotation nominale de  $15 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$ .

On suppose qu'une des pâles a été endommagée suite à un impact avec un corps étranger (voir la figure 1.2). On note  $G_2$  le centre d'inertie, dont la position suite à la rupture d'une des pâles est définie par  $\overrightarrow{BG_2} = c\vec{z}_2$  avec  $c = 2,25$  m. Le centre d'inertie des pâles n'étant dès lors plus situé sur l'axe de rotation des pâles par rapport au corps, l'ensemble va se mettre à vibrer dès la mise en rotation.

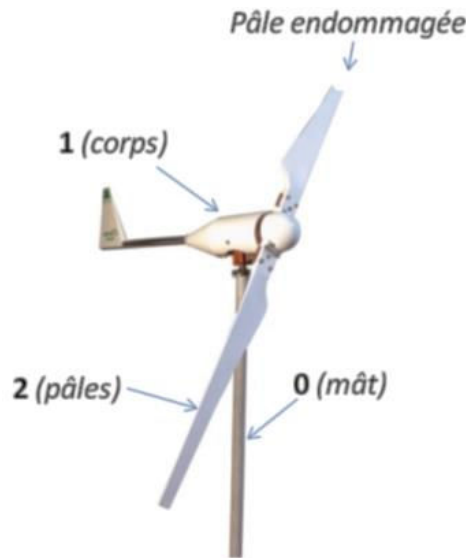


FIGURE 1.2 – Schéma de l'éolienne avec une pale brisée.

**Question 1.1.** Réaliser le graphe de structure du mécanisme puis les figures géométrales associées à chaque paramètre angulaire.

**Question 1.2.** Donner l'expression des taux de rotation  $\overrightarrow{\Omega}_{1/0}$  et  $\overrightarrow{\Omega}_{2/1}$ . En déduire celle du taux de rotation de  $\overrightarrow{\Omega}_{2/0}$ .

**Question 1.3.** Déterminer la trajectoire du point  $G_2$  d'une pale 2 dans son mouvement par rapport au corps 1 puis celle du point  $G_2$  appartenant au corps 1 dans son mouvement par rapport au mât 0. En déduire la nature de la trajectoire du point  $G_2$  d'une pale par rapport au mât 0.

**Question 1.4.** Donner l'expression de la vitesse du point B appartenant au corps 1 dans son mouvement par rapport au mât 0 notée  $\overrightarrow{V}_{B,1/0}$ .

**Question 1.5.** Donner l'expression de la vitesse du point  $G_2$  appartenant à une pale 2 dans son mouvement par rapport au corps 1 notée  $\overrightarrow{V}_{G_2,2/1}$ .

**Question 1.6.** Donner l'expression de la vitesse du point  $G_2$  appartenant au corps 1 dans son mouvement par rapport au mât 0 notée  $\overrightarrow{V}_{G_2,1/0}$ .

**Question 1.7.** En déduire l'expression de la vitesse du point  $G_2$  appartenant à une pale 2 dans son mouvement par rapport au mât 0 notée  $\overrightarrow{V}_{G_2,2/0}$ .

**Question 1.8.** Conclure quant au respect du cahier des charges.

— EXERCICE 2 —

## Régulateur de Watt

---

### Objectif

---

Vérifier la stabilité cinématique du régulateur de Watt.

---

James Watt inventa en 1788 le régulateur à boules, qui permet de réguler automatiquement la vitesse d'un moteur. Ce système est constitué de deux boules situées aux extrémités d'un pantographe (voir figure 2.1) fixé sur un axe en rotation. Plus l'axe tourne vite, plus les boules s'en écartent par effet centrifuge ce qui a pour effet de descendre la partie supérieure du pantographe. Le régulateur de Watt permet de moduler la position verticale du pantographe qui peut alors être utilisé pour commander la vanne d'admission de vapeur d'une machine à vapeur.

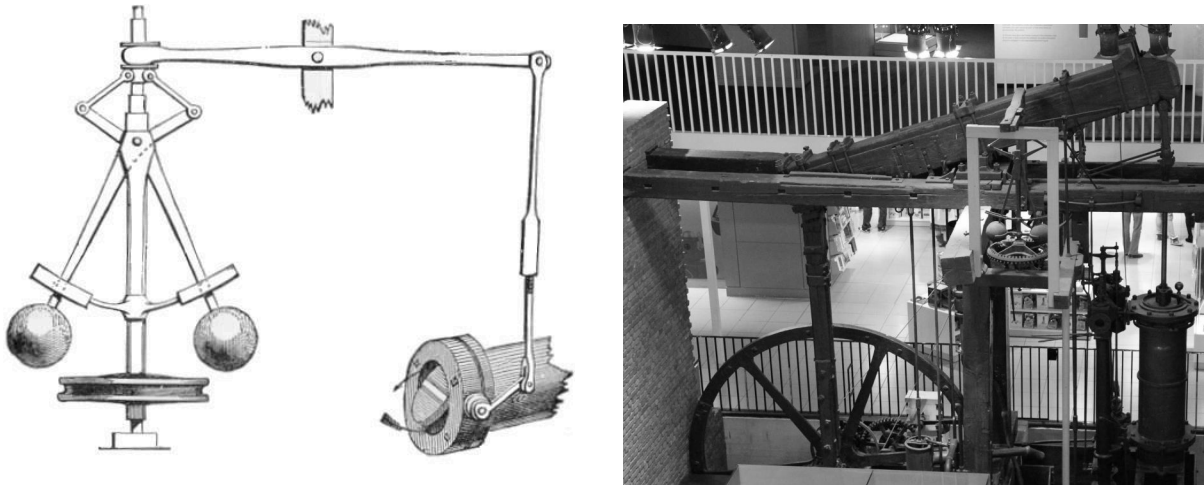


FIGURE 2.1 – Esquisse du régulateur de Watt et régulateur sur une machine à vapeur.

### Extrait du cahier des charges

Exigence : le système ne doit pas devenir instable sous l'effet centrifuge des boules.

Critère quantifiant : on établit que l'angle du levier **2** avec l'axe de rotation de l'ensemble ne doit pas être supérieur à une certaine valeur sous peine de risquer l'emballement des boules (centrifugation et oscillations d'amplitude croissante).

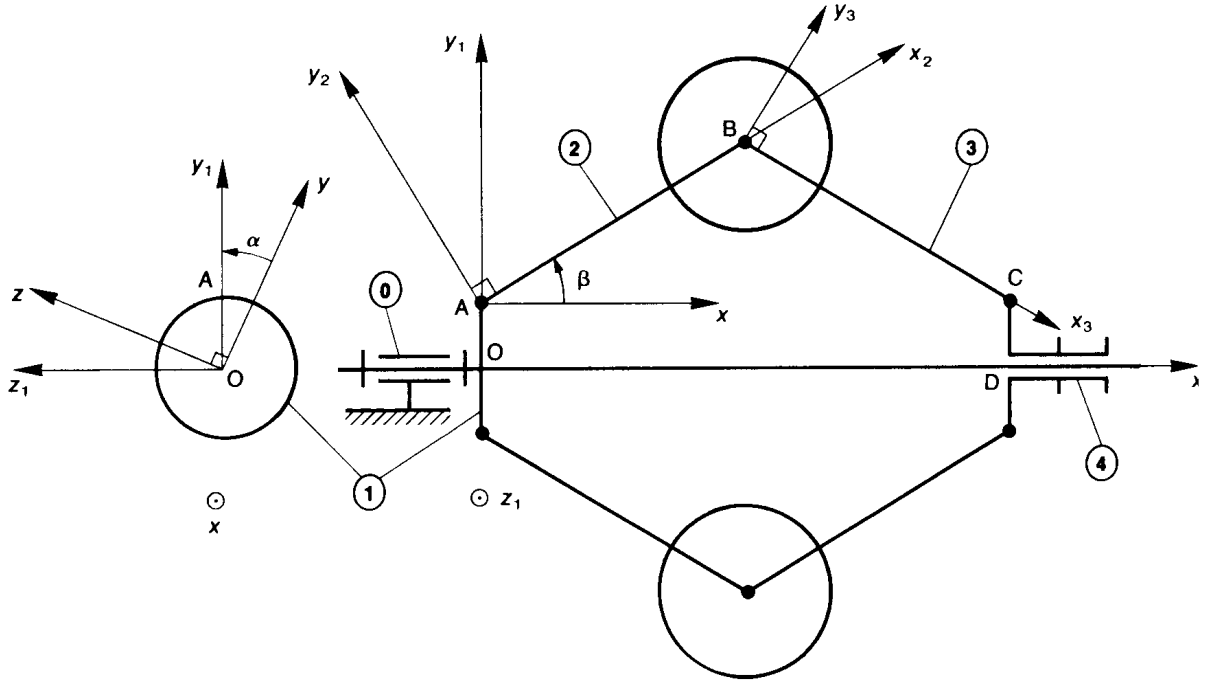
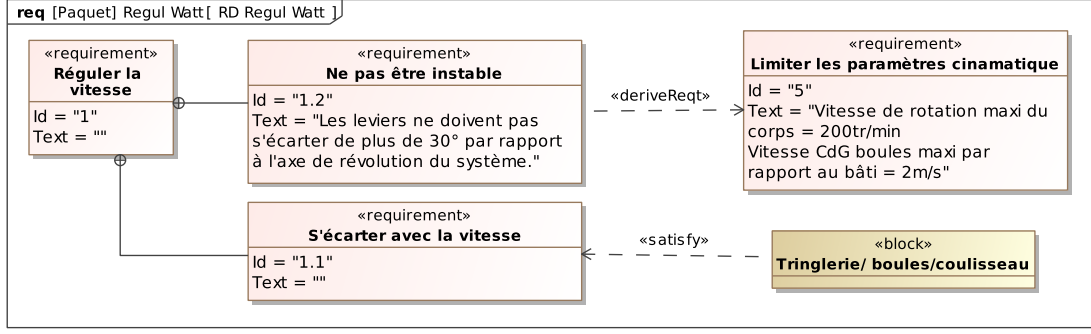


FIGURE 2.2 – Schéma cinématique du régulateur de Watt.

On adoptera la modélisation donnée par le schéma cinématique de la figure 2.2 et on utilisera le paramétrage suivant :

- $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est un repère lié au bâti **0** d'un régulateur à boules ;
- $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est un repère lié au corps **1** en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x})$  avec le bâti **0** avec  $\alpha = (\vec{y}, \vec{y}_1)$  ;
- $\mathcal{R}_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est un repère lié au levier **2** en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec le corps **1** avec  $\beta = (\vec{x}, \vec{x}_2)$  et  $\overrightarrow{OA} = R\vec{y}_1$ ,  $R$  étant une constante positive ;
- $\mathcal{R}_3 = (B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est un repère lié au levier **3** en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_1)$  avec le levier **2**, avec  $\overrightarrow{AB} = \ell\vec{x}_2$ ,  $\ell$  étant une constante positive ;
- $\mathcal{R}_4 = (D, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est un repère lié à la pièce **4** en liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{x})$  avec le corps **1** en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z}_1)$  avec le levier **3** et on pose  $\overrightarrow{OD} = \lambda\vec{x}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \ell\vec{x}_3$  et  $\overrightarrow{DC} = R\vec{y}_1$ .

**Question 2.1.** Réaliser le graphe de structure du mécanisme.

**Question 2.2.** Donner l'expression de la vitesse du point  $A$  appartenant au corps **1** dans son mouvement par rapport au bâti **0** notée  $\overrightarrow{V_{A,1/0}}$ .

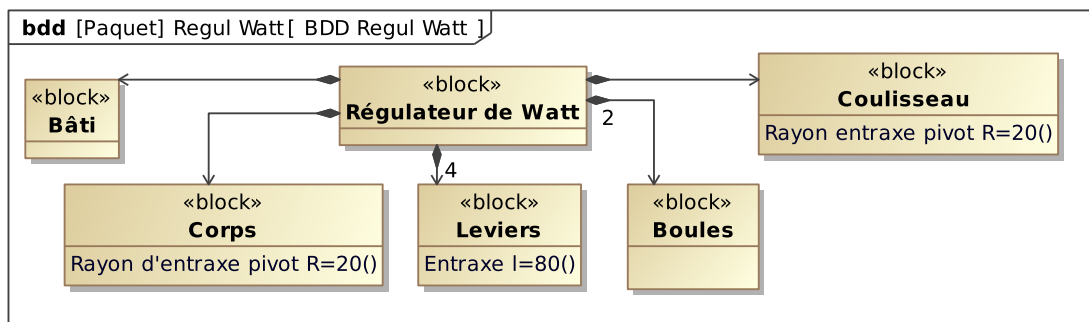
**Question 2.3.** Donner l'expression de la vitesse du point  $B$  appartenant au levier **2** dans son mouvement par rapport au corps **1** notée  $\overrightarrow{V_{B,2/1}}$ .

**Question 2.4.** Donner l'expression de la vitesse du point  $B$  appartenant au levier **2** dans son mouvement par rapport au bâti **0** notée  $\overrightarrow{V_{B,2/0}}$ .

**Question 2.5.** Donner l'expression de la vitesse du point  $C$  appartenant au levier **3** dans son mouvement par rapport au levier **2** notée  $\overrightarrow{V_{C,3/2}}$ .

**Question 2.6.** Donner l'expression de la vitesse du point  $C$  appartenant au levier **3** dans son mouvement par rapport au bâti **0** notée  $\overrightarrow{V_{C,3/0}}$ .

**Question 2.7.** Mener le calcul nécessaire à la vérification du cahier des charges relatif à la stabilité de ce système centrifuge. On considèrera l'angle  $\beta$  constant. On utilisera l'expression littérale de la vitesse absolue du centre de gravité d'une boule, calculée précédemment, et les données numériques disponibles dans les différents diagrammes SysML.



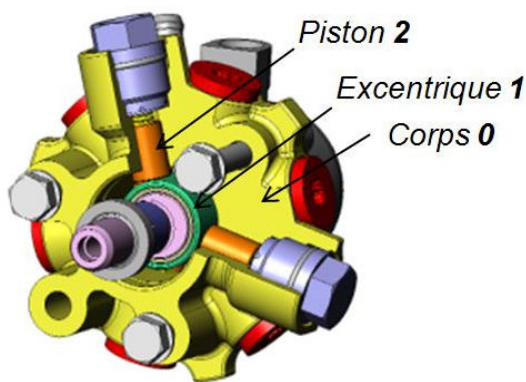
— EXERCICE 3 —

## Pompe hydraulique à pistons radiaux

### Objectif

Déterminer les lois entrée-sortie géométrique et cinématique d'une pompe hydraulique à pistons radiaux.

On s'intéresse au comportement cinématique du dispositif de transformation de mouvement par excentrique qui permet de transformer le mouvement de rotation continu de l'arbre d'entrée, sur lequel est fixé l'excentrique **1**, en mouvement de translation alternatif du piston **2**.



Le système peut être modélisé par le schéma cinématique ci-dessous.

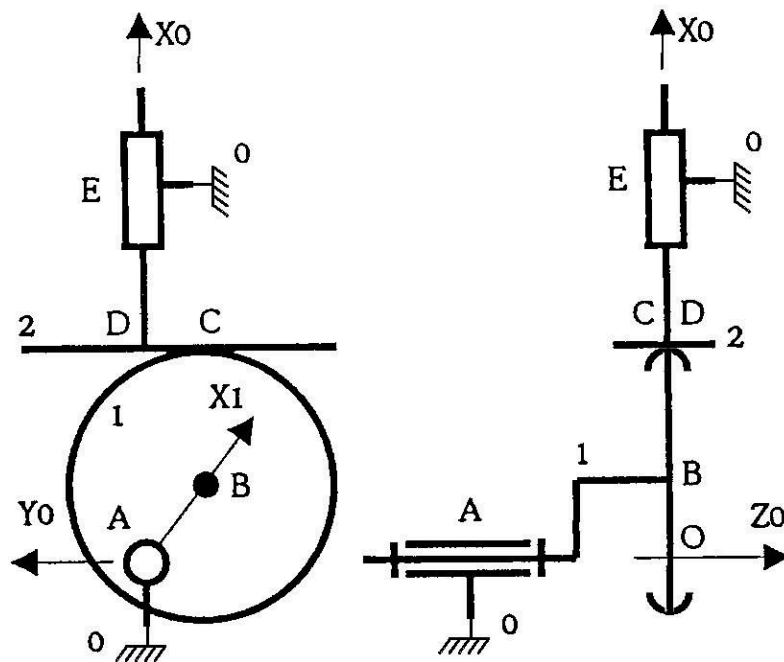


FIGURE 3.1 – Schéma cinématique de la pompe à pistons radiaux.



### Extrait du cahier des charges

On impose un débit variant de 0,5 à 20 L·min<sup>-1</sup>.

On note  $R = |BC|$  le rayon de l'excentrique et  $e = |OB|$  l'excentration. La position angulaire de l'excentrique **1** par rapport au corps **0** est paramétrée par l'angle  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ . La position du piston est repérée dans la direction  $\vec{x}_0$  par le paramètre  $X = \overrightarrow{OD} \cdot \vec{x}_0 = \overrightarrow{AD} \cdot \vec{x}_0$  (avec  $\overrightarrow{AO} \wedge \vec{x}_0 = \vec{0}$ ). Enfin, on note  $C$  le point de contact entre l'excentrique **1** et le piston **2**. Sa position est définie par  $\overrightarrow{CD} = \lambda \vec{y}_0$ .

**Question 3.1.** Donner le torseur cinématique de la liaison entre l'excentrique **1** et le piston **2** et préciser le sens physique de la vitesse  $\overrightarrow{V_{C,2/1}}$ .

**Question 3.2.** Déterminer, par composition des vitesses, la loi entrée-sortie cinématique reliant la vitesse de translation du piston par rapport au corps  $\dot{X}$  en fonction de la vitesse de rotation de l'excentrique par rapport au corps  $\dot{\theta}$  et des paramètres géométriques.

**Question 3.3.** En déduire une expression du débit instantané  $Q$  en sortie de la pompe (pour un seul piston) en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée  $\dot{\theta}$ .

Les pistons ont une section circulaire de diamètre  $D = 5$  mm et on a  $e = 10$  mm.

**Question 3.4.** En tenant compte du fait que la pompe comporte trois pistons équi-répartis angulairement, déterminer l'expression du débit moyen  $\bar{Q}$  pour une vitesse de rotation de l'arbre moteur de 1 000 tr/min. Conclure quant au respect du cahier des charges.

## Transmission homocinéétique par joint de Oldham

### Objectif

Vérifier la propriété d'homocinétisme (vitesses d'entrée et de sortie identiques) du joint de Oldham.

Pour réaliser un accouplement entre deux axes parallèles mais non coaxiaux, il est courant d'utiliser un joint de Oldham. C'est cette solution qui est notamment utilisée sur le bras de robot Maxpid pour réaliser l'accouplement entre le moteur et la vis. Cette solution technique est constituée (voir figure 4.1) :

- d'un plateau **6a**, lié à l'arbre d'entrée ;
- d'un plateau **6c**, lié à l'arbre de sortie ;
- d'un élément intermédiaire **6b**.

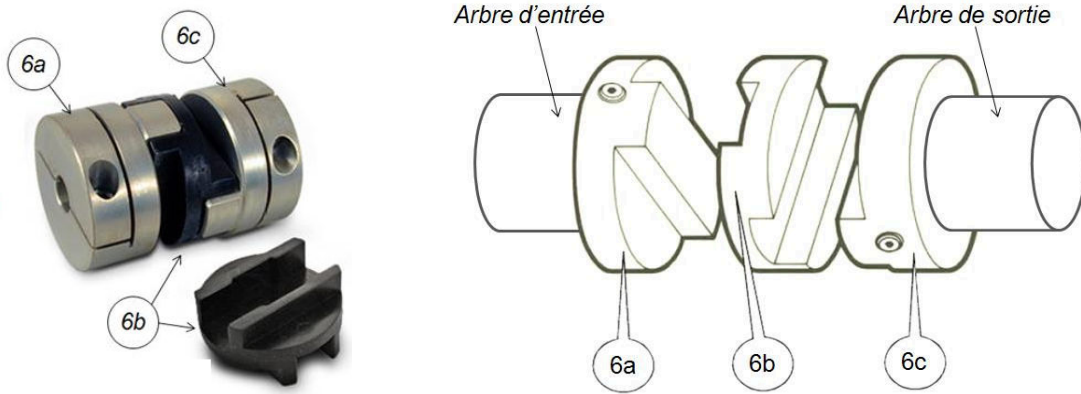


FIGURE 4.1 – Joint de Oldham.

Cette transmission peut être représentée par le schéma cinématique de la figure 4.2. Ce système est constitué de trois solides :

- le solide **3** auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  considéré comme fixe ;
- le solide **6a** auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_a = (A, \vec{x}_a, \vec{y}_a, \vec{z}_a)$  en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_a)$  avec le solide **3** avec  $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_a)$  et  $\overrightarrow{OA} = e\vec{x}_0$  avec  $e > 0$  une constante ;
- le solide **6c** auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_b = (B, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b)$  en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x}_b)$  avec le solide **3** avec  $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_b)$  et  $\overrightarrow{OB} = f\vec{y}_0$  avec  $f$  une constante.

**Question 4.1.** Réaliser le graphe de structure du mécanisme puis les figures géométrales associées à chaque paramètre angulaire.

**Question 4.2.** Écrire les torseurs cinématiques associés à chacune des liaisons.

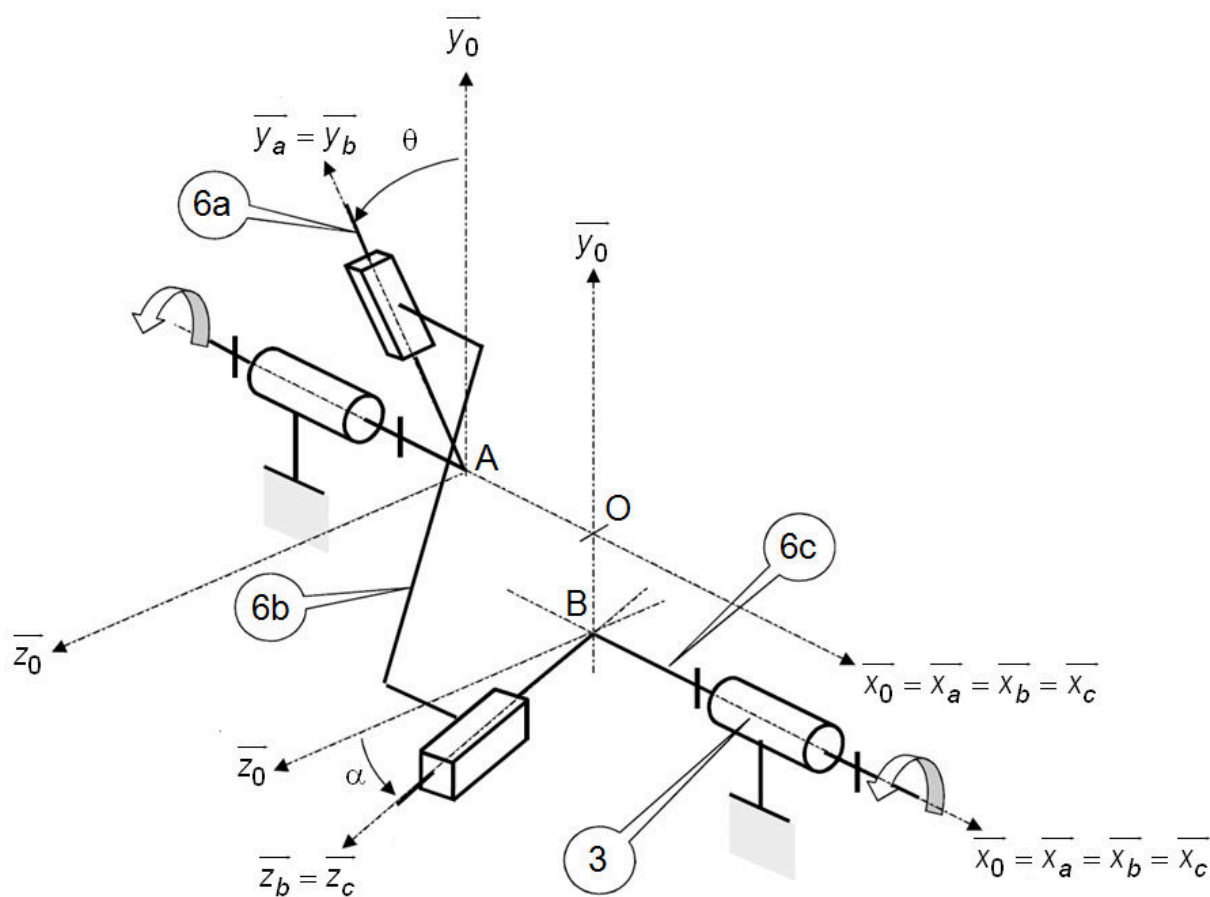


FIGURE 4.2 – Schéma cinématique du joint de Oldham.

**Question 4.3.** Déterminer, par une fermeture cinématique, la loi entrée-sortie en vitesse  $\dot{\theta} = f(\dot{\alpha})$  du joint de Oldham.

**Question 4.4.** Conclure sur la propriété d'homocinétisme du joint de Oldham.

**Question 4.5.** Déterminer la vitesse de translation  $\overrightarrow{V_{*,6a/6b}}$  en fonction de  $\theta$  et  $\dot{\theta}$ .

**Question 4.6.** Déterminer la vitesse de translation  $\overrightarrow{V_{*,6b/6c}}$  en fonction de  $\alpha$  et  $\dot{\alpha}$ .

**Question 4.7.** Conclure quant au rôle des deux rainures de l'élément intermédiaire **6b**.

## Attraction Magic Arms

### Objectif

Vérifier que la cinématique globale de l'attraction Magic Arms permet de procurer des sensations à une personne en bonne santé physique et sans désagrément.

La société WAAGNER-BIRO complète la gamme des manèges à haute technicité par une machinerie au nom de « Magic Arms » (voir figure ci-contre). Les mouvements simultanés de ce dernier autour de trois axes désorientent les 39 passagers embarqués qui ne savent plus reconnaître le dessus du dessous pendant quelques minutes.



### 5.1 Présentation de l'étude

Avec le Magic-Arms, la société WAAGNER-BIRO a développé un nouveau manège procurant aux passagers de nouvelles sensations dues à des séquences variées de mouvements.

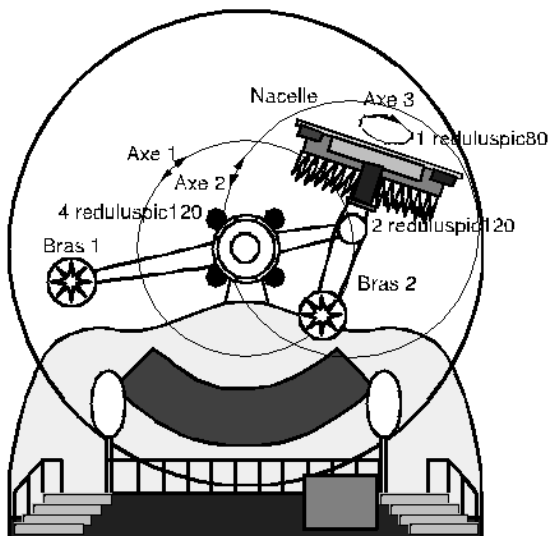
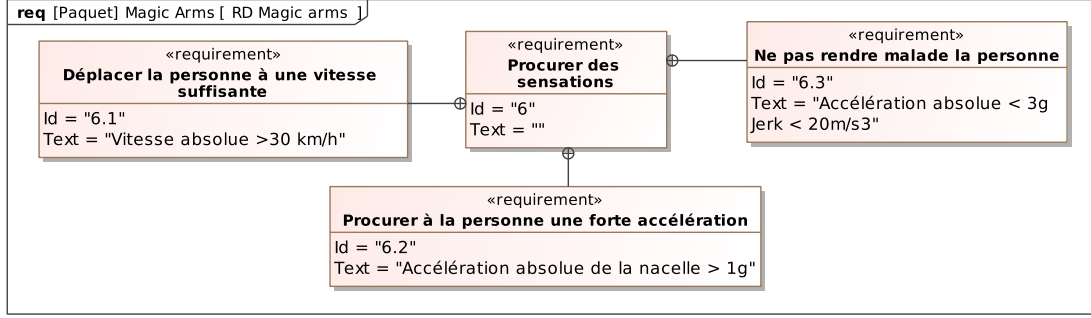


FIGURE 5.1 – Schéma de principe.

L'installation est composée d'une structure métallique d'envron 12 m de haut avec deux bras mobiles (voir figure 5.1). Les passagers s'assoient sur 39 sièges en mousse disposés sur une plate-forme tournante, et sont parfaitement maintenus par un harnais. Dès que tous les passagers sont assis et attachés, le bras principal 1 et le bras pivot 2, liés l'un à l'autre au début du cycle, commencent à tourner. En même temps, la nacelle tourne autour de son axe. Après 9 secondes, le maximum de hauteur est atteint et les deux bras se désindexent et se mettent à tourner indépendamment l'un de l'autre. Tous les mouvements sont pilotés par un ordinateur.

Cette installation permet une combinaison de mouvements entièrement nouvelle. Les passagers sont « fous » de ces tours de manège dans des positions verticales ou inclinées, tête en bas ou en haut, incluant des mouvements combinés dans les trois dimensions. Ils adorent être secoués et faire des *loopings* à une vitesse élevée.

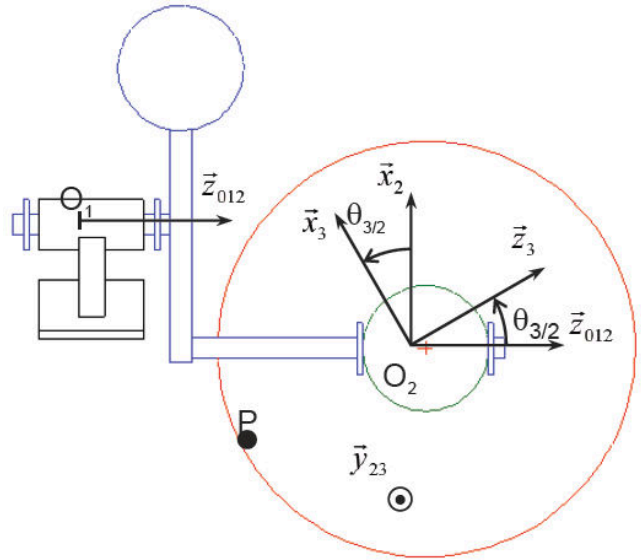
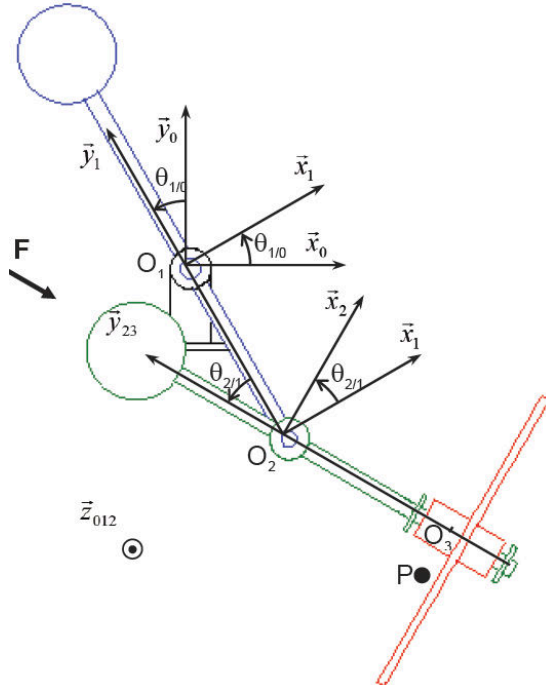
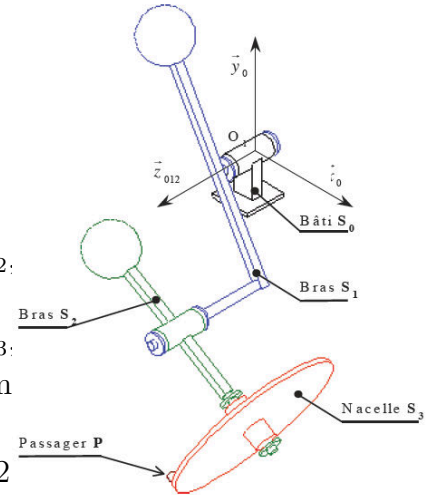


## 5.2 Paramétrage

On utilisera le paramétrage suivant :

- $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_{012})$  est un repère lié au bâti  $S_0$  ;
- $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{012})$  est un repère lié au bras  $S_1$  ;
- $\mathcal{R}_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_{012})$  est un repère lié au bras  $S_2$  ;  
avec  $\vec{O_1O_2} = -\ell_1 \vec{y}_1 + a \vec{z}_{012}$  et  $\ell_1 = 3,9$  m ;
- $\mathcal{R}_3 = (O_2, \vec{x}_3, \vec{y}_{23}, \vec{z}_3)$  est un repère lié à la nacelle  $S_3$  ;  
avec  $\vec{O_2O_3} = -\ell_2 \vec{y}_{23}$ ,  $\vec{O_3P} = -\ell_3 \vec{z}_3$ ,  $\ell_2 = 2,87$  m  
et  $\ell_3 = 2,61$  m.

Le vecteur  $\vec{z}_{012}$  est commun aux bases des repères 0, 1 et 2



Vue suivant  $F$

### 5.3 Travail demandé

**Question 5.1.** Réaliser le graphe de structure du système puis exprimer les torseurs cinématiques de chacune des liaisons.

**Question 5.2.** En utilisant la relation de composition des mouvements, donner l'expression de la vitesse absolue du passager, situé au point  $P$ , notée  $\overrightarrow{V_{P,3/0}}$ .

**Question 5.3.** À partir de la figure 3 et en faisant l'hypothèse qu'à l'instant initial toutes les mesures d'angles sont nulles, déterminer, pour tout  $t \in [0; 27]$  s, les expressions des angles  $\theta_{i/i-1}(t)$  avec  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ .

**Question 5.4.** Pour  $t = 19,8$  s, donner une mesure de ces angles congrue à  $2\pi$  (valeur dans le domaine  $[0; 2\pi]$ ). Vérifier ces valeurs en observant la figure 4.

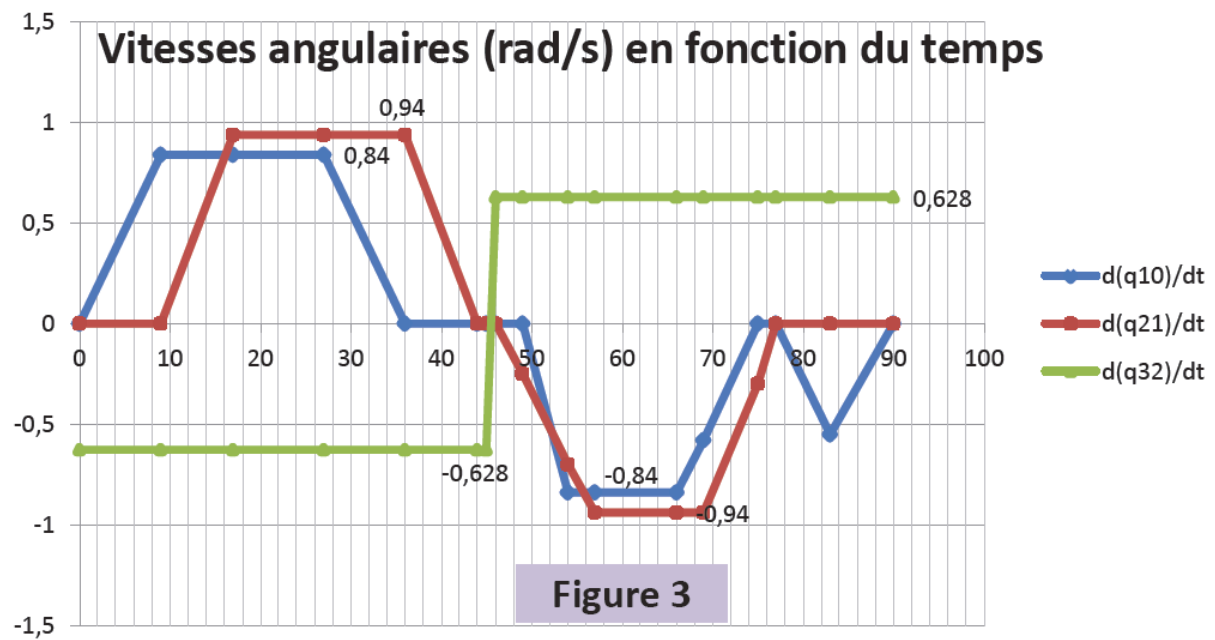
**Question 5.5.** Déterminer la norme de la vitesse  $\overrightarrow{V_{P,3/0}}$  à partir de la relation trouvée à la question 5.2 à l'instant  $t = 19,8$  s. Justifier que l'on obtienne une vitesse maximale à cet instant.

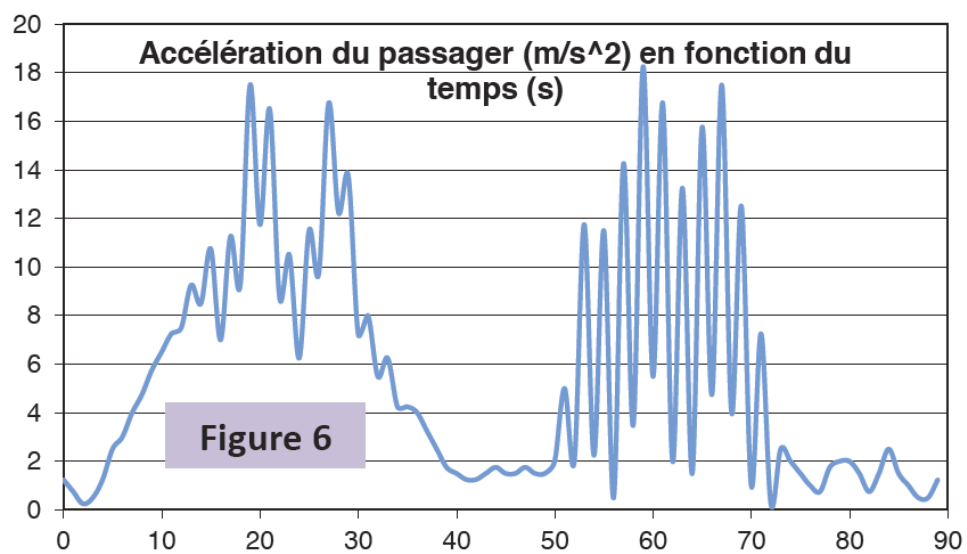
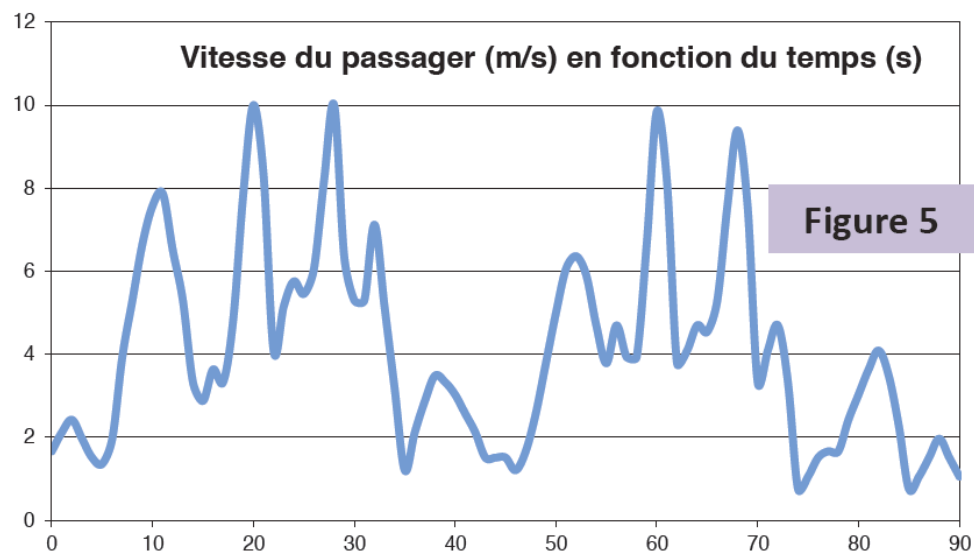
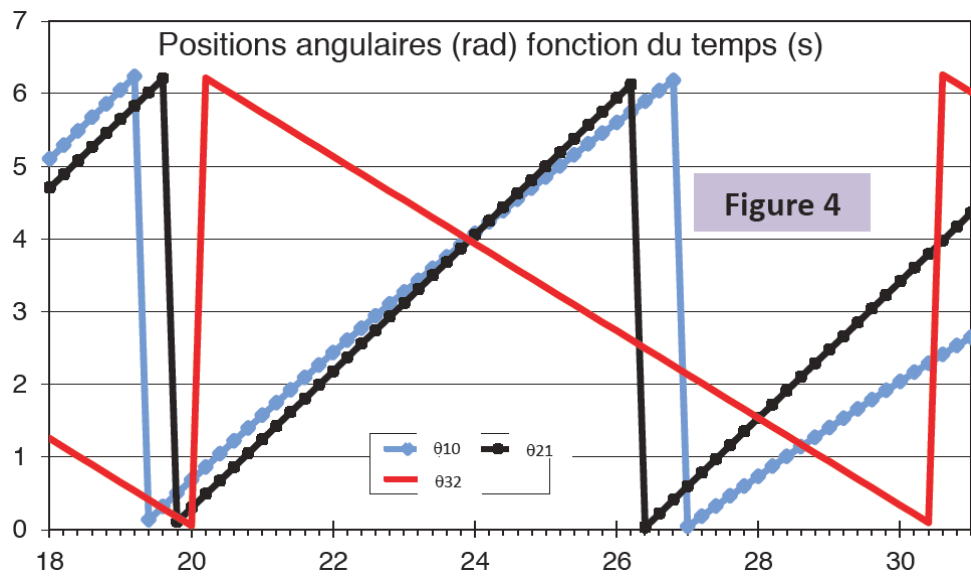
**Question 5.6.** À partir de la figure 3, exprimer les valeurs des accélérations  $\ddot{\theta}_{i/i-1}$  dans l'intervalle de temps  $[17; 27]$  s.

**Question 5.7.** Donner l'expression de l'accélération absolue du passager  $\Gamma_{P,3/0}$  dans l'intervalle de temps  $[17; 27]$  s en fonction des longueurs  $\ell_i$ , des angles  $\theta_i$  et de leurs dérivées.

**Question 5.8.** À partir de l'observation de la courbe figure 6, définir à quel instant l'accélération est maximale dans l'intervalle de temps  $[17; 27]$  s.

**Question 5.9.** Vérifier l'aptitude de Magic Arms à procurer des sensations à une personne en bonne santé. Vérifier que Magic Arms ne provoque pas de désagrément.







— EXERCICE 6 —

## Modélisation d'une encapsuleuse

### Objectif

Déterminer la loi entrée-sortie d'une encapsuleuse pour vérifier une contrainte de vitesse maximale spécifiée dans le cahier des charges.

On s'intéresse à un mécanisme utilisé pour mettre en place des capsules sur des bouteilles. La partie « effecteur » n'est pas étudiée ici mais seulement le mécanisme de transformation de mouvement de rotation continue de l'arbre d'entrée **5** par rapport au carter **0**, en translation rectiligne alternative du piston **3** par rapport au carter **0**. La figure 6.1 présente le fonctionnement du mécanisme.

### Extrait du cahier des charges

Pour bouchonner correctement les bouteilles, la vitesse de translation de l'axe de sortie ne doit pas excéder  $0,12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

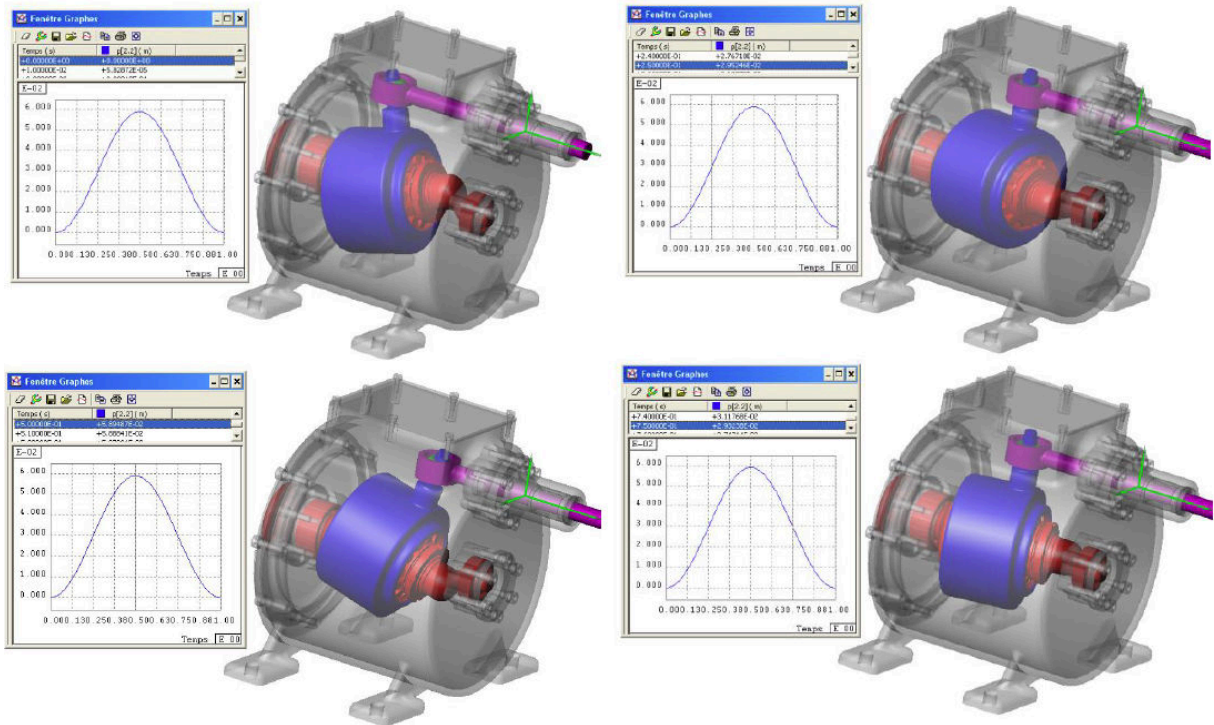


FIGURE 6.1 – Fonctionnement en quatre images.

Le fonctionnement du mécanisme peut être étudié à partir de cinq classes d'équivalence : le carter **0**, le piston **3**, l'arbre **5**, le doigt **17** et la rotule **18**.



À chacune de ces classes d'équivalences, on associe le paramétrage suivant :

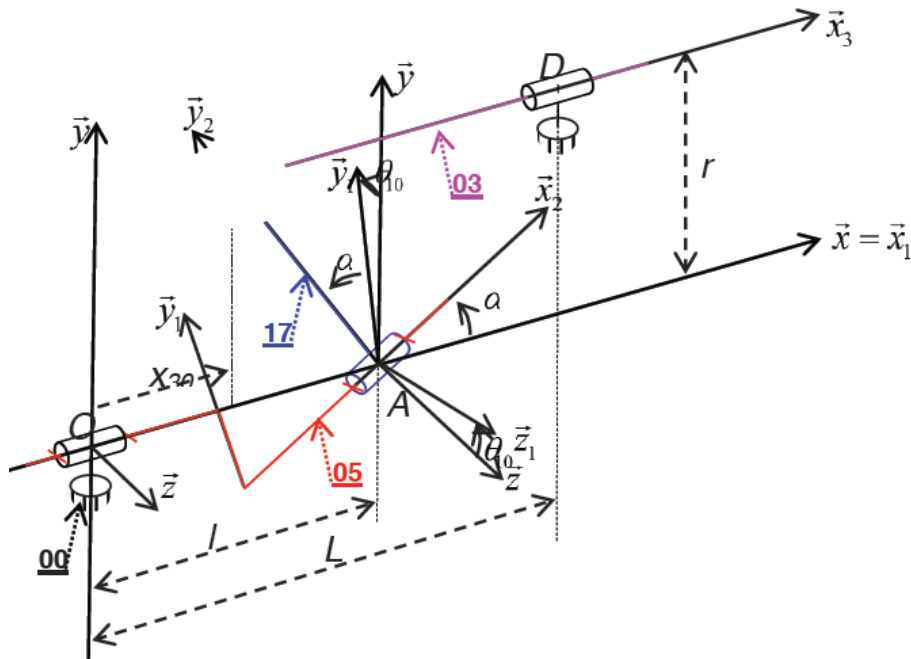
- on associe le repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  au carter **0** ;
- on associe le repère  $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  à l'arbre **5** en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x})$  avec le carter **0**. L'orientation des vecteurs de base est définie par l'angle  $\theta_{10} = (\vec{y}, \vec{y}_1) = (\vec{z}, \vec{z}_1)$ .
- on associe le repère  $\mathcal{R}_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  au doigt **17** en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_2)$  avec l'arbre **5**. La position du point  $A$  est définie par  $\overrightarrow{OA} = \ell \vec{x}$ , avec  $\ell = 100$  mm et l'orientation des vecteurs de base est définie par l'angle fixe  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  et la position angulaire  $\theta_{17/5}$ . Le doigt **17** est aussi en liaison pivot glissant d'axe  $(C, \vec{y}_2)$  avec la rotule **18**. La position du point  $C$  est définie par  $\overrightarrow{OC} = x_{30} \vec{x} + r \vec{y}$ , avec  $x_{30}$  une variable et  $r = 115$  mm.
- on associe le repère  $\mathcal{R}_3 = (C, \vec{x}, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  au piston **3** en liaison pivot glissant d'axe  $(D, \vec{x})$  avec le carter **0** et en liaison sphérique de centre  $C$  avec la rotule **18**. La position du point  $D$  est définie par  $\overrightarrow{OD} = L \vec{x} + r \vec{y}$ , avec  $L = 245$  mm.

**Question 6.1.** Réaliser le graphe de structure du mécanisme et exprimer les torseurs cinématiques de chacune des liaisons.

Sur le graphe de structure, on peut constater que les liaisons  $\mathcal{L}_{3/18}$  et  $\mathcal{L}_{18/17}$  sont en série ce qui signifie que la rotule **18** sert de pièce intermédiaire pour relier le piston **3** au doigt **17**. On appelle alors « liaison équivalente » la liaison  $\mathcal{L}_{3/17} = \mathcal{L}_{3/18} \cup \mathcal{L}_{18/17}$  définie par l'union des deux liaisons.

**Question 6.2.** Par simple composition des champs de vitesses, déterminer le torseur cinématique de la liaison équivalente  $\mathcal{L}_{3/17}$ . En déduire son nom et ses caractéristiques.

**Question 6.3.** Reproduire et compléter le schéma cinématique minimal donné ci-dessous avec la liaison équivalente.



**Question 6.4.** *Après avoir réduit chaque torseur cinématique au point  $O$ , écrire les équations de fermeture de la chaîne cinématique en ce point.*

**Question 6.5.** *À partir de la relation sur les vitesses linéaires au point  $O$ , en déduire une relation cinématique liant la vitesse de translation alternative du piston **3** par rapport au carter **0**, notée  $\dot{x}_{30}$ , en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre **5** par rapport au carter **0**, notée  $\dot{\theta}_{10}$ .*

**Question 6.6.** *Déterminer la vitesse de rotation  $\dot{\theta}_{10}$  maximale permettant de respecter le cahier des charges.*

## Planeuse sous traction pour bandes d'acier inoxydable

---

### Objectif

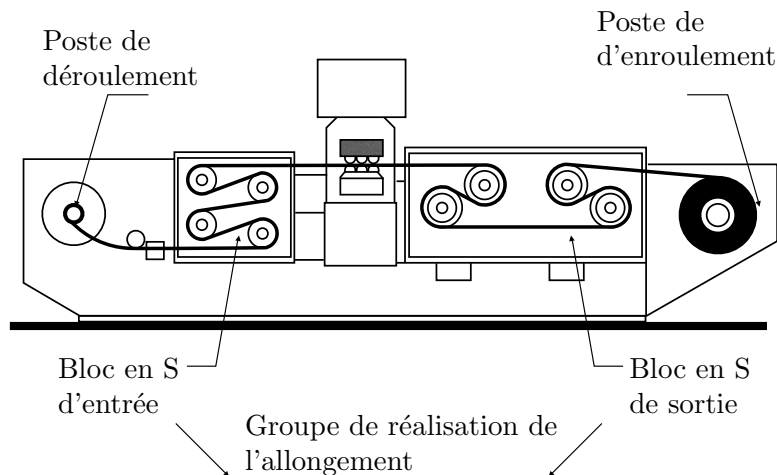
---

Calculer la vitesse des moteurs d'entrée et de sortie d'une planeuse pour bandes pour respecter l'exigence de vitesse de production imposée par le cahier des charges tout en ayant un allongement de 2 %.

---

La machine étudiée est une planeuse pour bandes d'acier inoxydable. Elle permet d'obtenir un allongement réglable pour un produit donné. La bande d'acier est déroulée à partir du poste de déroulement, la vitesse  $V_e$  étant imposée par le bloc d'entrée. En imposant une vitesse  $V_s > V_e$  supérieure au bloc de sortie, la bande sera étirée entre ces deux postes. La bande est récupérée sur un mandrin récepteur au poste d'enroulement.

On appelle allongement le quotient entre la différence de longueur finale et initiale et la longueur initiale. Il est de l'ordre de quelques %. L'intérêt de cet allongement est d'écrouir le matériau et ainsi d'étendre la gamme de sollicitations pour lesquelles son comportement sera élastique, réversible. La vitesse de production est de l'ordre de  $60 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$ .



Ce système utilise principalement deux moteurs, l'un pour le mouvement principal et l'autre pour le maîtriser l'allongement de la bande. Un différentiel permet d'obtenir ce découplage. La puissance du moteur qui réalise l'allongement est bien inférieure à la puissance du moteur réalisant le mouvement principal, ce qui facilite la réalisation de l'asservissement.

### Extrait du cahier des charges

Les bandes d'acier ne doivent pas s'allonger de plus de 2 % pour une vitesse de sortie  $V_s = 60 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$ .

## 7.1 Étude du différentiel

L'élément central de transmission est le différentiel (en vue éclatée ci-contre). Le schéma cinématique est donné sur la figure 7.1. Les mouvements des solides **I**, **II** et **III** par rapport au bâti **0** de la machine sont des rotations autour de l'axe  $(O, \vec{y})$ . On note  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  les nombres de dents des roues **I**, **II**, **III** et **IV** et  $\omega_I$ ,  $\omega_{II}$ ,  $\omega_{III}$ ,  $\omega_{IV}$  leurs vitesses de rotation respectives par rapport au bâti de la machine **0**.

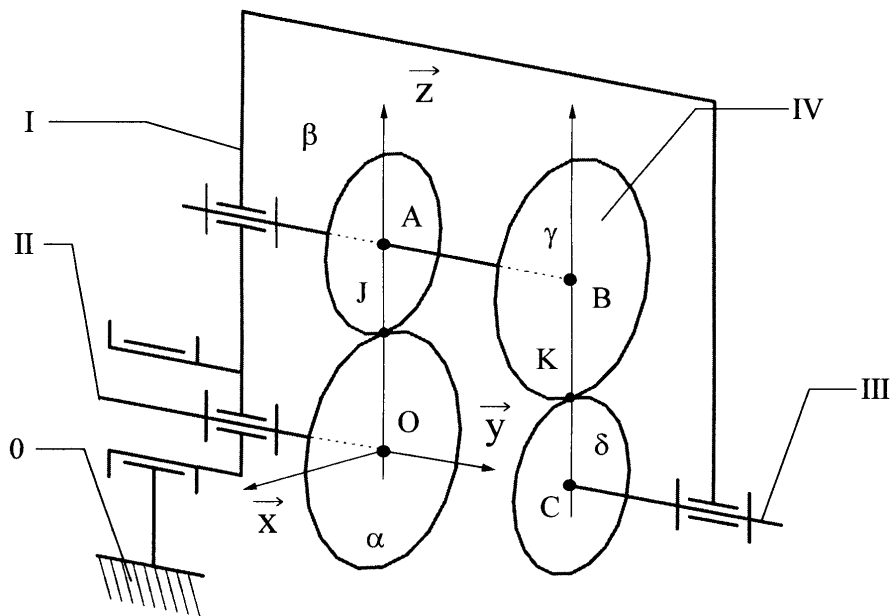


FIGURE 7.1 – Schéma cinématique du différentiel.

On rappelle que pour engrener correctement, deux roues dentées doivent avoir le même module  $m$ . Leur mouvement relatif entre deux roues dentées cylindriques 1 et 2, de nombre de dents  $Z_1$  et  $Z_2$  est un roulement sans glissement de deux roues de friction de diamètres  $D_1$  et  $D_2$  tels que  $D_1 = m Z_1$ ,  $D_2 = m Z_2$ .

Si besoin, on notera  $\omega_{i/j}$  la vitesse de rotation du solide  $i$  par rapport au solide  $j$ .

**Question 7.1.** Exprimer  $\vec{V}_{J,IV/I}$  et  $\vec{V}_{J,II/I}$ , puis exploiter la condition de roulement sans glissement en  $J$  de  $IV$  par rapport à  $II$  pour en déduire une relation scalaire entre  $\omega_{IV/I}$  et  $\omega_{II/I}$ .

**Question 7.2.** Exprimer  $\vec{V}_{K,IV/I}$  et  $\vec{V}_{K,III/I}$ , puis exploiter la condition de roulement sans glissement en  $K$  de  $IV$  par rapport à  $III$  pour en déduire une relation scalaire entre  $\omega_{IV/I}$  et  $\omega_{III/I}$ .

**Question 7.3.** Des deux résultats précédents, en déduire une relation entre  $\omega_I$ ,  $\omega_{II}$ ,  $\omega_{III}$  et les nombres de dents.

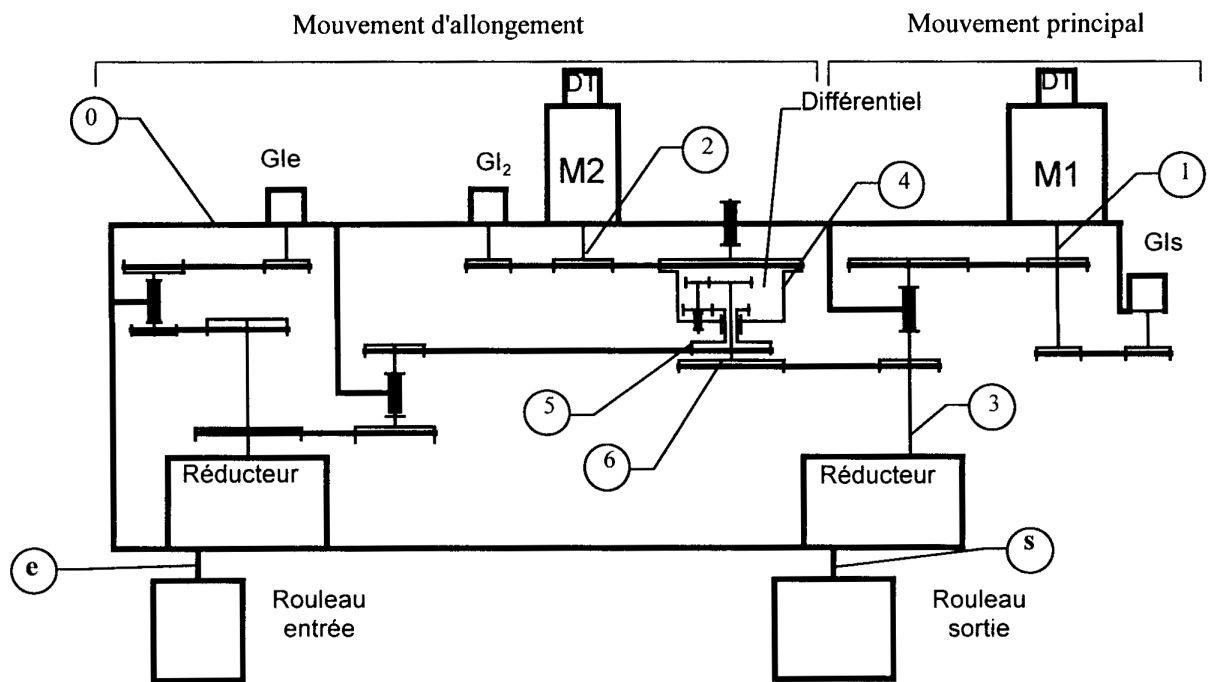
On établit les correspondances suivantes :

| Repères du schéma du différentiel (figure 7.1) | I | II | III |
|------------------------------------------------|---|----|-----|
| Repères du schéma de la planeuse (figure 7.2)  | 4 | 5  | 6   |

**Question 7.4.** Exprimer la vitesse de rotation  $\omega_5$  en fonction de  $\omega_4$  et  $\omega_6$ .

## 7.2 Mouvement principal et allongement

On désire maintenant exprimer les vitesses d'entraînement à l'entrée, notée  $V_e$ , et à la sortie, notée  $V_s$  en fonction des vitesses de rotation des deux moteurs, afin d'en déduire l'influence des deux moteurs sur l'allongement. La bande est supposée rouler sans glisser sur le dernier rouleau du bloc d'entrée et sur le premier rouleau du bloc de sortie.



GI : codeur incrémental ; DT : dynamo-tachymétrique

FIGURE 7.2 – Schéma cinématique de la planeuse.

On note :

- $k_s = \frac{\omega_s}{\omega_1} = \frac{7}{155}$  le rapport de réduction entre le moteur **M1** et le rouleau de sortie ;
- $k_1 = \frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{14}{31}$  le rapport de réduction entre le moteur **M1** et le solide **6** ;
- $k_2 = \frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{28}{93}$  le rapport de réduction entre le moteur **M2** et le solide **4** ;

- $k_E = \frac{\omega_E}{\omega_5} = \frac{1311}{9100}$  le rapport de réduction entre le solide 5 et le rouleau d'entrée ;
- $R_s = 0,15 \text{ m}$  le rayon du rouleau de sortie ;
- $R_e = 0,1 \text{ m}$  le rayon du rouleau d'entrée.

**Question 7.5.** *Exprimer la vitesse  $V_s$ , en fonction de  $\omega_1$  et des rapports de réduction utiles.*

**Question 7.6.** *En utilisant le résultat de la question 7.4, exprimer la vitesse de rotation  $\omega_5$  en fonction de  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et des rapports de réduction utiles.*

**Question 7.7.** *En déduire la vitesse  $V_e$ , en fonction de  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et des rapports de réduction utiles.*

Pour des raisons évidentes de régulation, le constructeur a fait le choix que la différence de vitesse qui conditionne l'allongement ne dépende que du moteur M2 ; soit  $V_s - V_e = a \omega_2$ .

**Question 7.8.** *En déduire une relation entre les nombres de dents des différentes roues  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  et les rapports de réduction permettant d'obtenir cette particularité.*

**Question 7.9.** *Pour des paramètres de production  $V_s = 60 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$  et un allongement  $\epsilon = \frac{V_s - V_e}{V_s} = 2 \text{ ‰}$ , déterminer l'expression littérale des vitesses de rotation  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .*

*Faire l'application numérique avec  $\alpha = 38$  dents,  $\beta = 26$  dents,  $\gamma = 23$  dents,  $\delta = 35$  dents.*

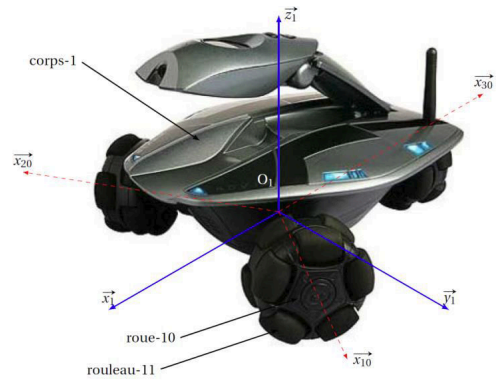
— EXERCICE 8 —

## Robot Rovio

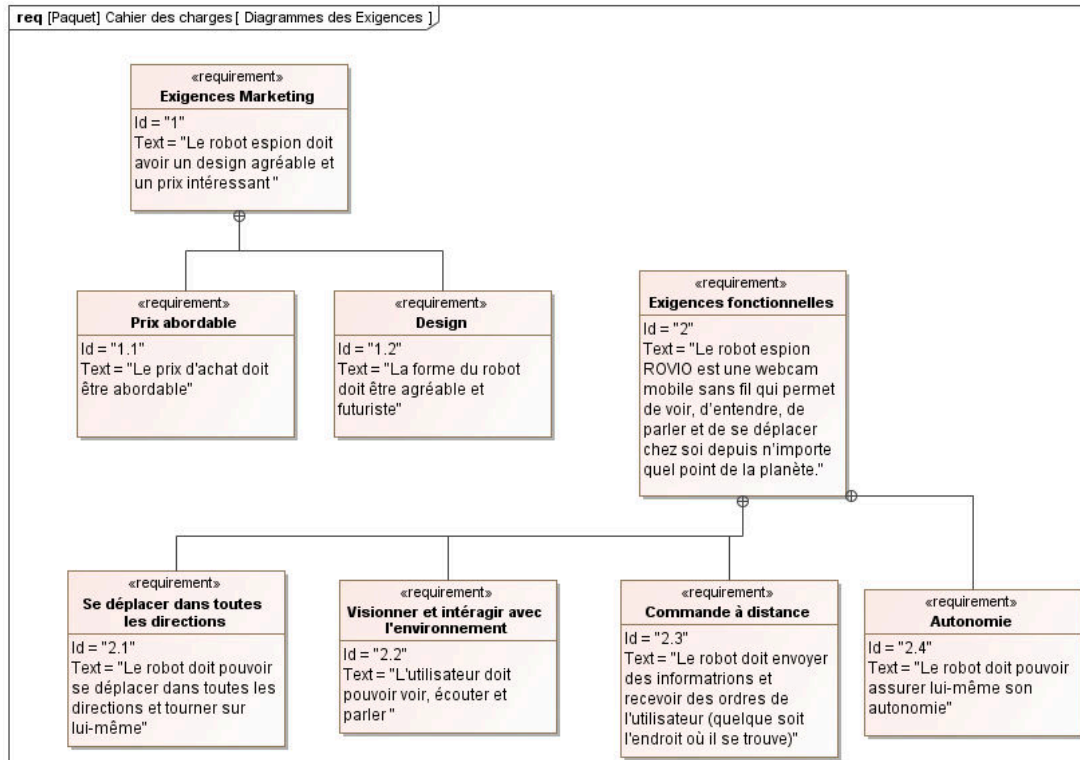
### Objectif

Déterminer deux lois de commande des moteurs des roues du robot Rovio pour qu'il réalise deux mouvements critiques exigés par le cahier des charges.

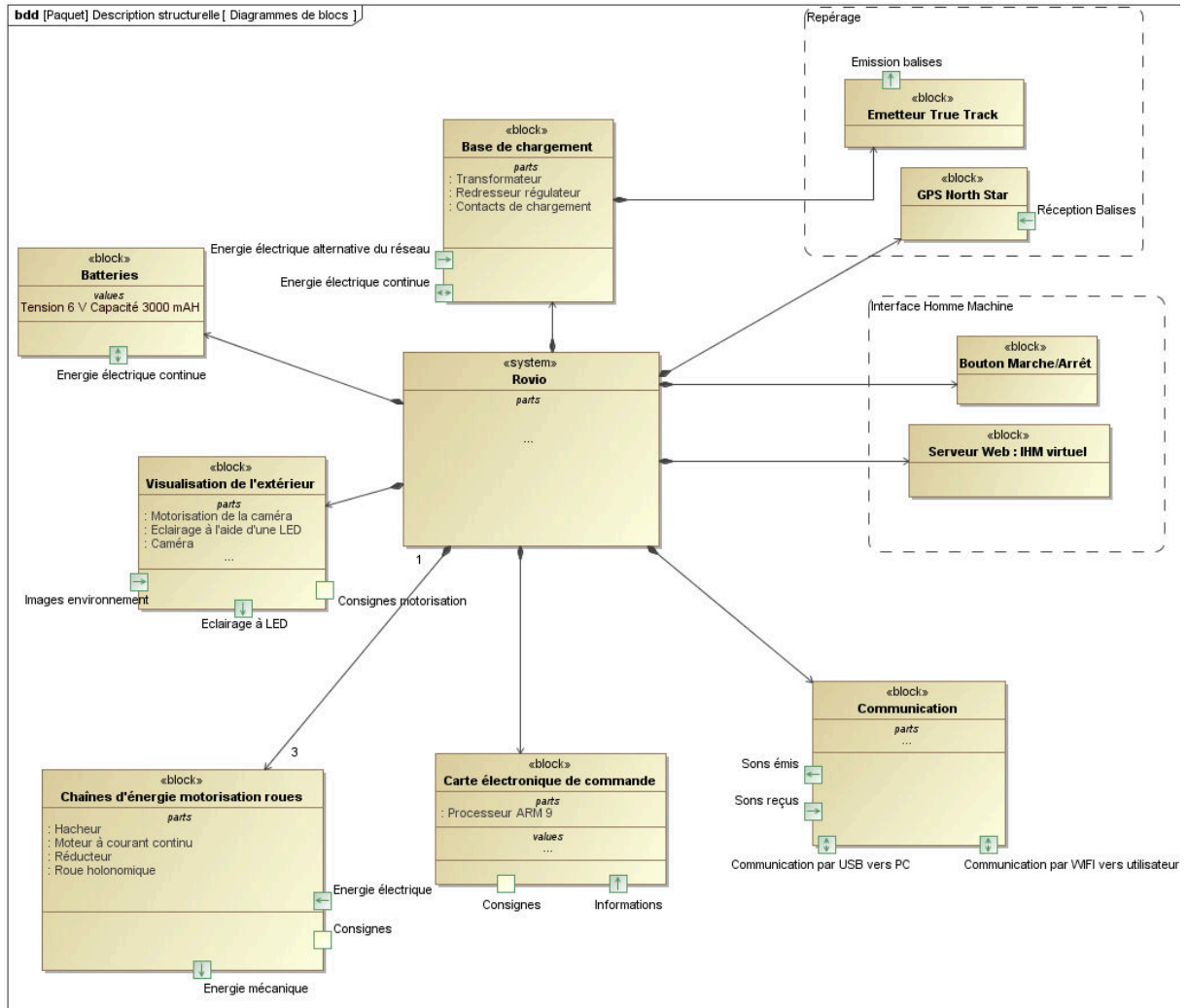
Le robot Rovio possède trois roues holonomiques qui lui permettent de se déplacer suivant le plan de contact des trois roues avec le sol défini par les trois points de contact. La rotation de chaque roue  $\mathbf{i0}$ ,  $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ , par rapport au bâti  $\mathbf{1}$  est actionnée par un moteur différent. En pilotant indépendamment ces trois moteurs, le robot peut effectuer tous les déplacements permis en conservant un roulement sans glissement aux points de contact des roues avec le sol. Ce sont les rouleaux  $\mathbf{i1}$ ,  $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ , de rayon d'enveloppe  $R$  et en liaison pivot avec chacune des roues  $\mathbf{i0}$  qui permettent ce roulement sans glissement.



On donne ci-dessous le diagramme des exigences du robot Rovio.



On donne ci-dessous le diagramme de définition des blocs du robot Rovio.



### Extrait du cahier des charges

Exigence 2.1 « Le robot doit pouvoir se déplacer dans toutes les directions et tourner sur lui-même » :

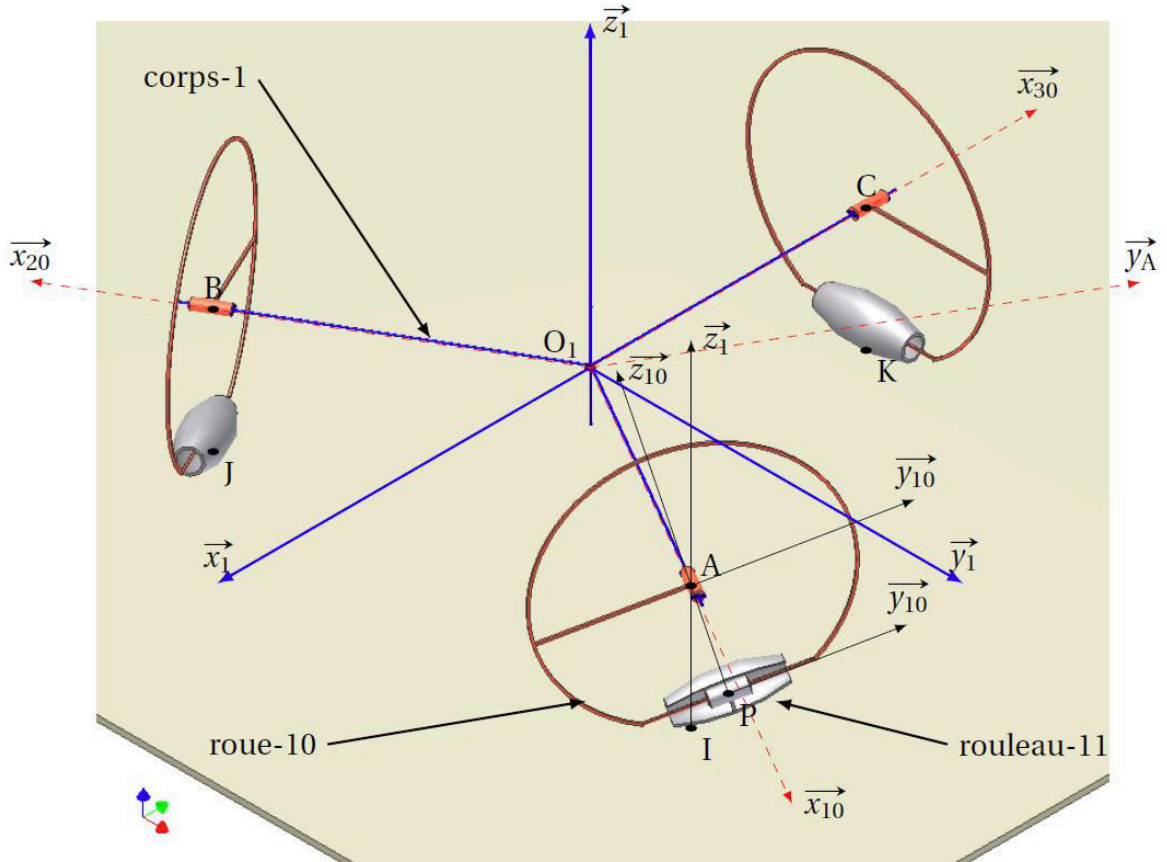
- vitesse linéaire de translation :  $0,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  maximum ;
- vitesse angulaire :  $0,4 \text{ tour}\cdot\text{s}^{-1}$  maximum.

Pour la modélisation cinématique, on adoptera le paramétrage suivant :

- le sol **0**, auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ;
- le corps **1** qui supporte, en plus des trois roues, le bras de la caméra (orientable, cinématique non étudiée ici). On lui associe le repère  $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , avec  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  ;



- les roues **10**, **20** et **30** sont respectivement en liaison pivot avec le bâti du robot **1** autour des axes  $(A, \vec{x}_{10})$ ,  $(B, \vec{x}_{20})$  et  $(C, \vec{x}_{30})$  où les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont respectivement définis comme  $\vec{O_1A} = a\vec{x}_{10}$ ,  $\vec{O_1B} = a\vec{x}_{20}$  et  $\vec{O_1C} = a\vec{x}_{30}$ . On associe à la roue **10** le repère  $\mathcal{R}_{rA} = (O_1, \vec{x}_{10}, \vec{y}_A, \vec{z}_1)$  (resp.  $\mathcal{R}_{rB} = (O_1, \vec{x}_{20}, \vec{y}_B, \vec{z}_1)$ ) et  $\mathcal{R}_{rC} = (O_1, \vec{x}_{30}, \vec{y}_C, \vec{z}_1)$  avec  $\theta_{10} = (\vec{y}_A, \vec{y}_{10})$  et  $\beta_{10} = (\vec{x}_1, \vec{x}_{10}) = 60^\circ$  (resp.  $\beta_{20} = (\vec{x}_1, \vec{x}_{30}) = -60^\circ$  et  $\beta_{30} = (\vec{x}_1, \vec{x}_{20}) = 180^\circ$ ). On note  $\omega_{10} = \dot{\theta}_{10}$  (resp.  $\omega_{20}$  et  $\omega_{30}$ ) la vitesse de rotation de la roue **10** (resp. **20** et **30**) par rapport au bâti **1**.
- Dans un premier temps on ne considère qu'un seul rouleau par roue. Le rouleau **11** (resp. **21** et **31**) est en liaison pivot d'axe  $(P, \vec{y}_{10})$  avec la roue **10** (resp.  $(Q, \vec{y}_{20})$  avec la roue **20** et  $(R, \vec{y}_{30})$  avec la roue **30**) et on note  $\omega_{11}$  (resp.  $\omega_{21}$  et  $\omega_{31}$ ) la vitesse de rotation du rouleau **11** (resp. **21** et **31**) par rapport à la roue **10** (resp. **20** et **30**). Les positions des points  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont respectivement définies par  $\vec{AP} = -b\vec{z}_{10}$ ,  $\vec{BQ} = -b\vec{z}_{20}$  et  $\vec{CR} = -b\vec{z}_{30}$ . Chaque rouleau est en appui sur le sol **0** tel qu'il y ait roulement sans glissement, respectivement aux points  $I$ ,  $J$  et  $K$ . On note  $R = \|\vec{AI}\| = \|\vec{BJ}\| = \|\vec{CK}\|$  le rayon de contact de chaque rouleau avec le sol, tel que, par exemple,  $\vec{O_1I} = a\vec{x}_{10} - R\vec{z}_1$ . Enfin, on note  $\vec{\Omega}_i = \omega_{ix}\vec{x}_{10} + \omega_{iy}\vec{y}_A + \omega_{iz}\vec{z}_1$  (respectivement  $\vec{\Omega}_j = \omega_{jx}\vec{x}_{20} + \omega_{jy}\vec{y}_B + \omega_{jz}\vec{z}_1$  et  $\vec{\Omega}_k = \omega_{kx}\vec{x}_{30} + \omega_{ky}\vec{y}_C + \omega_{kz}\vec{z}_1$ ) le taux de rotation du rouleau **11** (resp. **21** et **31**) par rapport au sol **0**.



**Question 8.1.** Justifier que le torseur cinématique du bâti du robot **1** par rapport au sol **0** s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = {}_{O_1} \left\{ \begin{array}{c} \omega_z \vec{z}_1 \\ V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1 \end{array} \right\}$$

**Question 8.2.** Justifier que le torseur cinématique de la liaison sphère-plan entre le rouleau **11** et le sol **0** s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{11/0}\} = {}_I \left\{ \begin{array}{c} \omega_{ix} \vec{x}_{10} + \omega_{iy} \vec{y}_A + \omega_{iz} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

**Question 8.3.** Réaliser le graphe de structure du système en précisant toutes les caractéristiques de chaque liaison, puis écrire les torseurs cinématiques associés pour la seule chaîne  $\{1, 10, 11, 0\}$ .

**Question 8.4.** On note  $\{\mathcal{V}_{1/0}^A\}$  le torseur résultant de la composition de mouvements dans la chaîne de solides  $\{1, 10, 11, 0\}$ .

Écrire cette composition de torseurs cinématiques au point  $O_1$ , dans la base  $(\vec{x}_{10}, \vec{y}_A, \vec{z}_1)$ .

**Question 8.5.** Comme  $\{\mathcal{V}_{1/0}^A\} = \{\mathcal{V}_{1/0}\}$ , écrire le système d'équations ainsi obtenu et déterminer  $\omega_{10}$  en fonction de  $V_x, \omega_z, V_y, \beta_{10}, a$  et  $R$ .

On admettra que pour les deux autres chaînes de solides  $\{1, 20, 21, 0\}$  et  $\{1, 30, 31, 0\}$  on pourrait écrire deux compositions de mouvements similaires telles que  $\{\mathcal{V}_{1/0}^B\} = \{\mathcal{V}_{1/0}^C\} = \{\mathcal{V}_{1/0}\}$ . De plus, en observant l'équation obtenue à la question 8.5, on peut remarquer que seul l'angle  $\beta_{10}$  « rattache » cette expression la roue **10**.

**Question 8.6.** En procédant par analogie, c'est-à-dire sans recalculer les compositions, déterminer les expressions de  $\omega_{20}$  et  $\omega_{30}$ .

**i** Il est conseillé de travailler avec des valeurs numériques pour les angles qui restent constants.

On veut dans un premier temps vérifier le respect du critère de vitesse angulaire.

**Question 8.7.** Déterminer les vitesses de rotation  $\omega_{10}, \omega_{20}$  et  $\omega_{30}$  à imposer à chaque roue en fonction de la vitesse  $\omega_z$  et des paramètres géométriques.

On veut enfin vérifier le respect du critère de vitesse linéaire. On se place pour cela dans le cas où le robot se déplace en ligne droite dans la direction  $\vec{x}_1$  à une vitesse  $V_x$ , ce qui implique évidemment  $\omega_z = 0$  et  $V_y = 0$ .

**Question 8.8.** Déterminer les vitesses de rotation  $\omega_{10}, \omega_{20}$  et  $\omega_{30}$  à imposer à chaque roue en fonction de la vitesse  $V_x$ .

## Étude d'un différentiel automobile

### Objectif

Appréhender la nécessité d'un différentiel pour une automobile en virage et vérifier le fonctionnement attendu.

Le différentiel est un organe de transmission de puissance du moteur vers les roues d'une automobile. Il s'insère entre l'arbre de transmission final provenant de l'ensemble {moteur, embrayage, boîte de vitesses} et les arbres de roue. C'est donc un composant à une entrée et deux sorties mécaniques (figure 9.1).

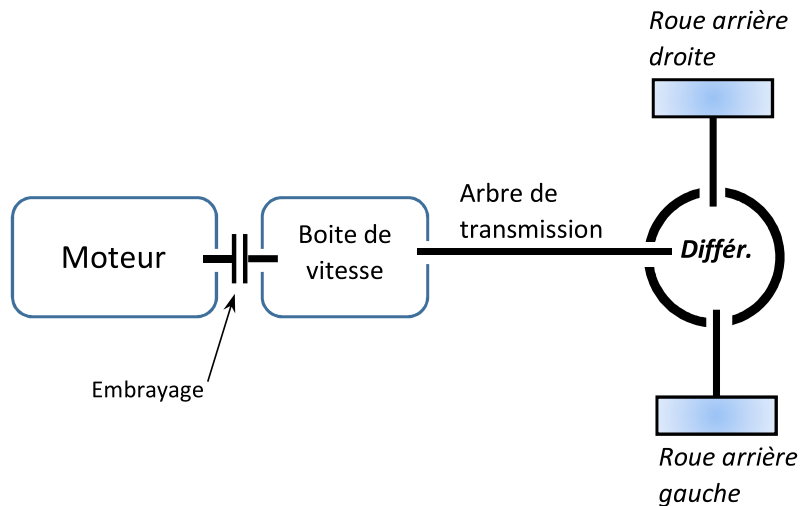
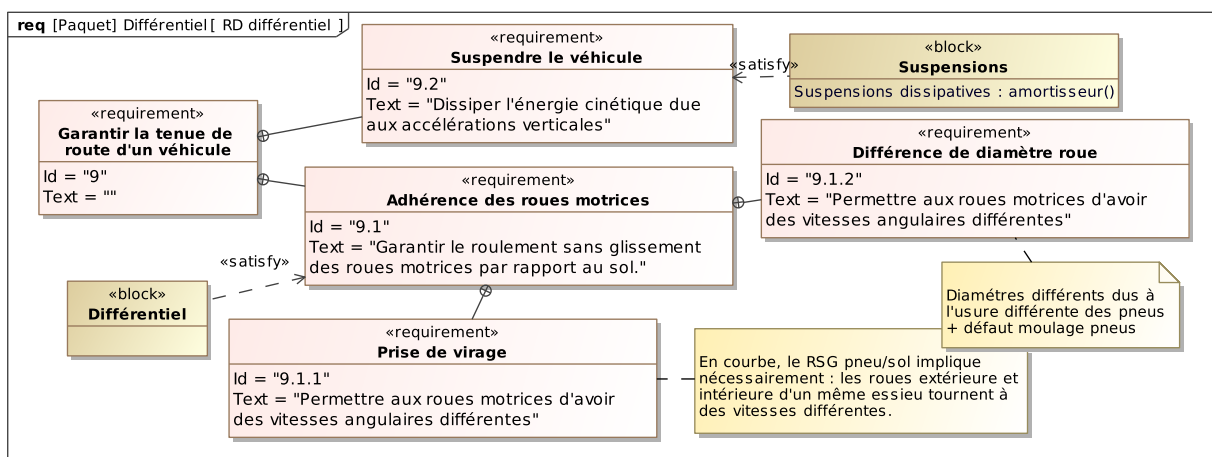


FIGURE 9.1 – Composants fondamentaux de transmission de puissance d'une automobile (vue de dessus).



**Question 9.1.** D'après le diagramme d'exigences partiel donné, préciser et justifier les exigences que satisfait un différentiel automobile.

## 9.1 Nécessité du différentiel en virage

La figure 9.2 donne la configuration géométrique d'un véhicule automobile **1** qui prend un virage de centre  $O$  et de rayon de courbure  $R = OM$  par rapport à la route **0**.

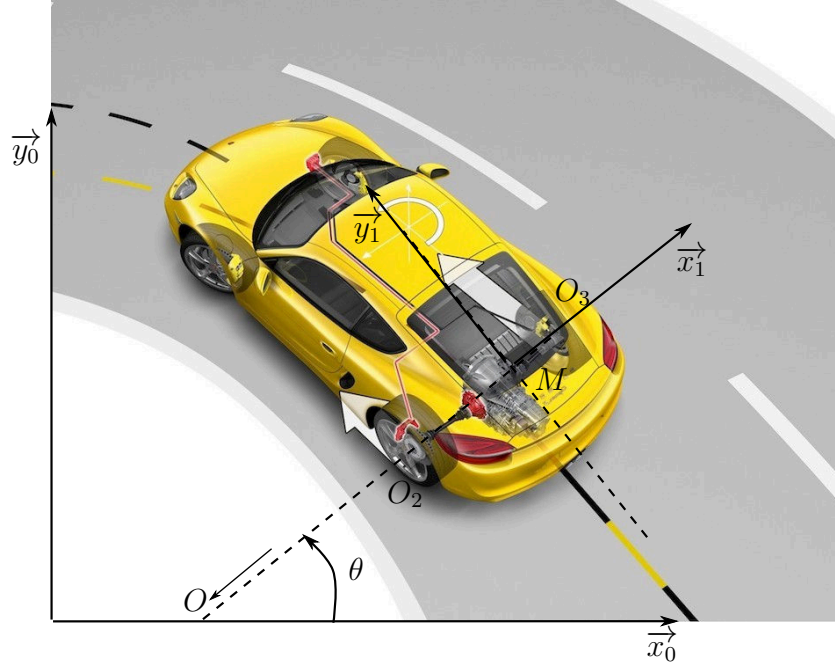


FIGURE 9.2 – Véhicule automobile dans un virage.

Pour l'étude :

- on associe à la route **0** le repère  $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  considéré comme fixe et tel que l'axe  $\vec{z}_0$  soit dirigé suivant la verticale ascendante ;
- la voiture **1** à laquelle on associe le repère  $\mathcal{R}_1 = (M, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  avec  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  ;
- la roue arrière gauche **2** à laquelle on associe le repère  $\mathcal{R}_2 = (O_2, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{x}_1)$  avec la voiture **1** avec  $\theta_{2/1} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ .
- la roue arrière droite **3** à laquelle on associe le repère  $\mathcal{R}_3 = (O_3, \vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  en liaison pivot d'axe  $(O_3, \vec{x}_1)$  avec la voiture **1** avec  $\theta_{3/1} = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$ .

On appelle  $M_2$  et  $M_3$  les points de contact entre les roues **2** et **3** (de rayon  $r$ ) et le sol et on note  $\ell = O_2O_3 = M_2M_3$  la voie arrière. Le point  $M$  est le milieu de  $M_2M_3$ .

Une condition fondamentale de tenue de route impose que les roues roulent sans glisser sur la route (ce qui garantit l'adhérence). Dans ce cas, on a les deux conditions de roulement sans glissement des roues par rapport à la route :  $\vec{V}_{M_2,2/0} = \vec{V}_{M_3,3/0} = \vec{0}$ .

**Question 9.2.** Déterminer les vitesses de rotation  $\omega_{2/1} = \dot{\theta}_{2/1}$  et  $\omega_{3/1} = \dot{\theta}_{3/1}$  en fonction du rayon de courbure  $R$ , du rayon des roues  $r$  et de la vitesse de rotation du véhicule  $\dot{\theta}$ . Préciser l'exigence mise en évidence par ce calcul par ce calcul.

## 9.2 Étude du mécanisme de répartition de vitesse

La structure d'un différentiel est celle d'un train épicycloïdal dit « sphérique ». Il comporte, en plus du carter **1**, lié rigidement à la voiture, deux planétaires, liés aux roues gauche **2** et droite **3**, un porte-satellite, qui correspond ici à la couronne d'entrée **4** et le satellite **5** (voir figure 9.3).

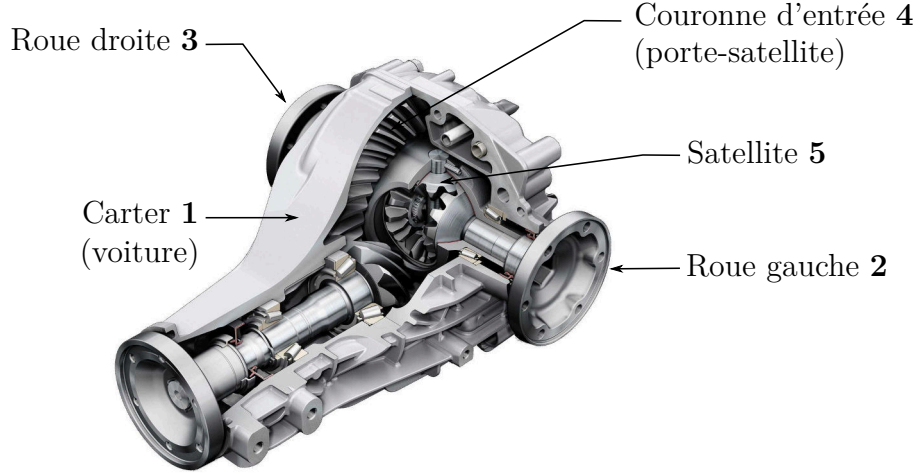


FIGURE 9.3 – Structure d'un différentiel automobile (Audi A8).

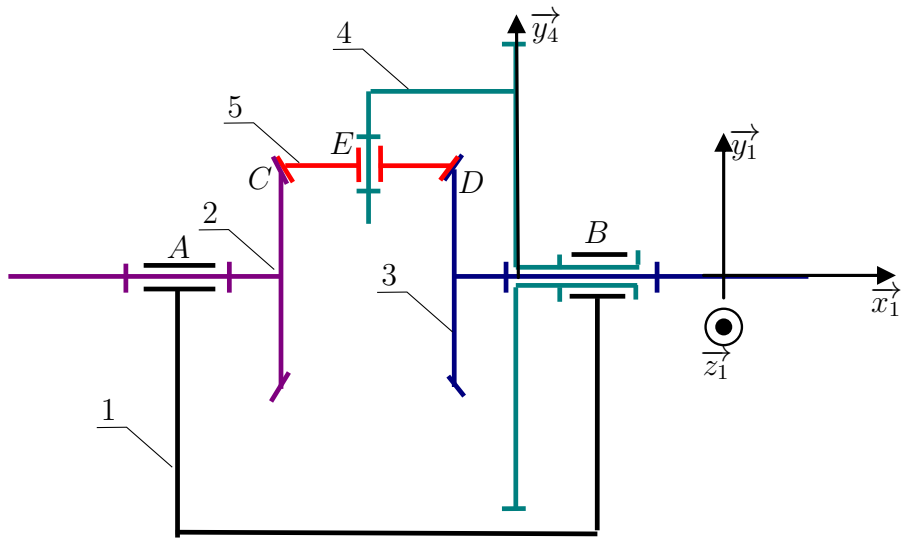


FIGURE 9.4 – Schéma cinématique du différentiel.

On donne sur la figure 9.4 le schéma cinématique du différentiel. On adoptera pour l'étude le paramétrage suivant :

- on associe au carter **1** le repère  $\mathcal{R}_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  considéré comme fixe ;
- le solide **2** auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_2 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_1)$  avec le carter **1**. On note  $\vec{\Omega}_{2/1} = \omega_{21} \vec{x}_1$  ;

- le solide **3** auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_3 = (B, \vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x}_1)$  avec le carter **1**. On note  $\vec{\Omega}_{3/1} = \omega_{31}\vec{x}_1$  ;
  - le solide **4** auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_4 = (B, \vec{x}_1, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x}_1)$  avec le carter **1**. On note  $\vec{\Omega}_{4/1} = \omega_{41}\vec{x}_1$ .
- ❗ **Attention**, les axes  $\vec{y}_1$  et  $\vec{y}_4$  sont représentés confondus sur la figure 9.4.
- le solide **5** auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_5 = (E, \vec{x}_5, \vec{y}_4, \vec{z}_5)$  en liaison pivot d'axe  $(E, \vec{y}_4)$  avec le solide **4**. On note  $\vec{\Omega}_{5/4} = \omega_{54}\vec{y}_4$ .

On note  $Z_2 = Z_3$  le nombre de dents des planétaires **2** et **3** et  $Z_5$  le nombre de dents du satellite **5**. On donne enfin  $\vec{AC} = a\vec{x}_1 + R\vec{y}_4$ ,  $\vec{BD} = -a\vec{x}_1 + R\vec{y}_4$  et  $\vec{CE} = \vec{ED} = r\vec{x}_1$ .

**Question 9.3.** Réaliser le graphe de structure du mécanisme et écrire les différents torseurs cinématiques.

**Question 9.4.** En exploitant les deux conditions de roulement sans glissement aux points  $C$  et  $D$ , déterminer l'équation reliant  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{31}$  et  $\omega_{41}$ .

**Question 9.5.** En utilisant le porte satellite **4** comme référentiel, donner l'expression des rapports  $\frac{\omega_{34}}{\omega_{54}}$  et  $\frac{\omega_{24}}{\omega_{54}}$ . En déduire une relation entre  $\omega_{34}$  et  $\omega_{24}$  puis vérifier que l'on retrouve bien la même équation reliant  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{31}$  et  $\omega_{41}$ .

**Question 9.6.** Déterminer les relations entre  $\omega_{21}$  et  $\omega_{41}$  d'une part et entre  $\omega_{31}$  et  $\omega_{41}$  d'autre part. Conclure quant à la possibilité de moduler la vitesse de rotation des roues pour prendre un virage.

**Question 9.7.** En supposant qu'une des roues patine, déterminer la vitesse de rotation de l'autre roue en fonction de  $\omega_{41}$ . La voiture peut-elle avancer en augmentant la vitesse de rotation du moteur ?

**Question 9.8.** Énoncer alors l'inconvénient majeur d'un différentiel et proposer des solutions d'amélioration, notamment pour un véhicule  $4 \times 4$ .

## Système d'aide à la navigation

### Objectifs

On cherche à valider la valeur du débit moyen dans le circuit hydraulique imposé par la pompe et l'influence du nombre de pistons sur le débit instantané.

Sur un voilier, le système « pilote hydraulique » est installé en complément du dispositif de pilotage manuel. Pour suivre un cap de consigne en pilotage manuel, le barreur doit constamment lire le cap suivi, puis celui indiqué par le compas, et corriger l'orientation du safran en fonction de l'écart constaté. Le pilote hydraulique permet la prise en charge automatique de la barre et le barreur peut ainsi se consacrer aux autres tâches de navigation sans qu'il y ait perte de cap.

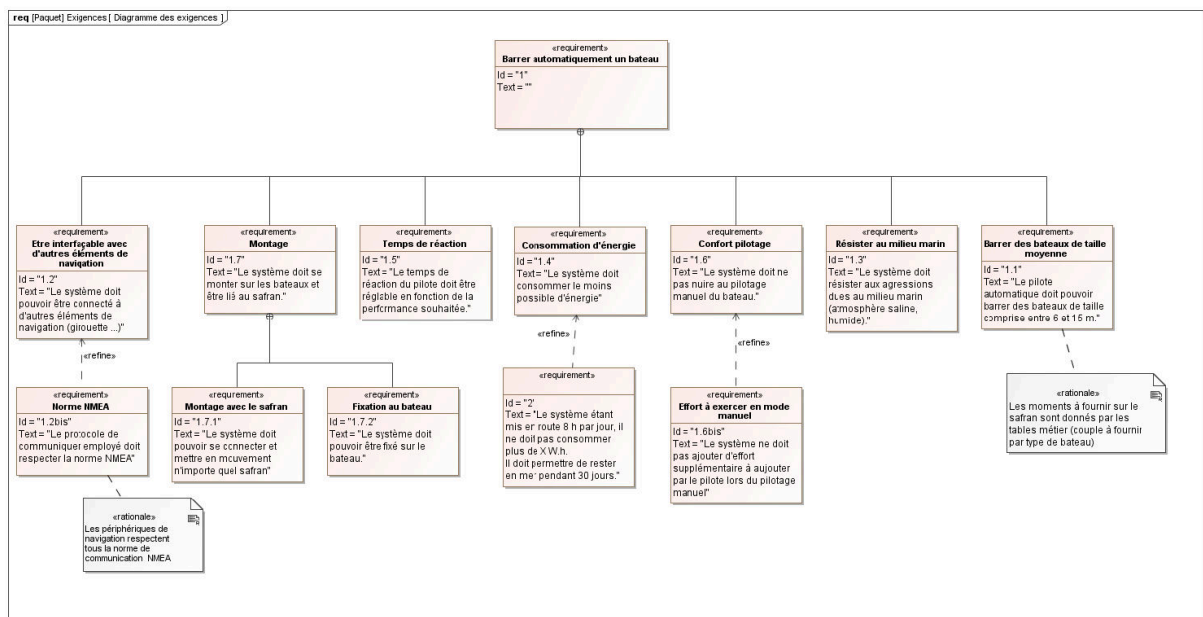


FIGURE 10.1 – Diagramme des exigences.

Le groupe hydraulique – dont est issue la motopompe objet de l'étude – est un élément du système qui fournit l'énergie mécanique nécessaire à la manœuvre du safran en mode de pilotage automatique.



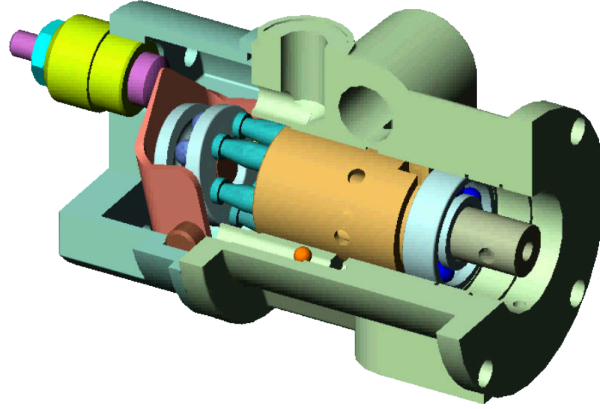


FIGURE 10.2 – Écorché CAO de la pompe hydraulique.

Le constructeur donne les performances du groupe hydraulique :

- un moteur à courant continu :
  - tension nominale : 12 V ;
  - vitesse nominale :  $1800 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$  ;
  - courant nominal : 15 A ;
  - vitesse à vide :  $2300 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$  ;
  - courant maximal à vide : 2,2 A ;
- une pompe à barillet à  $n = 6$  pistons axiaux de débit réglable entre 2 et  $20 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$  et de pression nominale : 25 bars ;
- un vérin double tige (piston  $\varnothing 40 \text{ mm}$  et tige  $\varnothing 20 \text{ mm}$ ).

La pompe a été choisie pour ses performances, d'après un cahier des charges exigeant. On se propose donc de vérifier que le débit annoncé par le constructeur est cohérent avec le modèle à notre disposition afin de valider le choix de cette pompe.

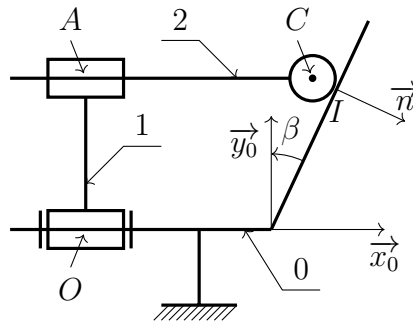


FIGURE 10.3 – Schéma cinématique minimal de la pompe.

Pour cette étude, on utilisera le schéma cinématique donné sur la figure 10.3 avec le paramétrage :

- on associe au carter **0** le repère  $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ;
- on associe au barillet **1** le repère  $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , lié au carter **0** avec une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x}_0)$  avec  $\theta_{1/0} = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  et on note  $\vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{1/0} \vec{x}_0$  le taux de rotation ;



- on associe au piston **2** le repère  $\mathcal{R}_2 = (C, \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , lié au barillet **1** avec une liaison pivot glissant d'axe  $(A, \vec{x}_0)$  avec  $\theta_{2/1} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$  et on note  $\vec{\Omega}_{2/1} = \omega_{2/1} \vec{x}_0$  le taux de rotation. La position du point  $A$  est définie par  $\vec{OA} = r \vec{y}_1$  et celle du point  $C$  est définie par  $\vec{AC} = \lambda \vec{x}_0$ . Le piston est en liaison sphère plan de normale  $(I, \vec{n})$  avec le plateau du carter **0** dont l'orientation est définie par l'angle  $\beta = (\vec{n}, \vec{x}_0)$ .

## 10.1 Modélisation du comportement de la pompe

On note  $I$  le point de contact entre le piston et le plateau.

**Question 10.1.** *Exprimer le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{1/0}\}$ .*

**Question 10.2.** *Exprimer le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ .*

**Question 10.3.** *Préciser la condition qu'il est possible d'écrire pour  $\vec{V}_{I,2/0}$  puis donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{2/0}\}$ .*

**Question 10.4.** *Montrer que la condition est aussi valable au point  $C$ , centre de la partie sphérique du piston.*

**Question 10.5.** *Déterminer une équation permettant de lier la vitesse de translation du piston  $\dot{\lambda}$  à la vitesse de rotation du barillet  $\omega_{1/0}$ , en fonction de l'inclinaison du plateau  $\beta$ . La comparer à celle obtenue précédemment.*

## 10.2 Calcul du débit instantané de la pompe

On fixe comme configuration d'étude un angle  $\beta = 25,6^\circ$ .

**Question 10.6.** *En déduire l'expression du débit instantané de la pompe en fonction de  $\omega_{1/0}$  et  $\beta$ .*

**Question 10.7.** *En déduire l'expression du débit moyen de la pompe en fonction de  $\omega_{1/0}$  et  $\beta$ . Conclure quant au respect du cahier des charges.*

## Table élévatrice

---

### Objectifs

---

On cherche à dimensionner la pompe hydraulique permettant d'alimenter le vérin d'une table élévatrice afin de respecter l'exigence de vitesse de déplacement.

---

Une table élévatrice ou « plate-forme de levage » est un dispositif de levage actionné de manière mécanique. Elle est composée d'un plateau supérieur, d'un châssis inférieur et d'un système à pantographe actionné par un ou plusieurs vérins. Le(s) vérin(s) est(sont) commandé(s) par un groupe hydraulique, généralement intégré dans l'encombrement. Tous les axes démontables sont montés sur bagues et nécessitent peu d'entretien.



### Extrait du cahier des charges

La vitesse de montée de la table élévatrice doit être supérieure à  $50 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Le bras extérieur **3** est une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z})$  avec le châssis **1** et en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z})$  avec le galet **6** de rayon  $R$ . Le galet **6** roule sans glisser sur le plateau **2** au point  $I$ . Le bras intérieur **4** est en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z})$  avec le plateau **2** et en liaison pivot d'axe  $(D, \vec{z})$  avec le galet **5** de rayon  $R$ . Le galet **5** roule sans glisser sur le châssis **1** au point  $J$ . Le bras **3** est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z})$  avec le bras **4**. Le plateau peut se translater verticalement grâce à un vérin hydraulique. On note **7** le corps du vérin simple effet et **8** sa tige. Le corps **7** est en liaison sphérique de centre  $E$  avec le bras **3** et la tige **8** est en liaison sphérique de centre  $F$  avec le bras **4**. La tige **8** et le corps **7** sont reliés par une liaison pivot glissant d'axe  $(EF)$ . On note  $d = 50 \text{ mm}$  le diamètre du piston.

### Hypothèses :

- les différentes liaisons mécaniques sont supposées parfaites ;
- l'ensemble admettant un plan de symétrie, on se ramène à une étude de mouvements dans le plan  $(A, \vec{x}, \vec{y})$ .

On note :

- $\|\vec{OA}\| = \|\vec{OB}\| = \|\vec{OC}\| = \|\vec{OD}\| = a$  et  $\|\vec{AE}\| = \|\vec{OF}\| = b$  avec  $a = 0,60 \text{ m}$  et  $b = 0,12 \text{ m}$  ;
- $\vec{AD} = \vec{CB} = \mu \vec{x}$  avec  $\mu > 0$  un paramètre variable ;
- $\dot{\lambda} = \vec{V}_{F,8/7} \cdot \vec{x}_7$  la vitesse de la tige du vérin par rapport au corps ;
- $\vec{\Omega}_{i/j} = \omega_{ij} \vec{z}$  le taux de rotation de  $i$  par rapport à  $j$  en liaison pivot d'axe dirigé par  $\vec{z}$ .

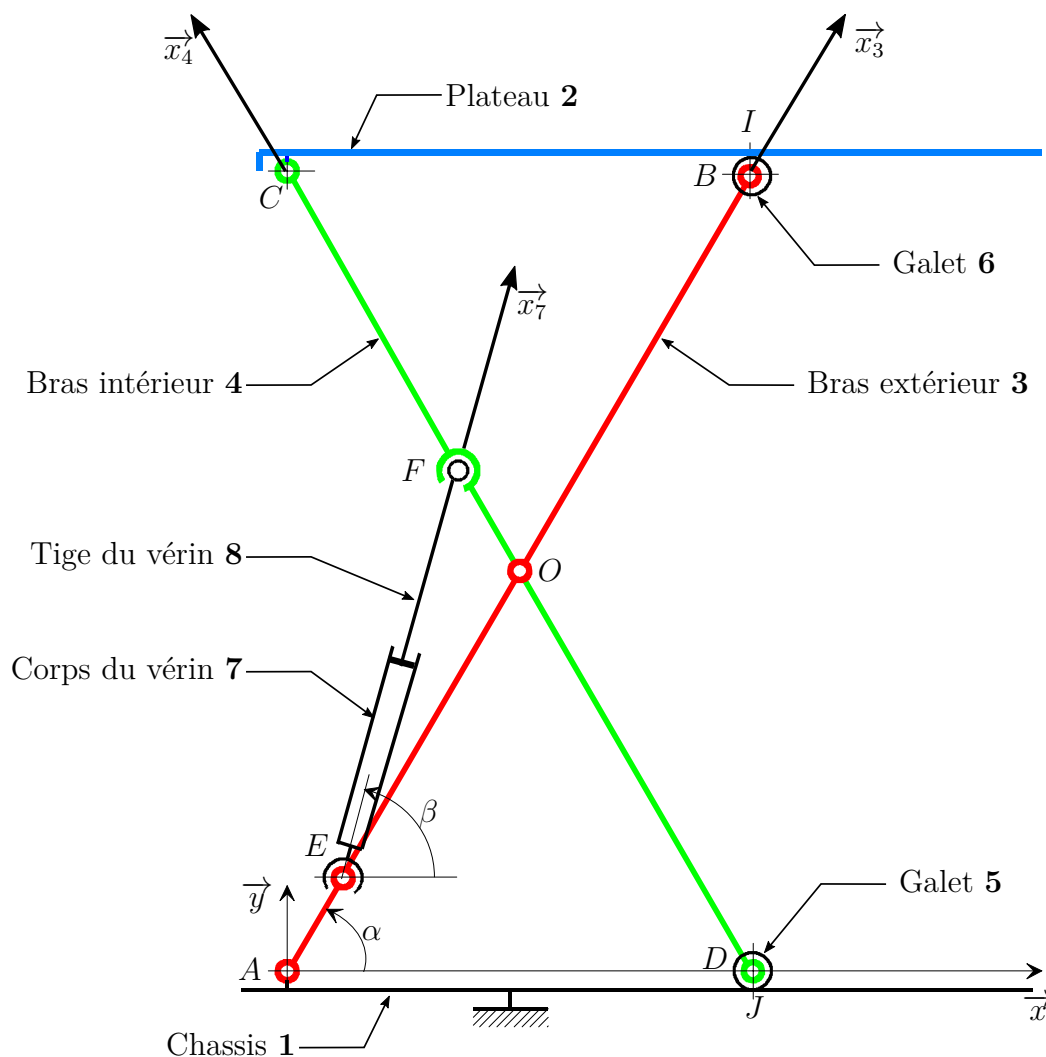


FIGURE 11.1 – Schéma cinématique de la table élévatrice.

**Question 11.1.** Montrer que  $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$  est une translation de direction  $\vec{y}$ .

On note  $\overrightarrow{V_{\star,2/1}} = v \vec{y}$  la vitesse de translation du plateau **2** par rapport au châssis **1**.

**Question 11.2.** Par composition des taux de rotation, déterminer une expression de  $\overrightarrow{\Omega_{6/2}}$  en fonction de  $\omega_{31} = \dot{\alpha}$  et  $\omega_{63}$ .

**Question 11.3.** Par composition des vitesses au point  $B$ , déterminer une expression de  $v$  en fonction de  $\alpha$  et  $\dot{\alpha}$ .

**Question 11.4.** À partir de la composition précédente, déterminer une expression de la vitesse de rotation  $\omega_{63}$  en fonction de  $\alpha$  et  $\dot{\alpha}$ . En déduire une expression de  $\omega_{54}$ .

**Question 11.5.** Par composition des taux de rotation, déterminer une expression de  $\overrightarrow{\Omega_{4/3}}$  en fonction de  $\dot{\alpha}$ .

**Question 11.6.** Par composition des vitesses au point  $F$ , déterminer une expression de  $\dot{\lambda}$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\dot{\alpha}$ .

**Question 11.7.** *Déduire des questions précédentes une expression de la vitesse de translation  $v$  en fonction de  $\dot{\lambda}$ .*

**Question 11.8.** *Déterminer le débit minimum de la pompe hydraulique permettant de satisfaire le cahier des charges.*