

Fiche 36 : TD du 21-12.

Exercice 1

En revenant à la définition, montrer que si $f(x) \rightarrow l \in \mathbb{R}$ et $g(x) \rightarrow l' \in \mathbb{R}$ pour $x \rightarrow 0_+$ alors :

$$f(x).g(x) \rightarrow_{x \rightarrow 0_+} l.l'$$

Exercice 2

En revenant à la définition, montrer que si f et g sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et si on suppose :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$$

et :

$$g(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$$

alors

$$g(f(x)) = g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Exercice 3

- Déterminer la factorisation réelle et la factorisation complexe du polynôme : $P = X^3 + 1$.
- En déduire la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction : $\frac{X}{X^3 + 1}$
- En déduire une primitive de l'expression :

$$\int \frac{x \, dx}{x^3 + 1}$$

On précisera le domaine de validité du calcul fait.

Exercice 4

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2|x|}{x} & b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x} & c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \\ d) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} & e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} \\ g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} & h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1} \end{array}$$

Exercice 5

On rappelle les limites : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x}} & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \\ c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} & d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{x^2} \\ e) \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\tan x}{\cos^2 x - 1} & f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3(\frac{x}{2})} \end{array}$$

Exercice 6

Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $f(x) = x \ln(x) - x$.

Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $] -1, +\infty[$.

On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f . Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.