

Analyse harmonique des SLCI

N. Mesnier

Lycée Jean Perrin, Lyon

2023–2024

■ Étudier la réponse des SLCI pour un signal périodique quelconque

Tout signal périodique $e(t)$ de période T , peut être décomposé en une somme de sinusoïdes de pulsations et d'amplitudes différentes appelée **série de Fourier** :

$$e(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)$$

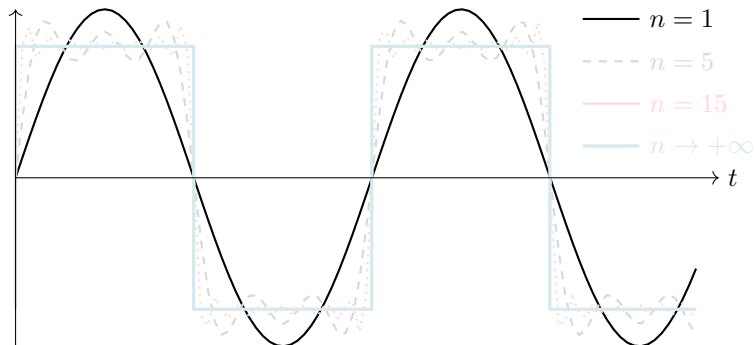
avec :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt$$

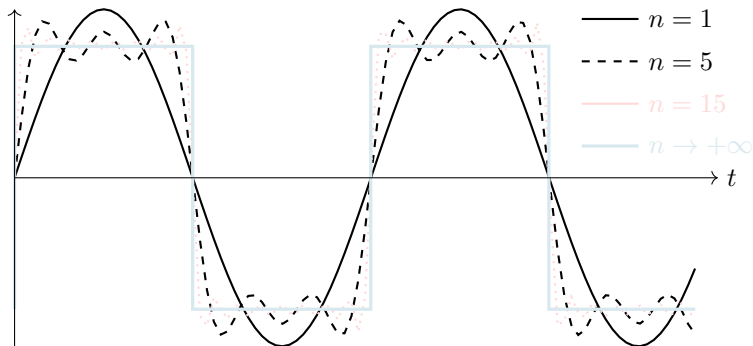
■ Exemple de décomposition en série de Fourier



Animation : [créneau & triangle](#)

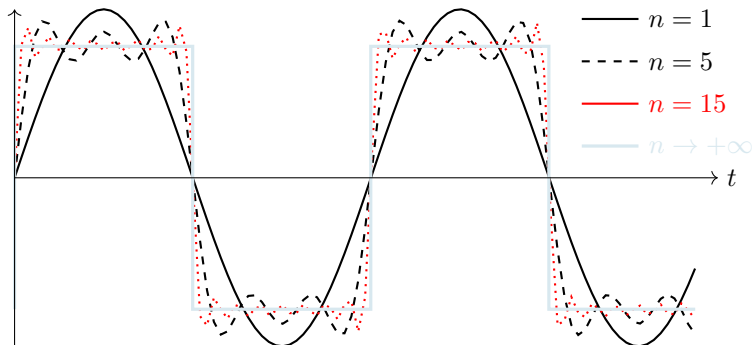
Objectif

■ Exemple de décomposition en série de Fourier



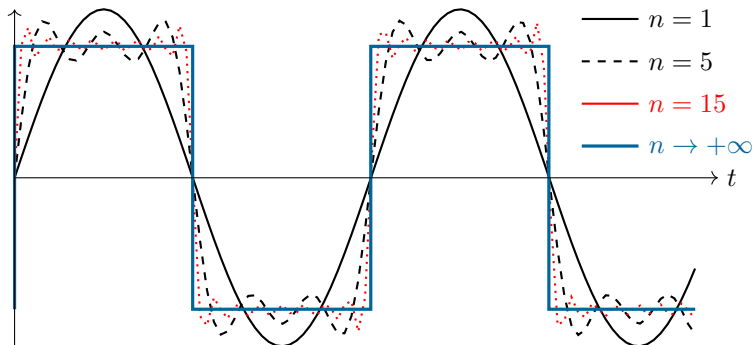
Animation : [créneau & triangle](#)

■ Exemple de décomposition en série de Fourier



Animation : [créneau & triangle](#)

■ Exemple de décomposition en série de Fourier



Animation : [créneau & triangle](#)

Objectif élémentaire

Définition (Réponse harmonique)

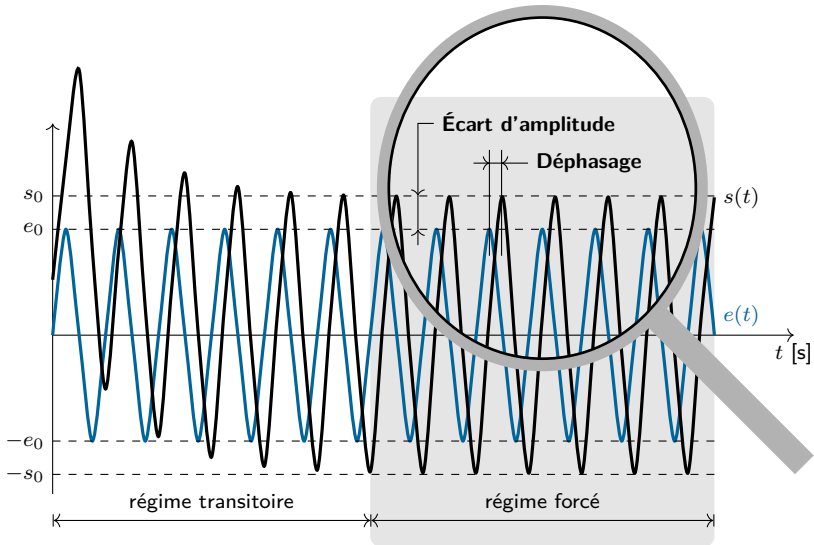
La réponse harmonique d'un système linéaire continu et invariant stable correspond à sa réponse asymptotique forcée (en régime permanent), lorsqu'il est sollicité par un signal d'entrée harmonique du type

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t)$$

d'amplitude e_0 et de pulsation ω .



Réponse harmonique



Plan du cours

- 1 Introduction
- 2 Représentations harmoniques des transmittances
- 3 Application à l'étude de la stabilité des systèmes



Introduction

Réponse harmonique

■ Modèle de système dynamique

d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ = équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_0 e(t) + a_1 \frac{de}{dt}(t) + \cdots + a_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) = b_0 s(t) + b_1 \frac{ds}{dt}(t) + \cdots + b_n \frac{d^n s}{dt^n}(t)$$

vérifiant le principe de causalité ($m \leq n$).

Fonction de transfert (en conditions de Heaviside) :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + \cdots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + \cdots + b_n p^n} = \frac{a_m \prod_{i=1}^m (p - z_i)}{b_n \prod_{j=1}^n (p - p_j)}$$

avec z_i chacun des m zéros du numérateur et p_j chacun des n pôles du dénominateur.

Réponse harmonique

Définition (Réponse harmonique)

La réponse harmonique d'un système linéaire continu et invariant stable correspond à sa réponse asymptotique forcée (en régime permanent), lorsqu'il est sollicité par un signal d'entrée harmonique du type

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t)$$

d'amplitude e_0 et de pulsation ω .

Réponse harmonique

Lorsqu'un système est soumis à une entrée de la forme :

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{e_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

sa réponse dans le domaine de Laplace est :

$$S(p) = H(p) E(p) = e_0 \omega \frac{a_m \prod_{i=1}^m (p - z_i)}{(p^2 + \omega^2) b_n \prod_{j=1}^n (p - p_j)}$$

admettant une décomposition en éléments simples de la forme :

$$S(p) = e_0 \omega \left(\sum_{\text{pôles réels}} \left[\sum_{i=1}^{\text{multiplicité}} \frac{A_i}{(p - p_j)^i} \right] + \sum_{\text{paires de pôles complexes}} \left[\sum_{i=1}^{\text{multiplicité}} \frac{B_i p + C_i}{\left((p - \Re[p_j])^2 + (\Im[p_j])^2 \right)^i} \right] + \frac{\alpha p + \beta}{p^2 + \omega^2} \right)$$

Stabilité asymptotique

D'après le théorème d'amortissement, qui s'écrit pour une fonction $f(t)$

$$\mathcal{L}[f(t) \exp(-at)](p) = \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-(p+a)t) dt = F(p+a)$$

on peut en déduire que :

$$F(p - \Re[p_j]) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) \exp(\Re[p_j]t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } \Re[p_j] < 0 \\ f(\infty) & \text{si } \Re[p_j] = 0 \\ \infty & \text{si } \Re[p_j] > 0 \end{cases}$$

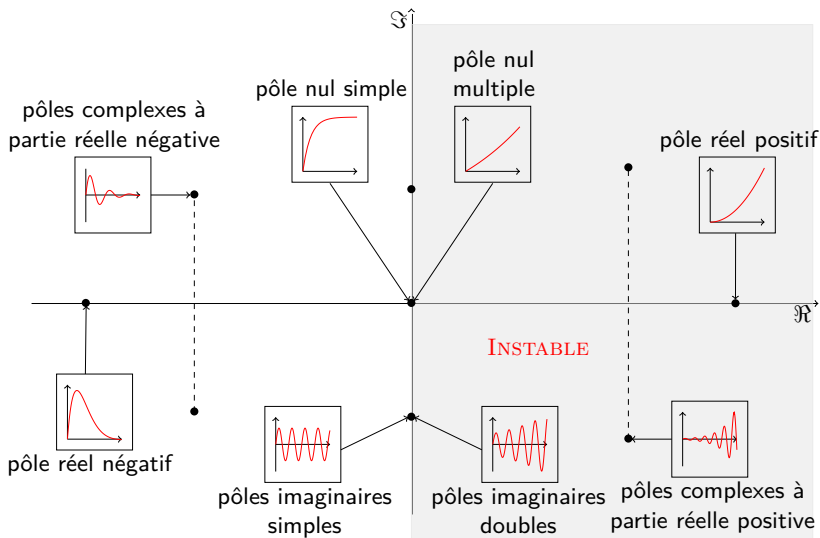
Définition (Stabilité asymptotique)

Un système linéaire continu et invariant est asymptotiquement stable si sa réponse impulsionnelle tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.

Théorème (Système asymptotiquement stable)

Un système linéaire continu et invariant est asymptotiquement stable si et seulement si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative.

Stabilité & position des pôles



Réponse harmonique

Si $\operatorname{Re}[p_j] < 0, \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on peut décomposer la réponse du système :

$$S(p) = S_{\text{libre}}(p) + S_{\text{forcée}}(p)$$

avec une réponse dite « libre »

$$S_{\text{libre}}(p) = e_0 \omega \left(\sum_{\text{pôles } \mathbb{R}} \left[\sum_{i=1}^{\text{mult.}} \frac{A_i}{(p - p_j)^i} \right] + \sum_{\substack{\text{paires de} \\ \text{pôles } \mathbb{C}}} \left[\sum_{i=1}^{\text{mult.}} \frac{B_i p + C_i}{((p - \Re[p_j])^2 + (\Im[p_j])^2)^i} \right] \right)$$

dont l'expression temporelle tend asymptotiquement vers 0

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s_{\text{libre}}(t) = 0$$

et une réponse dite « forcée »

$$S_{\text{forcée}}(p) = e_0 \omega \left(\frac{\alpha p + \beta}{p^2 + \omega^2} \right) = e_0 \left(\alpha \omega \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \beta \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right) .$$

Réponse harmonique

Régime permanent $\iff$ réponse « forcée » :

$$s_{\text{forcée}}(t) = e_0 (\alpha \omega \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)) u(t)$$

En notant $\tan(\varphi) = \alpha\omega/\beta$ tel que

$$\cos(\varphi) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 \omega^2 + \beta^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = \frac{\alpha \omega}{\sqrt{\alpha^2 \omega^2 + \beta^2}}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} s_{\text{forcée}}(t) &= e_0 \sqrt{\alpha^2 \omega^2 + \beta^2} (\sin(\varphi) \cos(\omega t) + \cos(\varphi) \sin(\omega t)) u(t) \\ &= e_0 \sqrt{\alpha^2 \omega^2 + \beta^2} \sin(\omega t + \varphi) u(t) \end{aligned}$$

Réponse harmonique

En remarquant qu'il est possible d'annuler le terme $(p^2 + \omega^2)$ avec $p = \pm j\omega$, il vient le système :

$$\begin{cases} -\alpha j\omega + \beta &= \lim_{p \rightarrow -j\omega} (p^2 + \omega^2) \frac{S(p)}{e_0 \omega} = \lim_{p \rightarrow -j\omega} H(p) = H(-j\omega) \\ \alpha j\omega + \beta &= \lim_{p \rightarrow j\omega} (p^2 + \omega^2) \frac{S(p)}{e_0 \omega} = \lim_{p \rightarrow j\omega} H(p) = H(j\omega) \end{cases}$$

permettant de déterminer α et β

$$\alpha\omega = \Im[H(j\omega)] \quad \text{et} \quad \beta = \Re[H(j\omega)]$$

tels que :

$$s_{\text{forcée}}(t) = e_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi) u(t) \quad \text{avec} \quad \varphi \equiv \angle H(j\omega) [2\pi]$$

avec

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\alpha^2 \omega^2 + \beta^2} \quad \text{et} \quad \tan(\angle H(j\omega)) = \frac{\alpha\omega}{\beta}$$

Réponse harmonique

Théorème (Réponse harmonique)

La réponse asymptotique forcée d'un système linéaire, continu et invariant asymptotiquement stable, de fonction de transfert $H(p)$ à une entrée sinusoïdale $e(t) = e_0 \sin(\omega t)u(t)$ est une sinusoïde d'expression :

$$s_{\text{forcé}}(t) = e_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi)u(t)$$

de même pulsation ω , d'amplitude multipliée par le module $|H(j\omega)|$ et déphasée par l'argument $\varphi = \angle H(j\omega)$ de la fonction de transfert complexe $H(j\omega)$.

Exemple de réponse harmonique

■ Réponse harmonique d'un système du 1^{er} ordre

Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}, \quad K > 0$$

Signal d'entrée :

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{e_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

Réponse dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = H(p) E(p) = \frac{K e_0 \omega}{(p^2 + \omega^2) (1 + \tau p)}$$

Exemple de réponse harmonique

Décomposition en éléments simples :

$$S(p) = \frac{Ap + B}{p^2 + \omega^2} + \frac{C}{1 + \tau p}$$

Détermination des coefficients :

$$A = \frac{1}{2j\omega} \left[\lim_{p \rightarrow j\omega} (p^2 + \omega^2) S(p) - \lim_{p \rightarrow -j\omega} (p^2 + \omega^2) S(p) \right] = -\frac{K E_0 \omega \tau}{1 + \tau^2 \omega^2}$$

$$B = \frac{1}{2} \left[\lim_{p \rightarrow j\omega} (p^2 + \omega^2) S(p) + \lim_{p \rightarrow -j\omega} (p^2 + \omega^2) S(p) \right] = \frac{K E_0 \omega}{1 + \tau^2 \omega^2}$$

$$C = \lim_{p \rightarrow -1/\tau} (1 + \tau p) S(p) = \frac{K E_0 \omega \tau^2}{1 + \tau^2 \omega^2}$$

Réponse dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K E_0 \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \left(\frac{1 - \tau p}{p^2 + \omega^2} + \frac{\tau^2}{1 + \tau p} \right)$$

Exemple de réponse harmonique

Réponse dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K e_0 \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \left(\frac{\tau}{p + 1/\tau} + \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} - \tau \frac{p}{p^2 + \omega^2} \right)$$

Transformée de Laplace inverse $\rightarrow$ réponse temporelle :

$$s(t) = \frac{K e_0 \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \left(\underbrace{\tau e^{-t/\tau}}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) - \tau \cos(\omega t)}_{\text{régime forcé}} \right) u(t)$$

comme :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t/\tau} = 0$$

en régime permanent ($t \rightarrow +\infty$) :

$$s_{\text{forcée}}(t) = \frac{K e_0}{1 + \tau^2 \omega^2} (\sin(\omega t) - \tau \omega \cos(\omega t)) u(t)$$

Exemple de réponse harmonique

En posant :

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = \frac{-\tau \omega}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \leq 0$$

il vient :

$$s_{\text{forcée}}(t) = \frac{K e_0}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi) u(t)$$

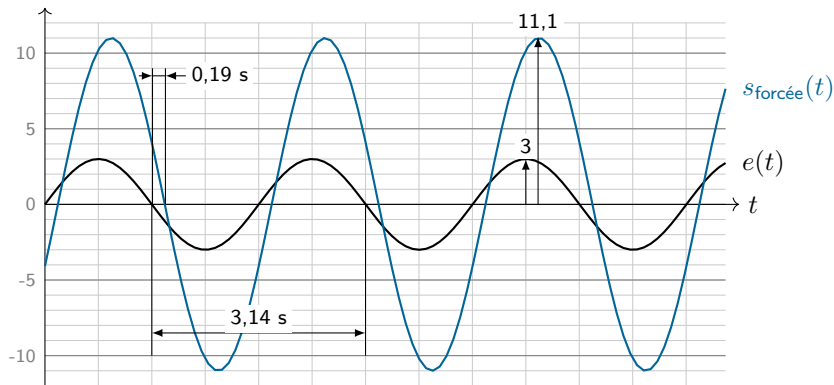
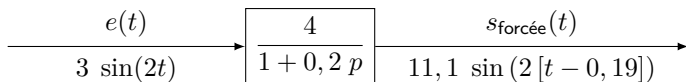
À partir de la fonction de transfert complexe $H(j\omega)$:

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} & \text{Module} \\ \angle H(j\omega) \equiv -\text{Arctan}(\tau \omega) [2\pi] & \text{Argument} \end{cases}$$

⇒ Réponse en régime forcé :

$$s_{\text{forcée}}(t) = e_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi) u(t)$$

Exemple de réponse harmonique II



Analyse harmonique

Définition (Analyse harmonique)

L'analyse harmonique d'un système linéaire continu et invariant stable consiste à analyser ses réponses harmoniques pour l'ensemble des pulsations propres $\omega \in]0, +\infty[$ du signal harmonique d'entrée.

■ **Objectif** : prédire la réponse en régime permanent (forcée) d'un système soumis à une somme d'entrées du type $e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t)$.

■ **Besoins** : pour chaque pulsation d'excitation ω ,

- module $|H(j\omega)|$
- argument $\varphi = \angle H(j\omega)$

de la fonction de transfert complexe $H(j\omega)$.

Définition (Fonction de transfert complexe)

On appelle fonction de transfert complexe ou transmittance isochrone l'expression $H(j\omega)$ d'une fonction de transfert $H(p)$ dans le cas où la variable complexe de Laplace $p = j\omega$ est un imaginaire pur. On la notera :

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \exp(j\varphi(\omega))$$

avec $|H(j\omega)|$ le module et $\varphi(\omega) = \angle H(j\omega)$ l'argument.

Transformée de Fourier (= transformée de Laplace avec $p = j\omega$) :

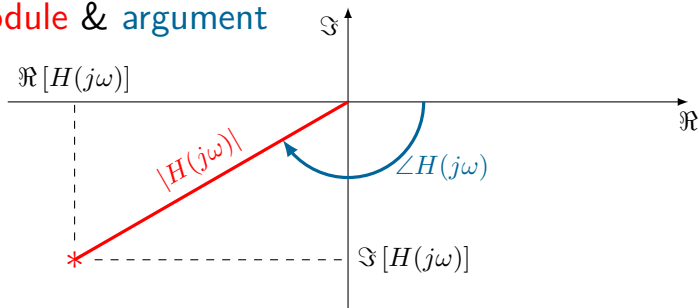
$$H(j\omega) = \int_0^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

$h(t)$: réponse impulsionnelle du système

H : fonction de transfert complexe.

Analyse harmonique

i Module & argument



Module : $|H(j\omega)| = \sqrt{\Re[H(j\omega)]^2 + \Im[H(j\omega)]^2}$

Argument : $\angle H(j\omega)$ tel que
$$\begin{cases} \cos(\angle H(j\omega)) = \frac{\Re[H(j\omega)]}{|H(j\omega)|} \\ \sin(\angle H(j\omega)) = \frac{\Im[H(j\omega)]}{|H(j\omega)|} \end{cases}$$

Module & argument II

Pour toute FT de la forme :

$$H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

Module :

$$|H(j\omega)| = \frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|}$$

Argument :

$$\angle H(j\omega) \equiv \angle N(j\omega) - \angle D(j\omega) [2\pi]$$

Définition (Lieux de transfert)

On appelle lieux de transfert, le tracé des différentes représentations graphiques de la fonction de transfert complexe $H(j\omega)$ d'un système pour toutes les pulsations d'excitation possibles.

Représentations graphiques utilisées en ingénierie :

- les diagrammes de Bode ;
- le diagramme de Black (courbe paramétrée en ω dans le plan $(\varphi(\omega), |H(j\omega)|_{\text{dB}})$, hors programme) ;
- le diagramme de Nyquist (courbe paramétrée en ω dans le plan complexe, hors programme).

Diagrammes de Bode

Diagrammes de bode = deux graphes :

- ➊ gain en décibel (dB) :

$$\log(\omega) \mapsto |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(|H(j\omega)|)$$

- ➋ phase en degrés :

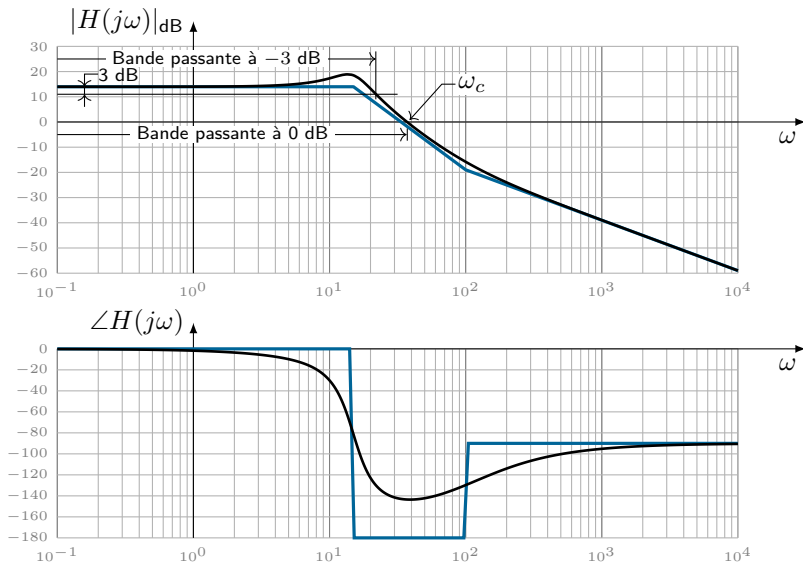
$$\log(\omega) \mapsto \varphi(\omega) = \angle H(j\omega)$$

tracés en fonction de la pulsation propre du signal d'entrée $\omega \in]0; +\infty[$ sur une échelle logarithmique.

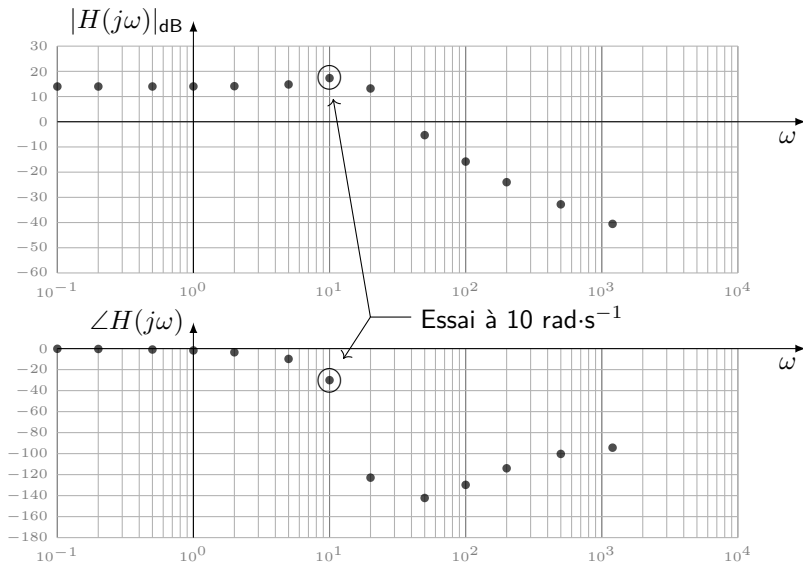
1 seule valeur à connaître :

$$\log(2) \approx 0,3$$

Diagrammes de Bode



Diagrammes de Bode expérimentaux



Vidéo : [Control'X](#)

Diagrammes de Bode

■ Propriétés

Si $H(p) = H_1(p) \times H_2(p)$ alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log (|H_1(j\omega)| \times |H_2(j\omega)|) \\ \qquad \qquad \qquad = 20 \log (|H_1(j\omega)|) + 20 \log (|H_2(j\omega)|) \\ \angle H(j\omega) \equiv \angle (H_1(j\omega) \times H_2(j\omega)) \quad [2\pi] \\ \qquad \qquad \qquad \equiv \angle H_1(j\omega) + \angle H_2(j\omega) \quad [2\pi] \end{array} \right.$$

Graphiquement : ajout les diagrammes de Bode des fonctions $H_1(j\omega)$ et $H_2(j\omega)$.

■ Vocabulaire :

- octave $\omega \mapsto 2 \times \omega$
- décade $\omega \mapsto 10 \times \omega$

Équivalences entre module et gain en décibel :

$ H $	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	10	100
$ H _{\text{dB}}$	-40	-20	-6	-3	0	3	6	20	40



Représentations harmoniques des transmittances

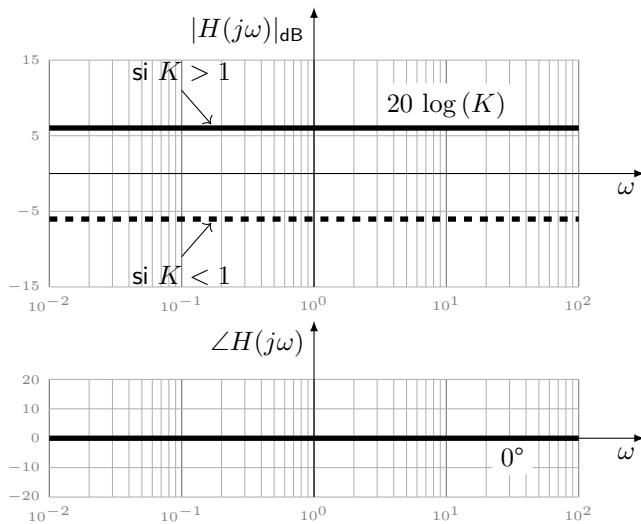
Fonction de transfert :

$$H(p) = K \implies H(j\omega) = K$$

Module (gain) & argument : $\forall \omega \in]0; +\infty[$

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = K \\ \angle H(j\omega) \equiv 0 [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) \\ \angle H(j\omega) \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

Gain pur : diagrammes de Bode



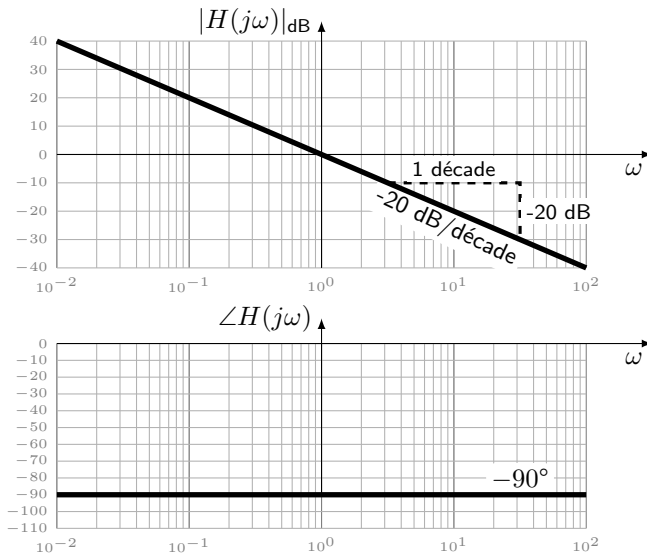
Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1}{p} \implies H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{-j}{\omega}$$

Module (gain) & argument : $\forall \omega \in]0; +\infty[$

$$\left\{ \begin{array}{l} |H(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \\ \sin(\angle H(j\omega)) = -1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log(\omega) \\ \angle H(j\omega) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right.$$

Intégrateur : diagrammes de Bode



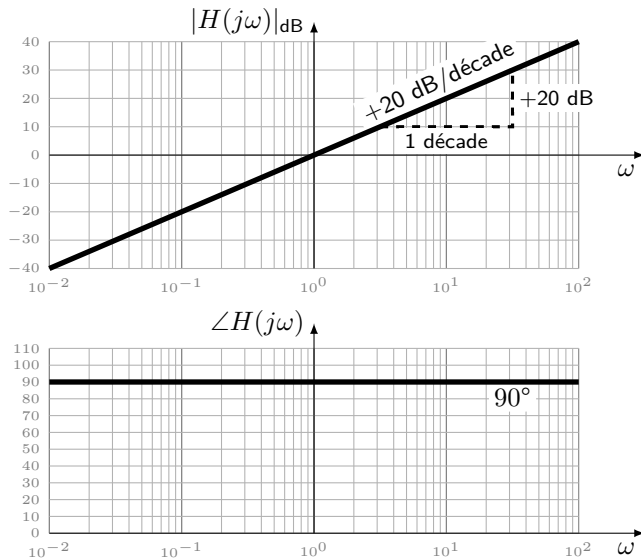
Fonction de transfert :

$$H(p) = p \implies H(j\omega) = j\omega$$

Module (gain) & argument : $\forall \omega \in]0; +\infty[$

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \omega \\ \sin(\angle H(j\omega)) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(\omega) \\ \angle H(j\omega) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

Dérivateur : diagrammes de Bode



Premier ordre

Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \implies H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega} = K \frac{1 - j\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2}$$

avec :

$$\Re[H(j\omega)] = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2} > 0 \quad \text{et} \quad \Im[H(j\omega)] = \frac{-K\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2} < 0$$

Module (gain) & argument : $\forall \omega \in]0; +\infty[$

$$\left\{ \begin{array}{l} |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \\ \iff |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}) \\ \angle H(j\omega) \equiv -\text{Arctan}(\tau\omega) [2\pi] \end{array} \right.$$

■ Comportement basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$)

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle H(j\omega) \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

■ Comportement haute fréquence ($\omega \rightarrow +\infty$)

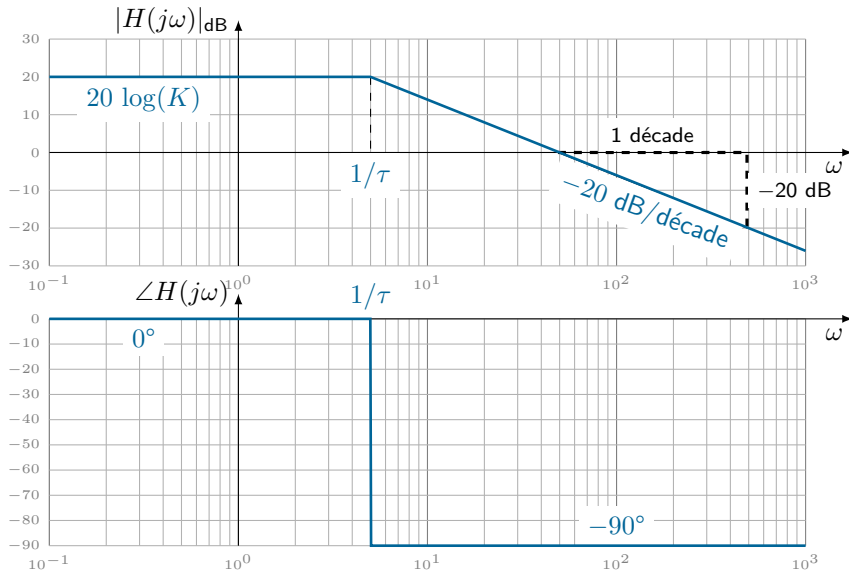
Comme $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \simeq \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \tau \omega$, on a :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)|_{\text{dB}} \simeq \lim_{\omega \rightarrow +\infty} 20 \log\left(\frac{K}{\tau}\right) - 20 \log(\omega) \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle H(j\omega) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

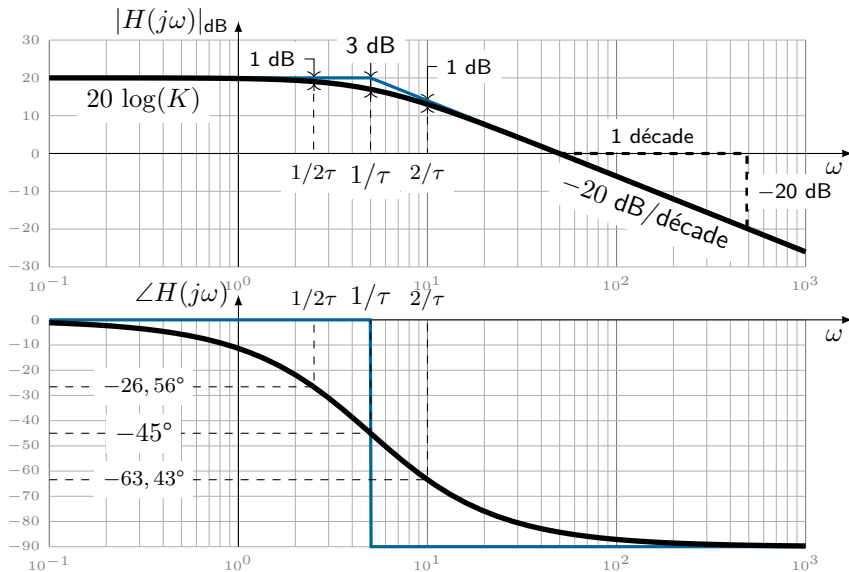
■ Comportement moyenne fréquence ($\omega \sim 1/\tau$)

ω	$ H(j\omega) $	$ H(j\omega) _{\text{dB}}$	$\angle H(j\omega)$	$\angle H(j\omega) (^{\circ})$
$1/2\tau$	$2K/\sqrt{5}$	$20 \log(K) - 1 \text{ dB}$	$\text{Arctan}(-1/2)$	$-26,56^{\circ}$
$1/\tau$	$K/\sqrt{2}$	$20 \log(K) - 3 \text{ dB}$	$\text{Arctan}(-1)$	-45°
$2/\tau$	$K/\sqrt{5}$	$20 \log(K) - 7 \text{ dB}$	$\text{Arctan}(-2)$	$-63,43^{\circ}$

Premier ordre : diagrammes de Bode



Premier ordre : diagrammes de Bode



Numérateur d'ordre 1

Fonction de transfert :

$$H(p) = 1 + \tau p \implies H(j\omega) = 1 + \tau j\omega$$

Module (gain) & argument :

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \iff |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \left(\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \right) \\ \angle H(j\omega) \equiv \text{Arctan}(\tau \omega) [2\pi] \end{cases}$$

Analyse (même démarche que 1^{er} ordre) :

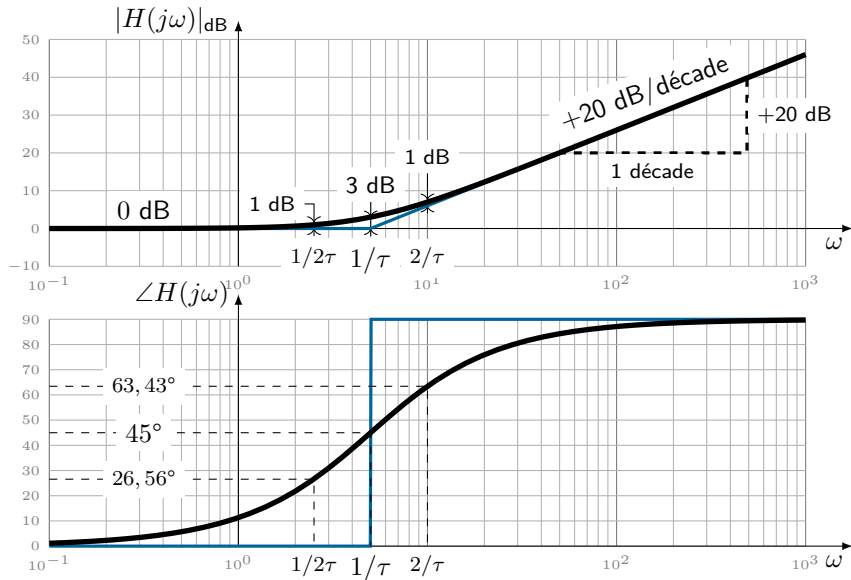
- basses fréquences ($\omega \rightarrow 0$)

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB} \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle H(j\omega) \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

- hautes fréquences ($\omega \rightarrow +\infty$)

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)|_{\text{dB}} \simeq \lim_{\omega \rightarrow +\infty} 20 \log(\tau) + 20 \log(\omega) \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle H(j\omega) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

Numérateur d'ordre 1 : diagrammes de Bode



Second ordre sous-amorti ($\xi \leq 1$)

Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \implies H(j\omega) = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)}$$

avec :

$$\Re[H(j\omega)] = \frac{K \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2} \begin{cases} > 0 \text{ si } \omega < \omega_0 \\ = 0 \text{ si } \omega = \omega_0 \\ < 0 \text{ si } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

$$\Im[H(j\omega)] = \frac{-K \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2} < 0$$

Second ordre sous-amorti ($\xi \leq 1$)

Module & argument :

$$\left\{ \begin{array}{l} |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2}} \\ \angle H(j\omega) \equiv \frac{-\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\xi\omega\omega_0}\right) \quad [2\pi] \end{array} \right.$$

Gain (en dB) :

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2} \right)$$

Second ordre sous-amorti ($\xi \leq 1$)

■ Extrema du gain :

En posant $u = \omega/\omega_0$, il vient :

$$\frac{d \left[(1 - u^2)^2 + (2\xi u)^2 \right]}{du} = 4u (u^2 - 1 + 2\xi^2) = 0$$

$$\iff \begin{cases} u = 0 \\ u = \pm \sqrt{1 - 2\xi^2} \text{ si } \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7 \end{cases}$$

Le cas $u = 0$ correspond à la tangente horizontale quand $\omega \rightarrow 0$ (BF).

Si $\xi \leq 1/\sqrt{2} \approx 0,7 \Rightarrow$ maximum d'amplitude appelé **résonance** pour la pulsation :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} < \omega_0$$

Amplitude :

$$|H(j\omega_r)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) - 20 \log(2\xi \sqrt{1 - \xi^2}) \quad \text{si } \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Résonance marquée si $\xi < 0,2 \Rightarrow$ permet de déterminer ξ .

Second ordre sous-amorti ($\xi \leq 1$)

■ Comportement basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$)

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle H(j\omega) \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

■ Comportement haute fréquence ($\omega \rightarrow +\infty$)

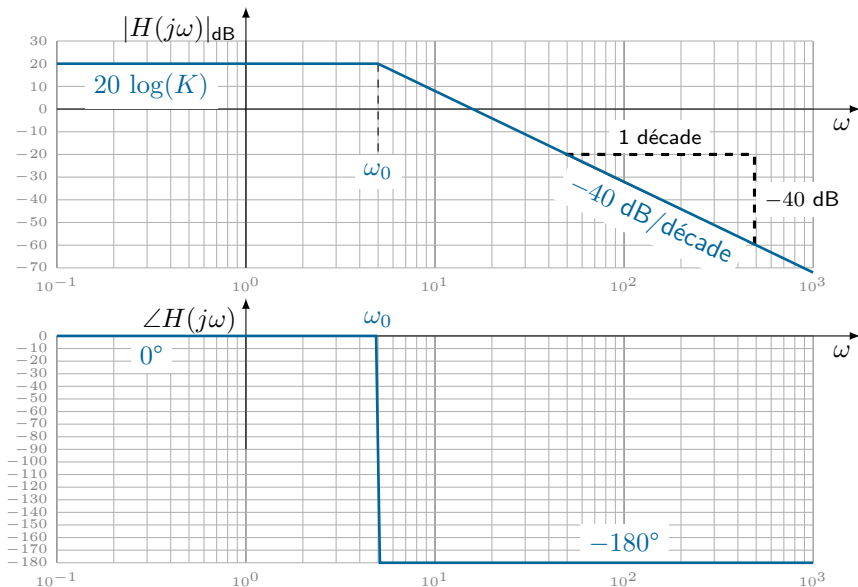
$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)|_{\text{dB}} \simeq \lim_{\omega \rightarrow +\infty} 20 \log(K\omega_0^2) - 40 \log(\omega) \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle H(j\omega) \equiv -\pi [2\pi] \end{cases}$$

■ Comportement moyenne fréquence ($\omega \sim \omega_0$)

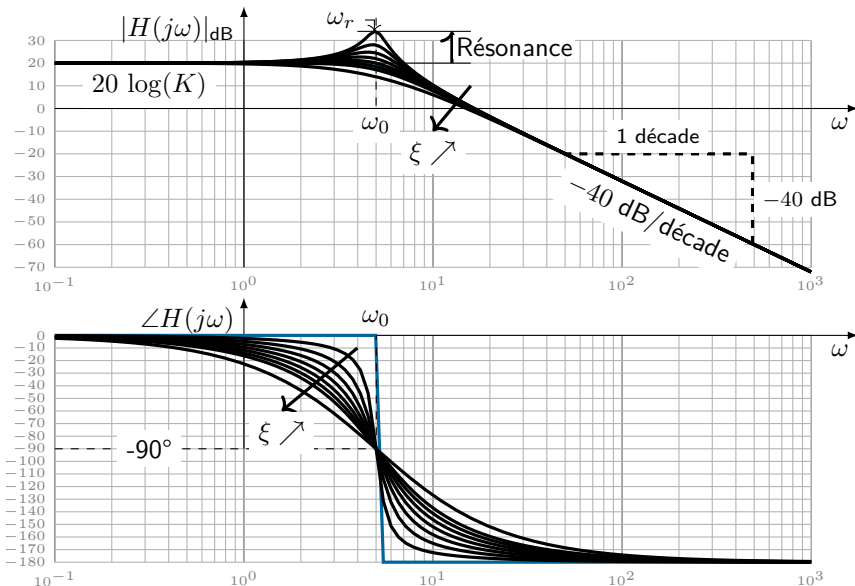
$$\begin{cases} |H(j\omega_0)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) - 20 \log(2\xi) = 20 \log(KQ) \\ \angle H(j\omega_0) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$Q = 1/(2\xi)$: facteur de qualité.

Second ordre sous-amorti : diag. de Bode



Second ordre sous-amorti : diag. de Bode



Cas général

■ Factorisation de la fonction de transfert (pôles p_i et zéros z_j)

$$H(p) = \frac{\text{Numérateur d'ordre 1} \times \text{Numérateur d'ordre 2}}{\text{Intégrateur} \times \text{Premier ordre} \times \text{Second ordre}}$$

Numérateur d'ordre 1
(zéro réel négatif)

Numérateur d'ordre 2
(paire de zéros complexes conjugués)

Intégrateur
(pôle nul)

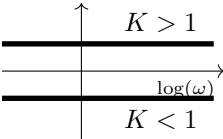
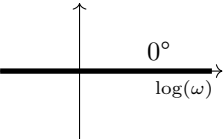
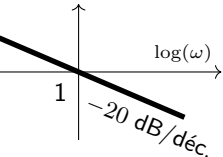
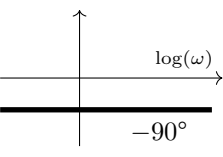
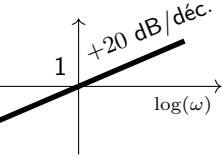
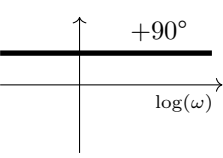
Premier ordre
(pôle réel négatif)

Second ordre
(paire de pôles complexes conjugués)

Gain

$$H(p) = \frac{K \times \prod_{\beta} (1 + \tau_{\beta} p) \times \prod_{\delta} \left(1 + \frac{2\xi_{\delta}}{\omega_{0\delta}} p + \frac{p^2}{\omega_{0\delta}^2} \right)}{p^{\alpha} \times \prod_{\kappa} (1 + \tau_{\kappa} p) \times \prod_{\mu} \left(1 + \frac{2\xi_{\mu}}{\omega_{0\mu}} p + \frac{p^2}{\omega_{0\mu}^2} \right)}$$

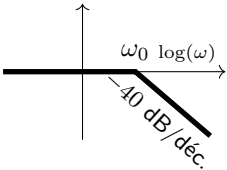
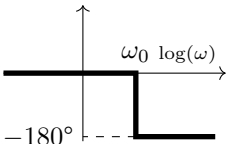
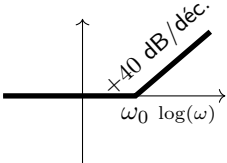
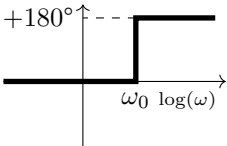
Tracés asymptotiques élémentaires (1/3)

FT éléme.	$H(p)$	$ H(j\omega) _{dB}$	$\angle H(j\omega)$
Gain pur	K		
Intégrateur	$\frac{1}{p}$		
Dérivateur	p		

Tracés asymptotiques élémentaires (2/3)

FT éléme.	$H(p)$	$ H(j\omega) _{\text{dB}}$	$\angle H(j\omega)$
Premier ordre	$\frac{1}{1 + \tau p}$		
Numérateur d'ordre 1	$1 + \tau p$		

Tracés asymptotiques élémentaires (3/3)

FT éléme.	$H(p)$	$ H(j\omega) _{\text{dB}}$	$\angle H(j\omega)$
Second ordre sous-amorti	$\frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$		
Numérateur d'ordre 2 sous-amorti	$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}$		

Exemple

Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{5(1 + 5p)}{p(1 + 0,5p + 0,25p^2)}$$

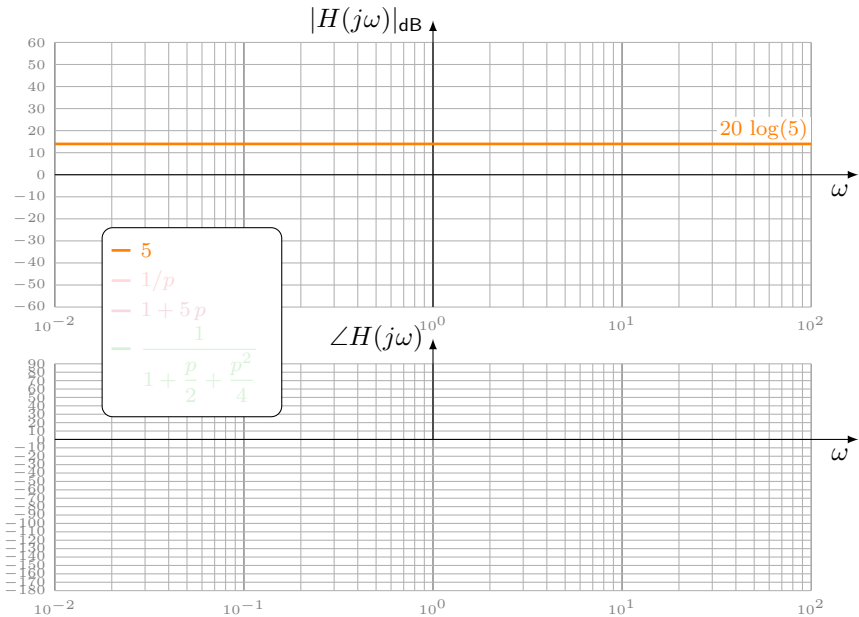
Fonctions de transfert élémentaires :

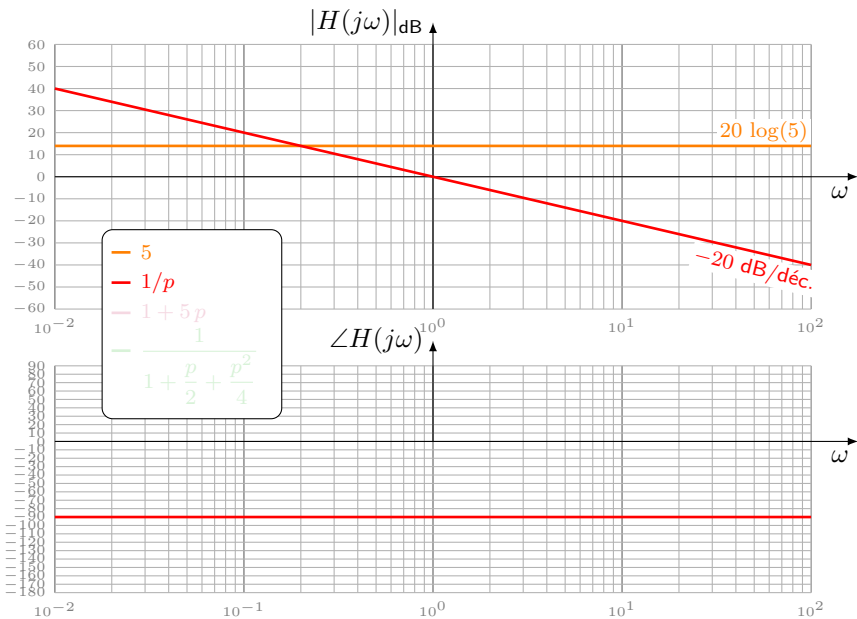
- ❶ Gain pur : $H_1(p) = 5$
- ❷ Intégrateur : $H_2(p) = \frac{1}{p}$
- ❸ Numérateur d'ordre 1 : $H_3(p) = 1 + 5p$
- ❹ Second ordre :

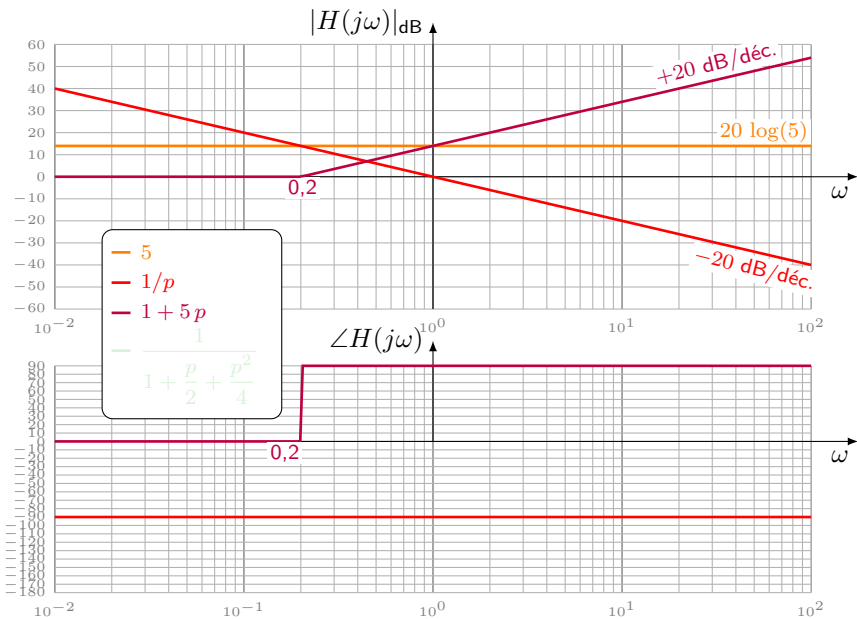
ⓘ Attention pôles réels ou complexes ? $\Rightarrow$ factorisation

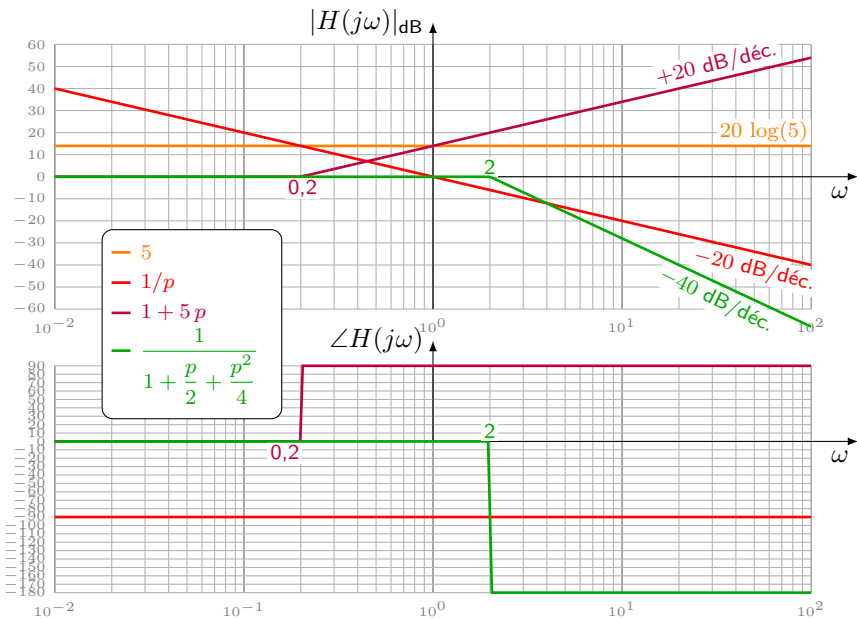
ici : $\omega_0 = 2 \text{ rad/s} \Rightarrow \xi = \frac{1}{2} \Rightarrow$ résonance

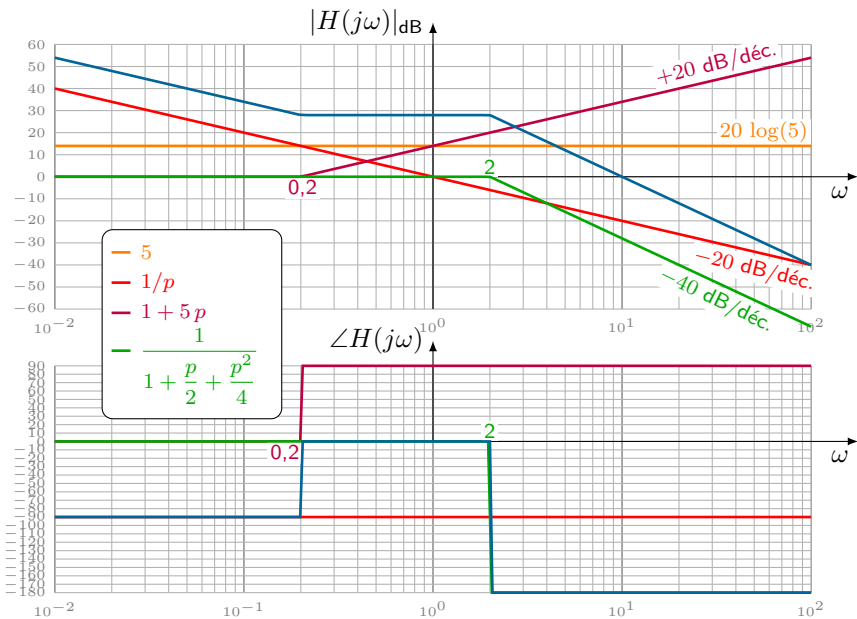
$$H_4(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4}}$$

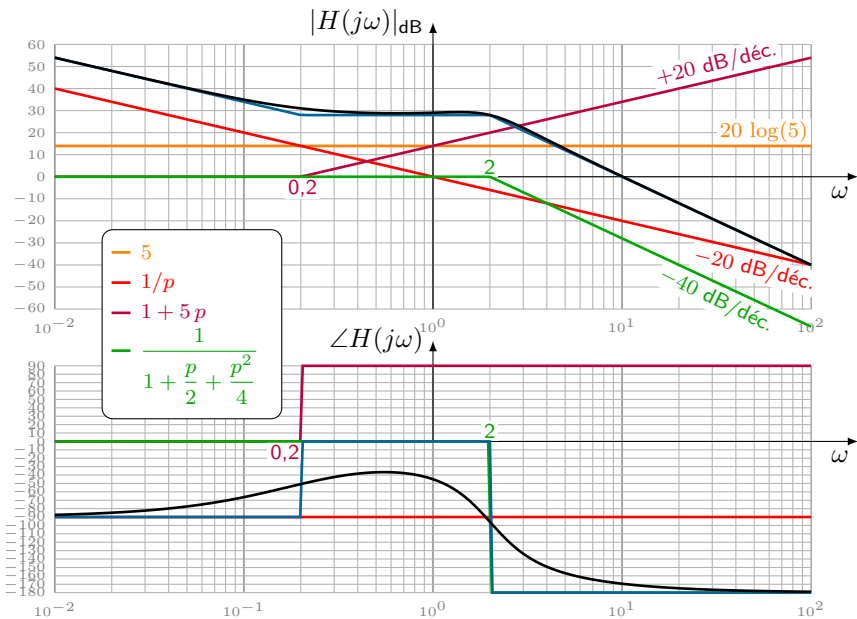














Application à l'étude de la stabilité des systèmes

Étude de la stabilité des systèmes

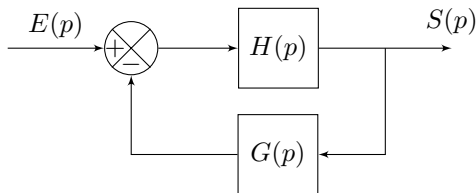
Objectif d'un asservissement : faire en sorte que la sortie du système suive le plus fidèlement possible un signal d'entrée.

Condition nécessaire : système stable.

Étude de la stabilité des systèmes

Objectif d'un asservissement : faire en sorte que la sortie du système suive le plus fidèlement possible un signal d'entrée.

Condition nécessaire : système stable.



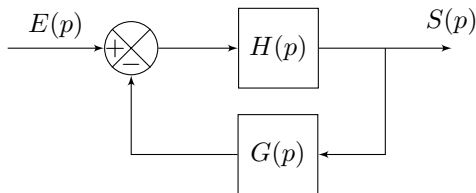
$$\text{FTBF}(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1 + \text{FTBO}(j\omega)} \quad \text{avec} \quad \text{FTBO}(j\omega) = H(j\omega)G(j\omega)$$

Si $\text{FTBO}(j\omega) \rightarrow -1 \Rightarrow$ le système devient instable = résonance de la FTBF.

Étude de la stabilité des systèmes

Objectif d'un asservissement : faire en sorte que la sortie du système suive le plus fidèlement possible un signal d'entrée.

Condition nécessaire : système stable.



$$\text{FTBF}(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1 + \text{FTBO}(j\omega)} \quad \text{avec} \quad \text{FTBO}(j\omega) = H(j\omega)G(j\omega)$$

Si $\text{FTBO}(j\omega) \rightarrow -1 \Rightarrow$ le système devient instable = résonance de la FTBF.

Système stable ?

Marges de stabilité

Définition (Marge de gain)

La marge de gain M_G est la distance algébrique en dB mesurée entre la courbe de gain et l'axe des abscisses pour une pulsation $\omega_{- \pi}$ telle que la phase soit de -180° :

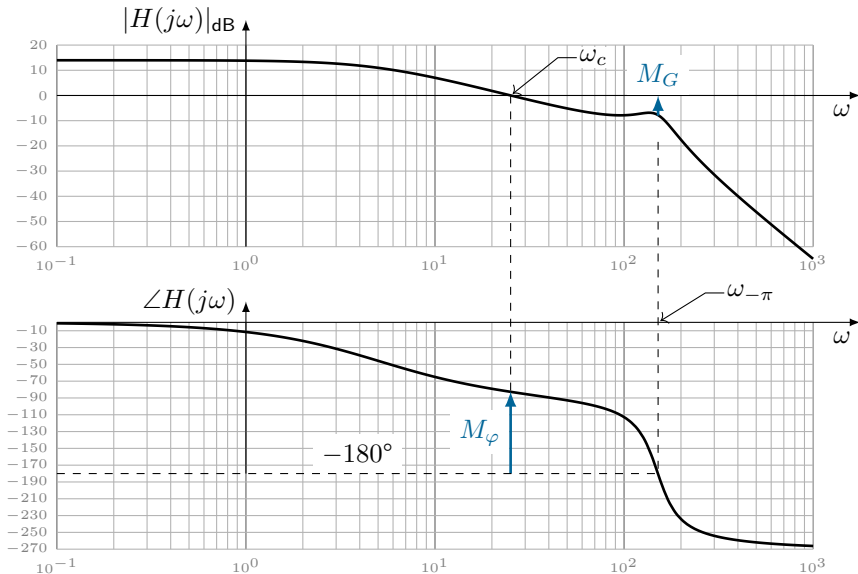
$$M_G = -|H(j\omega_{- \pi})|_{\text{dB}} \quad \text{avec} \quad \angle H(j\omega_{- \pi}) = -180^\circ$$

Définition (Marge de phase)

La marge de phase M_φ est la distance algébrique en degré mesurée entre -180° et la courbe de phase pour une pulsation de coupure ω_c telle que le gain soit nul :

$$M_\varphi = 180^\circ + \angle H(j\omega_c) \quad \text{avec} \quad |H(j\omega_c)|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$$

Marges de stabilité dans Bode





N. Mesnier, lycée Jean Perrin, Lyon